Wondershare PDFelement

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Katedra matematiky a aktuárstva

KADEROVÁ ▪ KRÁTKA ▪ KRČOVÁ ▪ MUCHA ▪ ŠOLTÉSOVÁ

Wondershare PDFelement

MATEMATIKA PRE EKONÓMOV

Letra Edu

2020



Už ako **študent** máš príležitosť začať svoju kariéru v **LeitnerLeitner.**

Príď si k nám vyskúšať ako sa dajú využiť Tvoje vedomosti v praxi a už počas štúdia sa u nás môžeš zamestnať. Ponúkame ti flexibilné pracovné príležitosti, napríklad ako:

- **asistent daňového poradcu**, **audítora**
- ako **účtovník** alebo **mzdový účtovník.**

Zaujalo Ťa to? Tak si u nás správne!

Tešíme sa na Tvoj životopis na **bratislava.office@leitnerleitner.com**

www.leitnerleitner.com

LeitnerLeitner
Staromestská 3
811 03 Bratislava
bratislava.office@leitnerleitner.com

Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

Andrea Kaderová, Zuzana Krátka, Ingrid Krčová,
Vladimír Mucha, Tatiana Šoltésová

Matematika pre ekonómov

Vydavateľstvo Letra Edu
2020

Wondershare PDFelement

Autori ©

Mgr. Andrea Kaderová, PhD.
Ing. Mgr. Zuzana Krátka, PhD.
Ing. Mgr. Ingrid Krčová, PhD.
doc. Mgr. Vladimír Mucha, PhD.
doc. Mgr. Tatiana Šoltésová, PhD.

Všetky práva vyhradené.
Toto dielo ani žiadna jeho časť sa nesmie reprodukovať bez súhlasu majiteľov práv.

Recenzovali

Mgr. Martin Šeleng, PhD.
prof. RNDr. Ing. František Peller, PhD.

Jazyková korektúra

Neprešlo jazykovou korektúrou.

Učebnica bola vydaná s podporou spoločností:

Wondershare PDFelement





Schválené v edičnom programe Ekonomickej univerzity v Bratislave na rok 2020 ako učebnica.

Za konečnú verziu publikácie ako aj za odbornú stránku textu, vecnú a legislatívnu správnosť a formálnu úpravu zodpovedajú autori.

Prvé vydanie.

ISBN 978-80-89962-62-4 (print)
ISBN 978-80-89962-63-1 (online)

OBSAH

Predhovor 5

1 Lineárna algebra

1.1 Vektory 7
1.2 Matice 17
1.3 Systémy lineárnych rovníc 40

2 Funkcia jednej reálnej premennej, limita funkcie a jej použitie

2.1 Pojem funkcia 52
2.2 Elementárne funkcie 54
2.3 Operácie s funkciami 64
2.4 Základné funkcie ekonomickej analýzy 74
2.5 Limita funkcie 85
2.6 Spojitosť funkcie 106
2.7 Asymptoty grafu funkcie 113

3 Diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej

3.1 Derivácia funkcie 119
3.2 Vety o derivovaní funkcií 126
3.3 Diferenciál funkcie 138
3.4 Monotónnosť funkcie 144
3.5 Marginálne veličiny. Elasticita funkcie 154
3.6 Vyššie derivácie a diferenciály 161
3.7 L´Hospitalovo pravidlo 166
3.8 Konvexnosť a konkávnosť funkcie. Inflexné body 174
3.9 Extrémy funkcie 185
3.10 Priebeh funkcie 197

4 Funkcia dvoch a viac reálnych premenných

4.1 Funkcia *n* reálnych premenných 208
4.2 Funkcia dvoch reálnych premenných 209
4.3 Funkcie ekonomickej analýzy 225
4.4 Parciálne derivácie funkcie dvoch premenných 229
4.5 Úplný diferenciál funkcie dvoch premenných 240
4.6 Úplný diferenciál a parciálne derivácie v ekonomickej analýze 248
4.7 Lokálne extrémy funkcie dvoch premenných 259
4.8 Viazané lokálne extrémy funkcie dvoch premenných 266

5 Integrálny počet funkcií jednej reálnej premennej

5.1 Neurčitý integrál 274
5.2 Určitý integrál 309
5.3 Nevlastný integrál 326

Literatúra 332

Wondershare
PDFelement

Wondershare
PDFelement

PREDHOVOR

„Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet...“

(*R. Bacon*)

Učebnica *Matematika pre ekonómov* je základná literatúra z matematiky pre študentov všetkých fakúlt a všetkých foriem štúdia, ktoré poskytuje Ekonomická univerzita v Bratislave. Našou snahou bolo vytvoriť vysokoškolskú učebnicu, ktorá svojím obsahom zodpovedá učivu povinného predmetu *Matematika* vyučovanom v 1. ročníku na 1. stupni štúdia na Ekonomickej univerzite v Bratislave. Každé učivo v knihe je doplnené o ekonomické aplikácie, a preto môže byť vhodnou študijnou literatúrou aj na iných vysokých školách ekonomického zamerania.

Súčasná úroveň vedomostí z matematiky študentov prichádzajúcich do prvého ročníka vysokoškolského štúdia je veľmi rôznorodá, a to nielen vzhľadom na rôznu kvalitu a náročnosť stredných škôl, ale aj vzhľadom na druh ukončeného stredoškolského štúdia. Preto sme sa snažili vysvetliť matematické teórie, metódy a postupy čo najzrozumiteľnejšie a v príkladoch postupujeme od jednoduchších ku zložitejším. Na lepšie pochopenie jednotlivých tém sú v učebnici podrobne opísané riešené príklady, z ktorých mnohé sú doplnené o grafické ilustrácie a mnohé sú aplikované aj na ekonomickú problematiku. Každá podkapitola obsahuje neriešené úlohy spolu s výsledkami, ktoré sa nachádzajú na jej konci. Inšpiráciu k tvorbe riešených a neriešených príkladov v tejto učebnici sme čerpali z vlastných dlhoročných skúseností z výučby matematiky na Ekonomickej univerzite v Bratislave a tiež z mnohých učebníc uvedených v zozname literatúry.

Učebnica sa skladá z piatich kapitol a každá kapitola obsahuje niekoľko podkapitol. Prvá kapitola s názvom *Lineárna algebra* sa zaoberá základnými pojmami a metódami lineárnej algebry, ktoré zasahujú do mnohých oblastí modernej matematiky a jej aplikácií v prírodných a aj v spoločenských vedách. Prvá podkapitola je zameraná na vektory a na systémy vektorov. Druhá podkapitola je venovaná maticiam, ďalšej dôležitej matematickej štruktúre používanej pri formulovaní a riešení mnohých ekonomických problémov. Pri modelovaní ekonomických procesov a v rôznych optimalizačných úlohách sa používajú systémy lineárnych rovníc, ktorým sa venujeme v závere kapitoly.

Druhá kapitola *Funkcia jednej reálnej premennej, limita funkcie a jej použitie* nadväzuje na stredoškolské učivo. Úvod tejto kapitoly je zopakovaním stredoškolského učiva, je tu prehľad elementárnych funkcií, zavedený je pojem zloženej funkcie a sú tu opísané základne transformácie funkcie. V ďalších podkapitolách sa venujeme pojmom limita funkcie a spojitosť funkcie, ktoré sú nevyhnutné k tomu, aby sme nadviazali na diferenciálny počet funkcie jednej premennej. Celá táto kapitola je veľmi dôležitá na pochopenie matematickej teórie v ďalších kapitolách tejto učebnice. Keďže budeme v príkladoch v ďalších kapitolách využívať aj ekonomické aplikácie, uvedieme a opíšeme aj funkcie ekonomickej analýzy.

Tretia kapitola *Diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej* sa venuje dôležitému pojmu matematickej analýzy - derivácia funkcie. Diferenciálny počet funkcie jednej premennej, jeho ekonomický význam v podobe marginálnej analýzy, výpočtu elasticity funkcie, či pri riešení optimalizačných úloh, ho predurčuje na využitie aj v iných predmetoch ekonomického zamerania.

Štvrtá kapitola *Funkcia dvoch a viac reálnych premenných* je venovaná hlavne funkcii dvoch premenných a využíva myšlienku analógie princípov definovaných pri funkcii jednej reálnej premennej. V kapitole sa opäť v prevažnej miere venujeme ekonomickým aplikáciám, a to marginálnej analýze, parciálnej elasticite a optimalizačným úlohám, ktoré sa zaoberajú hľadaním lokálnych a viazaných extrémov funkcie dvoch premenných.

Posledná, piata kapitola, je venovaná opäť funkcii jednej reálnej premennej. *Integrálny počet funkcie jednej premennej* je spolu s diferenciálnym počtom súčasťou tzv. infinitezimálneho počtu. Kapitola ponúka možnosti riešenia neurčitých, určitých i nevlastných integrálov. Aj v tejto kapitole je aparát integrálneho počtu implementovaný do riešenia úloh mikroekonomickej analýzy.

Našou snahou bolo vytvoriť učebnicu s dôrazom na využiteľnosť získaných vedomostí a zručností z matematiky na riešenie problémov v ekonomickej praxi.

Za mnohé cenné návrhy, pripomienky a za starostlivo a zodpovedne vykonanú recenziu tejto učebnice chceme poďakovať prof. RNDr. Ing. Františkovi Pellerovi, PhD a Mgr. Martinovi Šelengovi, PhD.

Bratislava august 2020

Autori

1 LINEÁRNA ALGEBRA

Lineárna algebra je oblasť matematiky zaoberajúca sa predovšetkým štúdiom vektorov, vektorových priestorov a tzv. lineárnych zobrazení, ktoré bývajú často reprezentované maticami.

Základné pojmy a metódy lineárnej algebry zasahujú do takmer všetkých oblastí modernej matematiky a jej aplikácií v prírodných aj v spoločenských vedách. Uplatňujú sa predovšetkým v informatike, fyzike, technike, štatistike, ekonómii a v sociálnych vedách. Mnohé nelineárne matematické modely bývajú aproximované pomocou lineárnych, a teda lineárna algebra je veľmi užitočná aj pri približnom riešení problémov, ktoré je komplikované riešiť presne.

1.1 Vektory

Vektory je možné definovať viacerými spôsobmi, a to predovšetkým v závislosti od oblasti ich využitia.[1] V lineárnej algebre sa na vektory často pozeráme ako na usporiadané n-tice reálnych čísel. Takto vyjadrené vektory sa nazývajú aj ***aritmetické vektory***.

Poznámka 1.1.1 Aritmetické vektory budeme zapisovať malými písmenami a vodorovnou čiarou nad nimi (napr. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{u}$, $\overline{v}$). Prívlastok „aritmetický“ budeme zvyčajne vynechávať.

Definícia 1.1.1 Nech $n \in N,\ a_i \in R,\ i = 1,2,...,n$. Potom usporiadaná n-tica reálnych čísel $a_1, a_2, ..., a_n$ sa nazýva ***n-zložkový (aritmetický) vektor***. Čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ sa nazývajú ***zložkami*** daného n-zložkového vektora $\overline{a}$.
Zapisujeme $\overline{a} = (a_1; a_2; ...; a_n)$. Ak zložky vektora nie sú v tvare desatinných čísel, tak sa používa aj zápis $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Poznámka 1.1.2 Zložky vektora $\overline{a}$ môžeme zapísať do riadka, vtedy hovoríme o riadkovom vektore $\overline{a}$. Keď ich zapíšeme do stĺpca, hovoríme o stĺpcovom vektore $\overline{a}$.

Príklad 1.1.1 Napíšte ľubovoľné dva štvorzložkové riadkové vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$.
Riešenie. Jedným z nekonečného množstva riešení je $\overline{a} = (4; -4; 0; 2)$, $\overline{b} = (0{,}1; 2; \sqrt{2}; -2{,}6)$.

Príklad 1.1.2 Napíšte ľubovoľné štyri trojzložkové stĺpcové vektory $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$.

Riešenie. Riešením je napríklad $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ -0{,}2 \\ -4{,}2 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_4 = \begin{pmatrix} 10^9 \\ 0{,}1 \\ -10 \end{pmatrix}$.

---

[1] **Vektory** v rovine či v priestore si zvyčajne predstavujeme ako **orientované úsečky**, t. j. úsečky, ktorých jeden krajný bod považujeme za počiatočný a druhý za koncový – ten je označený šípkou. Pritom dve rovnako dlhé, rovnobežné a súhlasne orientované úsečky predstavujú ten istý vektor – hovoríme, že sú umiestneniami toho istého vektora. Ak si teda zvolíme nejaký pevný bod O, tak všetky vektory v rovine či priestore môžeme jednoznačne reprezentovať ako orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$ s počiatkom v O, pričom ich koncom môže byť ľubovoľný bod A roviny či priestoru, bod O nevynímajúc – orientovaná úsečka $\overrightarrow{OO}$ totiž predstavuje tzv. nulový vektor. (Zlatoš, 2011)

Poznámka 1.1.3 Množinu všetkých n-zložkových aritmetických vektorov (t.j. množinu všetkých usporiadaných *n*-tíc reálnych čísel) budeme označovať R^n.

Príklad 1.1.3 Napíšte riadkové vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, pre ktoré platí $\overline{a} \in R^4$, $\overline{b} \in R^5$.

Riešenie. Jedno z nekonečného množstva riešení predstavujú vektory $\overline{a} = (40;0;-10;40)$, $\overline{b} = (0,4;\ 2;\sqrt{2};0;-2,6)$. Štvorzložkový vektor $\overline{a}$ je prvkom množiny R^4, čo môžeme symbolicky zapísať $\overline{a} \in R^4$. Päťzložkový vektor $\overline{b}$ je prvkom množiny R^5, čo zapíšeme $\overline{b} \in R^5$.

Poznámka 1.1.4 ***V ekonomických aplikáciách*** sa pojem aritmetického vektora používa na interpretáciu usporiadanej *n*-tice istých kvantitatívnych hodnôt ekonomických veličín.

Príklad 1.1.4 Firma vyrába tri druhy výrobkov V_1, V_2, V_3 s mesačnou produkciou 200 kusov výrobku V_1 pri jednotkovej cene 50 eur, 300 kusov výrobku V_2 pri jednotkovej cene 40 eur, 100 kusov výrobku V_3 pri jednotkovej cene 80 eur. Zapíšte uvedené údaje pomocou aritmetických vektorov.

Riešenie. Keďže firma vyrába tri druhy výrobkov, vytvoríme trojzložkové vektory reprezentujúce jednotkové ceny a množstvá mesačnej produkcie jednotlivých druhov výrobkov. Vektor $\overline{\mathbf{c}} = (50,40,80)$ je ***cenový vektor***, ktorého zložky v uvedenom poradí vyjadrujú ceny výrobkov V_1, V_2, V_3. Vektor $\overline{\mathbf{v}} = (200,300,100)$ je ***výrobný vektor***, ktorého zložky v uvedenom poradí vyjadrujú úroveň mesačnej produkcie jednotlivých výrobkov V_1, V_2, V_3.

Operácie s aritmetickými vektormi

K základným operáciám s aritmetickými vektormi patria:

- súčet vektorov,
- násobenie vektora reálnym číslom (hovoríme aj o násobení vektora skalárom[2]),
- skalárny súčin vektorov.

Definícia 1.1.2 Nech $n \in N$, $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$, $\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in R^n$. Potom ***súčet vektorov*** $\overline{a}$, $\overline{b}$ je vektor $\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \in R^n$. Zapisujeme $\overline{a} + \overline{b}$.

Poznámka 1.1.5 Súčet vektorov je definovaný len vtedy, ak majú sčítavané vektory rovnaký počet zložiek. Výsledkom tejto operácie je opäť vektor s rovnakým počtom zložiek.

Príklad 1.1.5 Dané sú vektory $\overline{a} = (1,0,2,-1) \in R^4$, $\overline{b} = (0,2,-1,1) \in R^4$, $\overline{c} = (1,0,2,-1,0) \in R^5$. Vypočítajte súčet vektorov $\overline{a} + \overline{b}$ a súčet vektorov $\overline{b} + \overline{c}$.

Riešenie. $\overline{a} + \overline{b} = (1,0,2,-1) + (0,2,-1,1) = (1+0, 0+2, 2+(-1), -1+1) = (1,2,1,0)$

Súčet $\overline{b} + \overline{c}$ nie je definovaný, lebo vektory $\overline{b}$, $\overline{c}$ nemajú rovnaký počet zložiek.

---

[2] **Skalár** (z lat. scale – stupnica, mierka) je veličina, ktorej hodnota je v daných jednotkách úplne určená jediným číselným údajom. V matematike sa pojmom skalár zvyčajne označuje **číslo** (reálne alebo komplexné).

Neskalárny charakter majú napríklad vektory, matice alebo polia v informatike, ktoré sú určené viacerými číselnými hodnotami.

Definícia 1.1.3 Nech $n \in N,\ c \in R, \bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$. Vektor $c \cdot \bar{a} = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$ sa nazýva súčinom skalára (reálneho čísla) c a vektora $\bar{a}$. Vektor $c \cdot \bar{a}$ sa nazýva aj *c-násobkom vektora* $\bar{a}$. Zapisujeme $c \cdot \bar{a}$. Často sa symbol súčinu „$\cdot$“ vynecháva a používa sa zápis $c\bar{a}$.

Poznámka 1.1.6 ***Násobenie vektora skalárom*** (t.j. násobenie vektora reálnym číslom) je definované „po zložkách“, teda daným reálnym číslom sa vynásobí každá zložka vektora. Výsledkom tejto operácie je vektor s rovnakým počtom zložiek ako pôvodný vektor.

Príklad 1.1.6 Zapíšte vektory $5\bar{a}$, $-\frac{1}{2}\bar{b}$, ak $\bar{a} = (10,-1) \in R^2,\ \bar{b} = (0,2,-1) \in R^3$.

Riešenie. $5\bar{a} = 5 \cdot (10,-1) = (5 \cdot 10,\ 5 \cdot (-1)) = (50,-5)$

$$-\frac{1}{2}\bar{b} = -\frac{1}{2} \cdot (0,2,-1) = (0;-1;\ 0,5)$$

Definícia 1.1.4 Nech $n \in N,\ \bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n,\ \bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in R^n$. ***Skalárny súčin vektorov*** $\bar{a}, \bar{b}$ je reálne číslo $\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$. Zapisujeme $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Poznámka 1.1.7 Skalárny súčin vektorov je definovaný len vtedy, ak majú skalárne násobené vektory rovnaký počet zložiek. Výsledkom tejto operácie nie je vektor, ale reálne číslo.

Príklad 1.1.7 Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\bar{a} \cdot \bar{b}$, $\bar{c} \cdot \bar{b}$, ak $\bar{a} = (10,-1,0,1) \in R^4$, $\bar{b} = (0,2,-1,5) \in R^4,\ \bar{c} = (1,0,2,-1,0) \in R^5$.

Riešenie. $\bar{a} \cdot \bar{b} = (10,-1,0,1) \cdot (0,2,-1,5) = 10 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = 3$

Skalárny súčin $\bar{c} \cdot \bar{b}$ neexistuje, lebo vektory $\bar{b}, \bar{c}$ nemajú rovnaký počet zložiek.

Príklad 1.1.8 Firma vyrába tri druhy výrobkov V_1 , V_2 , V_3 s mesačnou produkciou 200 kusov výrobku V_1 pri jednotkovej cene 50 eur, 300 kusov výrobku V_2 pri jednotkovej cene 40 eur, 100 kusov výrobku V_3 pri jednotkovej cene 80 eur. Pomocou vektorovej algebry vypočítajte celkový príjem z produkcie za predpokladu, že sa predajú všetky výrobky.

Riešenie. Celkový príjem vypočítame ako skalárny súčin cenového vektora $\bar{c} = (50,40,80)$ a výrobného vektora $\bar{v} = (200,300,100)$ z príkladu 1.1.4.

$\bar{c} \cdot \bar{v} = (50,40,80) \cdot (200,300,100) = 50 \cdot 200 + 40 \cdot 300 + 80 \cdot 100 = 30\,000$

Celkový príjem firmy je za daných podmienok 30 000 eur.

K ďalším dôležitým pojmom lineárnej algebry patria:

- nulový vektor,
- jednotkový vektor,
- opačný vektor,
- rovnosť vektorov,
- lineárna kombinácia vektorov,
- lineárna závislosť resp. lineárna nezávislosť vektorov.

Definícia 1.1.5 Nech $n \in N$. Vektor $\bar{o} = (0,0,...,0) \in R^n$ sa nazýva ***nulový (n-zložkový) vektor***. Nulový vektor je teda vektor, ktorý má všetky zložky rovné nule.

Poznámka 1.1.8 Pre každý vektor $\bar{a} \in R^n$ a nulový vektor $\bar{o} \in R^n$ platí $\bar{a} + \bar{o} = \bar{o} + \bar{a} = \bar{a}$.

Definícia 1.1.6 Nech $n \in N$. Vektor $\bar{e}_k \in R^n$ sa nazýva ***jednotkový (n-zložkový) vektor***, ak je jeho k-tá zložka 1 a ostatné zložky sú 0.

Definícia 1.1.7 Nech $n \in N$, $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$. Vektor $-\bar{a} = (-a_1, -a_2, ..., -a_n) \in R^n$ sa nazýva ***opačný vektor*** k vektoru $\bar{a}$.

Poznámka 1.1.9 Pre každý vektor $\bar{a} \in R^n$ platí $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}$.

Poznámka 1.1.10 Pre vektory $\bar{a}, \bar{b} \in R^n$ budeme často používať namiesto $\bar{a} + (-\bar{b})$ skrátený zápis

$$\bar{a} - \bar{b}$$

Definícia 1.1.8 Nech $n \in N$, $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$, $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in R^n$. ***Rovnosť vektorov*** $\bar{a}$, $\bar{b}$ nastáva, ak pre každé $i = 1,2,...,n$ platí $a_i = b_i$. Zapisujeme $\bar{a} = \bar{b}$.

Poznámka 1.1.11 ***Vektory sa rovnajú*** vtedy, ak majú rovnaký počet zložiek a ak sa rovnajú všetky navzájom zodpovedajúce zložky.

Príklad 1.1.9 Určte, ktoré z nasledujúcich vektorov sa rovnajú: $\bar{a} = (10,-1,0,1) \in R^4$, $\bar{b} = (2 \cdot 5, 1-2, 0 \cdot 1, 1) \in R^4$, $\bar{c} = (10,-1,0,1,0) \in R^5$.

Riešenie. Keďže vektor $\bar{c}$ je päťzložkový a vektory $\bar{a}, \bar{b}$ sú štvorzložkové, platí $\bar{a} \neq \bar{c}$, $\bar{b} \neq \bar{c}$. Keď vypočítame jednotlivé zložky vektora $\bar{b}$, dostaneme $\bar{b} = (2 \cdot 5, 1-2, 0 \cdot 1, 1) = (10,-1,0,1)$ a teda $\bar{a} = \bar{b}$.

Definícia 1.1.9 Nech $m, n \in N$ a nech vektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m \in R^n$. Vektor $\bar{b}$ nazveme ***lineárnou kombináciou vektorov*** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m$, ak existujú reálne čísla $k_1, k_2, ..., k_m$ také, že platí

$$\bar{b} = k_1 \cdot \bar{a}_1 + k_2 \cdot \bar{a}_2 + ... + k_m \cdot \bar{a}_m = \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \bar{a}_i$$

. Zapisujeme $\bar{b} = LK(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m)$.

Reálne čísla $k_1, k_2, ..., k_m$ sa nazývajú ***koeficienty lineárnej kombinácie***.
Lineárna kombinácia vektorov, v ktorej sú všetky koeficienty rovné nule, sa nazýva ***triviálna***.

Poznámka 1.1.12 Nulový vektor $\bar{o}$ je triviálnou lineárnou kombináciou ľubovoľnej skupiny vektorov $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$, lebo platí $\bar{o} = 0 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + ... + 0 \cdot \bar{a}_k$.

Príklad 1.1.10 Určte vektor $\bar{a} \in R^3$ ako lineárnu kombináciu jednotkových trojzložkových vektorov tak, aby platilo $\bar{a} = 10 \cdot \bar{e}_1 + 4 \cdot \bar{e}_2 + (-2) \cdot \bar{e}_3$.

Riešenie.
$\bar{a} = 10 \cdot (1,0,0) + 4 \cdot (0,1,0) + (-2) \cdot (0,0,1) = (10,0,0) + (0,4,0) + (0,0,-2) = (10,4,-2)$

Príklad 1.1.11 Je vektor $\overline{w}=(2,-2,0)\in R^3$ lineárnou kombináciou vektorov $\overline{u}=(1,-1,1)\in R^3$, $\overline{v}=(4,-4,2)\in R^3$? Ak áno, tak túto lineárnu kombináciu napíšte.

Riešenie. Budeme vychádzať z definície 1.1.8 lineárnej kombinácie vektorov, a teda budeme hľadať reálne čísla k_1, k_2 také, aby platilo

$$\overline{w}=k_1\cdot\overline{u}+k_2\cdot\overline{v}$$

Keď vektory $\overline{w},\overline{u},\overline{v}$ vyjadríme v tvare usporiadaných trojíc reálnych čísel, dostaneme

$$(2,-2,0)=k_1\cdot(1,-1,1)+k_2\cdot(4,-4,2)$$

Po uskutočnení operácií s vektormi na pravej strane rovnice (súčet k_1-násobku vektora $\overline{u}$ a k_2-násobku vektora $\overline{v}$) dostávame vzťah

$$(2,-2,0)=(k_1+4k_2,\ -k_1-4k_2,\ k_1+2k_2)$$

Z definície 1.1.7 rovnosti vektorov vyplýva, že tieto dva vektory sa rovnajú, ak sa rovnajú ich jednotlivé zložky, a teda ak platí

$$2=k_1+4k_2;\quad -2=-k_1-4k_2;\quad 0=k_1+2k_2$$

Uvedená sústava rovníc má riešenie $k_1=-2,\ k_2=1$. Z toho vyplýva, že vektor $\overline{w}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$, konkrétne $\overline{w}=-2\cdot\overline{u}+1\cdot\overline{v}$.

Príklad 1.1.12 Firma vyrába dva druhy výrobkov V_1, V_2 zo surovín S_1, S_2. Na výrobu jedného výrobku V_1 používa 10 jednotiek suroviny S_1 a 5 jednotiek suroviny S_2. Na výrobu jedného výrobku V_2 používa 2 jednotky suroviny S_1 a 4 jednotky suroviny S_2. Firma má od dodávateľov v danom roku k dispozícii 660 jednotiek suroviny S_1 a 570 jednotiek suroviny S_2. Určte pomocou vektorovej algebry, či možno nájsť také počty k_1, k_2 výrobkov V_1, V_2, aby sa spotrebovali všetky dodané suroviny S_1, S_2.

Riešenie. Spotrebu surovín S_1, S_2 na výrobu jedného výrobku V_1 vyjadríme pomocou dvojzložkového vektora $\overline{s}_1=(10,5)$. Spotrebu surovín S_1, S_2 na výrobu jedného výrobku V_2 vyjadríme pomocou dvojzložkového vektora $\overline{s}_2=(2,4)$. Celkovú spotrebu surovín S_1, S_2 na výrobu všetkých výrobkov V_1, V_2 vyjadríme pomocou vektora

$$\overline{s}=k_1\cdot\overline{s}_1+k_2\cdot\overline{s}_2$$

kde k_1 je počet vyrobených výrobkov V_1 a k_2 je počet vyrobených výrobkov V_2.

Keďže sa majú spotrebovať všetky dodané suroviny S_1, S_2, tak musí súčasne platiť

$$\overline{s}=(660,570)$$

Z uvedených dvoch vyjadrení vektora $\overline{s}$ dostávame

$$(660,570)=k_1\cdot\overline{s}_1+k_2\cdot\overline{s}_2$$

$$(660,570)=k_1\cdot(10,5)+k_2\cdot(2,4)$$

$$(660,570)=(k_1\cdot 10+k_2\cdot 2,\ k_1\cdot 5+k_2\cdot 4)$$

Dva vektory sa rovnajú, ak sa rovnajú ich jednotlivé zložky, a teda ak platí

$$660=10k_1+2k_2$$

$$570=5k_1+4k_2$$

Uvedená sústava rovníc má riešenie $k_1=50,\ k_2=80$. To znamená, že ak chce firma spotrebovať všetky dodané suroviny S_1, S_2, tak musí vyrobiť 50 výrobkov V_1 a 80 výrobkov V_2.

Definícia 1.1.10 Nech $m,n \in N$. Vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m \in R^n$ sa nazývajú ***lineárne závislé***, ak existuje ich netriviálna lineárna kombinácia rovnajúca sa nulovému vektoru, t.j. ak existujú reálne čísla $k_1, k_2, ..., k_m$ také, že aspoň jedno z nich je rôzne od nuly a platí $k_1 \cdot \overline{a}_1 + k_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + k_m \cdot \overline{a}_m = \overline{o}$.

Vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m \in R^n$ sa nazývajú ***lineárne nezávislé***, ak nie sú lineárne závislé, t.j. ak neexistuje ich netriviálna lineárna kombinácia rovnajúca sa nulovému vektoru.

Poznámka 1.1.13 Vektory sú lineárne nezávislé, ak sa nulovému vektoru rovná len ich triviálna lineárna kombinácia.

Poznámka 1.1.14 O lineárnej závislosti či nezávislosti vektorov sa dá rozhodnúť aj na základe výpočtu hodnosti matice, ktorej riadky tvoria dané vektory. Tento postup riešenia si vysvetlíme v podkapitole 1.2 Matice.

Poznámka 1.1.15 Ak chceme rozhodnúť o lineárnej závislosti resp. lineárnej nezávislosti jedného vektora ($m = 1$), tak z definície 1.1.9 dostaneme $k_1 \cdot \overline{a}_1 = \overline{o}$. Ak má platiť táto rovnosť a súčasne $k_1 \neq 0$, potom vektor $\overline{a}_1$ musí byť nulový. To znamená, že jeden vektor je lineárne závislý práve vtedy, keď je nulový.

Príklad 1.1.13 Určte, či sú vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3 \in R^3$ lineárne závislé alebo lineárne nezávislé, ak $\overline{a}_1 = (1,0,-1)$, $\overline{a}_2 = (-1,1,2)$, $\overline{a}_3 = (3,-1,0)$.

Riešenie. Budeme vychádzať z definície 1.1.10 a budeme sa snažiť zistiť, či existuje netriviálna lineárna kombinácia vektorov $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ rovnajúca sa nulovému vektoru.

$$k_1 \cdot \overline{a}_1 + k_2 \cdot \overline{a}_2 + k_3 \cdot \overline{a}_3 = \overline{o}$$

$$k_1 \cdot (1,0,-1) + k_2 \cdot (-1,1,2) + k_3 \cdot (3,-1,0) = (0,0,0)$$

$$(k_1 - k_2 + 3k_3,\ k_2 - k_3,\ -k_1 + 2k_2) = (0,0,0)$$

Podľa definície 1.1.8 sa vektory rovnajú, ak sa rovnajú ich jednotlivé zložky, a teda má platiť

$$k_1 - k_2 + 3k_3 = 0$$

$$k_2 - k_3 = 0$$

$$-k_1 + 2k_2 = 0$$

Uvedená sústava rovníc má len jedno riešenie, a to $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, a teda vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ sú lineárne nezávislé.

Veta 1.1.1 (*Nutná a postačujúca podmienka lineárnej závislosti vektorov*) Nech $m,n \in N$. Vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m \in R^n$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď aspoň jeden z nich je lineárnou kombináciou ostatných vektorov.

Poznámka 1.1.16 Každá skupina vektorov, ktorá obsahuje nulový vektor, je lineárne závislá, keďže nulový vektor je triviálnou lineárnou kombináciou ostatných vektorov.

Poznámka 1.1.17 Dva vektory sú lineárne závislé práve vtedy, ak jeden z nich je reálnym násobkom druhého.

Príklad 1.1.14 Rozhodnite, či sú vektory $\overline{w}=(2,-2,0)$, $\overline{u}=(1,-1,1)$, $\overline{v}=(4,-4,2)\in R^3$ lineárne závislé.

Riešenie. V príklade 1.1.11 sme dokázali, že vektor $\overline{w}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$, konkrétne $\overline{w}=-2\cdot\overline{u}+1\cdot\overline{v}$. Podľa vety 1.1.1 sú teda vektory $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$ lineárne závislé.

Príklad 1.1.15 Určte, či sú vektory $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4\in R^4$ lineárne závislé alebo lineárne nezávislé, ak $\overline{a}_1=(1,0,-2,1)$, $\overline{a}_2=(2,-1,1,2)$, $\overline{a}_3=(4,0,-8,4)$, $\overline{a}_4=(2,0,-4,4)$.

Riešenie. Úlohu je možné riešiť viacerými spôsobmi. My budeme pri jej riešení vychádzať z vety 1.1.1. Budeme sa snažiť jeden z vektorov $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4$ vyjadriť ako lineárnu kombináciu zostávajúcich troch vektorov. Keď sa pozrieme na zložky vektorov $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4$ vidíme, že platí $\overline{a}_3=4\cdot\overline{a}_1$. Z toho vyplýva, že platí aj $\overline{a}_3=4\cdot\overline{a}_1+0\cdot\overline{a}_2+0\cdot\overline{a}_4$, t.j. $\overline{a}_3=LK(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_4)$, a teda podľa vety 1.1.1 sú vektory $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4$ lineárne závislé.

Definícia 1.1.11 Nech $m,n\in N$. ***Systém vektorov*** $A=\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_m\}\subset R^n$ je konečná množina vektorov.

Definícia 1.1.12 Nech $m,n\in N$. Maximálny počet lineárne nezávislých vektorov systému $A=\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_m\}\subset R^n$ sa nazýva ***hodnosť systému vektorov*** A.
Zapisujeme $h(A)$ alebo $h(\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_m)$.

Poznámka 1.1.18 Platí $0\le h(\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_m)\le\min(m,n)$.

Príklad 1.1.16 Zapíšte systém vektorov zložený z vektorov $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\in R^3$ z príkladu 1.1.13 a určte jeho hodnosť.

Riešenie. Vektory $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\in R^3$, $\overline{a}_1=(1,0,-1)$, $\overline{a}_2=(-1,1,2)$, $\overline{a}_3=(3,-1,0)$ tvoria systém vektorov $A=\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\}\subset R^3$. Podľa poznámky 1.1.18 pre hodnosť systému vektorov A platí $0\le h(A)\le 3$, keďže $m=3,n=3$, a teda $\min(m,n)=3$. V príklade 1.1.13 sme dokázali, že vektory $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3$ sú lineárne nezávislé, takže maximálny počet lineárne nezávislých vektorov systému $A=\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\}$ je 3. Z definície 1.1.12 dostávame, že hodnosť systému vektorov A sa rovná 3, čo zapíšeme $h(A)=3$.

Príklad 1.1.17 Určte hodnosť systému vektorov $V=\{\overline{v}_1=(1;0),\overline{v}_2=(0;1),\overline{v}_3=(1;2)\}$.

Riešenie. Vektory $\overline{v}_1,\overline{v}_2$ sú lineárne nezávislé, keďže ani jeden z týchto vektorov nevieme zapísať ako násobok druhého. Keď budeme skúmať lineárnu nezávislosť resp. závislosť celého systému vektorov V (t.j. všetkých troch vektorov $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3$) zistíme, že sú lineárne závislé, lebo $\overline{v}_3=LK(\overline{v}_1,\overline{v}_2)$, konkrétne $\overline{v}_3=1\cdot\overline{v}_1+2\cdot\overline{v}_2$. Maximálny počet lineárne nezávislých vektorov systému V je teda 2. Z toho vyplýva, že aj hodnosť systému vektorov V sa rovná 2, čo zapíšeme $h(V)=2$.

Definícia 1.1.13 ***Ekvivalentnou úpravou systému vektorov*** nazývame každú z nasledujúcich úprav systému vektorov:

(1) výmena poradia vektorov,

(2) vynásobenie ľubovoľného vektora nenulovým reálnym číslom,

(3) pripočítanie lineárnej kombinácie ostatných vektorov k ľubovoľnému vektoru systému,

(4) vynechanie takého vektora zo systému, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných vektorov,

(5) pridanie takého vektora k systému, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných vektorov.

Definícia 1.1.14 Dva systémy vektorov $A=\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_k\}\subset R^n$, $B=\{\overline{b}_1,\overline{b}_2,...,\overline{b}_l\}\subset R^n$ sa nazývajú ***ekvivalentné systémy vektorov***, ak sa jeden z nich dá upraviť na druhý pomocou ekvivalentných úprav systému vektorov.

Zapisujeme $A\sim B$ alebo $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_k\}\sim\{\overline{b}_1,\overline{b}_2,...,\overline{b}_l\}$.

Veta 1.1.2 Nech $A=\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_k\}\subset R^n$, $B=\{\overline{b}_1,\overline{b}_2,...,\overline{b}_l\}\subset R^n$ sú ekvivalentné systémy vektorov. Potom platí $h(A)=h(B)$.

Poznámka 1.1.19 Hodnosť systému vektorov môžeme určiť tak, že ho upravíme pomocou ekvivalentných úprav na systém vektorov s ním ekvivalentný, o ktorom vieme rozhodnúť, akú má hodnosť.

Príklad 1.1.18 Využitím ekvivalentných úprav systému vektorov $A=\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4\}\subset R^3$, $\overline{a}_1=(0,1,1)$, $\overline{a}_2=(1,2,4)$, $\overline{a}_3=(1,1,3)$, $\overline{a}_4=(0,-4,-4)$ určte jeho hodnosť.

Riešenie. Hľadáme maximálny počet lineárne nezávislých vektorov systému A jeho úpravou na ekvivalentný systém vektorov, o ktorom budeme vedieť rozhodnúť, akú má hodnosť.

Vektor $\overline{a}_4$ je lineárnou kombináciou ostatných vektorov systému A, platí

$$\overline{a}_4=-4\cdot\overline{a}_1+0\cdot\overline{a}_2+0\cdot\overline{a}_3.$$

Použitím ekvivalentnej úpravy (4), vynechaním vektora $\overline{a}_4$ zo systému vektorov A, dostávame nový systém vektorov $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\}$ ekvivalentný s A.

Vektor $\overline{a}_3$ je lineárnou kombináciou ostatných vektorov systému $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\}$, platí

$$\overline{a}_3=1\cdot\overline{a}_2+(-1)\cdot\overline{a}_1$$

a teda môžeme aj vektor $\overline{a}_3$ zo systému vektorov vynechať a platí

$$\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4\}\sim\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\}\sim\{\overline{a}_1,\overline{a}_2\}.$$

Vektory $\overline{a}_1,\overline{a}_2$ sú lineárne nezávislé, keďže ani jeden z týchto vektorov nevieme zapísať ako násobok druhého. Maximálny počet lineárne nezávislých vektorov systému $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2\}$ je teda 2 a podľa definície 1.1.12 platí $h(\overline{a}_1,\overline{a}_2)=2$. Pomocou ekvivalentných úprav sme našli systém vektorov $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2\}$ ekvivalentný so systémom A, ktorý má hodnosť 2, a teda platí $h(A)=2$.

ÚLOHY

1.1.1 Máme dané vektory $\bar{a}, \bar{b} \in R^3$, $\bar{a} = (4;-1;0)$, $\bar{b} = (-3;2;-1)$. Vypočítajte:

a) súčet vektorov $\bar{a}, \bar{b}$

b) súčet vektorov $\bar{a}, -\bar{b}$

c) 5-násobok vektora $\bar{a}$

d) -2-násobok vektora $\bar{b}$

e) súčin vektora $\bar{a}$ a čísla $-0,25$

f) vektor $\bar{c} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$

g) vektor $\bar{d} = -2\bar{a} - 10\bar{b}$

h) vektor $\bar{e} = \frac{1}{4}\bar{a} - \frac{3}{4}\bar{b}$

1.1.2 Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\bar{a}, \bar{b}$.

a) $\bar{a} = (2;1;-5;6)$, $\bar{b} = (-1;1;0;2)$

b) $\bar{a} = (1;3)$, $\bar{b} = (1;3;0)$

c) $\bar{a} = (1;3)$, $\bar{b} = (1,3;0)$

d) $\bar{a} = (2;3;0)$, $\bar{b} = (3;-2;0)$

e) $\bar{a} = (2;3;0)$, $\bar{b} = (3;2;1)$

f) $\bar{a} = (3;-2;0)$, $\bar{b} = (3;2;1)$

1.1.3 Určte, pre ktoré dvojice vektorov $\bar{a}, \bar{b}$ platí rovnosť.

a) $\bar{a} = (1;3)$, $\bar{b} = (1;3;0)$

b) $\bar{a} = (4;1;-2)$, $\bar{b} = (-4\cdot(-1);\ 8-9;\ -2)$

c) $\bar{a} = (-5;\ 6;\ 0,75)$, $\bar{b} = \left(-5;\ \frac{2}{3} + \frac{16}{3};\ \frac{3}{4}\right)$

d) $\bar{a} = (0,25;\ 0,3;\ 0,5)$, $\bar{b} = \left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{10};\ \frac{1}{2}\right)$

Wondershare PDFelement

1.1.4 Určte, pre ktoré reálne čísla r_1, r_2, r_3 platí rovnosť vektorov $\bar{a}, \bar{b} \in R^3$.

a) $\bar{a} = (5r_1 - 2;\ 2r_2 + 6;\ 10 - r_3)$, $\bar{b} = (r_1 + 2;\ r_2 - 1;\ r_3 + 2)$

b) $\bar{a} = (2r_1 - 2;\ 4 - r_2;\ r_1 + r_3)$, $\bar{b} = (2;\ r_2;\ 2 + r_3)$

c) $\bar{a} = (2r_1;\ 4 - r_2;\ r_1 + r_3)$, $\bar{b} = (10;\ r_2;\ 2 + r_3)$

1.1.5 Napíšte vektor $\bar{x}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\bar{a}_1, \bar{a}_2$.

a) $\bar{a}_1 = (2;-1)$, $\bar{a}_2 = (4;2)$, koeficienty lineárnej kombinácie sú $r_1 = 2$, $r_2 = 0,5$

b) $\bar{a}_1 = (3;-1;2)$, $\bar{a}_2 = (-2;10;1)$, koeficienty lineárnej kombinácie sú $r_1 = 3$, $r_2 = -2$

c) $\bar{a}_1 = (1;0;0)$, $\bar{a}_2 = (0;1;0)$, koeficienty lineárnej kombinácie sú $r_1 = -\frac{2}{3}$, $r_2 = \frac{1}{3}$

1.1.6 Je vektor $\bar{b} \in R^2$ lineárnou kombináciou vektorov $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in R^2$? Ak áno, tak túto lineárnu kombináciu napíšte.

a) $\bar{b} = (1,2)$, $\bar{a}_1 = (1,1)$, $\bar{a}_2 = (2,3)$

b) $\bar{b} = (2,3)$, $\bar{a}_1 = (2,-1)$, $\bar{a}_2 = (4,2)$

c) $\bar{b} = (1,3)$, $\bar{a}_1 = (2,-1)$, $\bar{a}_2 = (4,2)$

d) $\bar{b} = (1,2)$, $\bar{a}_1 = (2,1)$, $\bar{a}_2 = (2,3)$

e) $\bar{b} = (4,2)$, $\bar{a}_1 = (2,0)$, $\bar{a}_2 = (-1,0)$

1.1.7 Zistite, či sú dané vektory lineárne závislé alebo lineárne nezávislé. Ak sú lineárne závislé, vyjadrite jeden z nich ako lineárnu kombináciu ostatných.

a) $\overline{a} = (1;0),\ \overline{b} = (1;1)$

b) $\overline{a} = (2;-1),\ \overline{b} = (4;-2)$

c) $\overline{a}_1 = (2;-1),\ \overline{a}_2 = (4;2)$

d) $\overline{a}_1 = (2;-3),\ \overline{a}_2 = (4;-6)$

e) $\overline{a}_1 = (2;-1),\ \overline{a}_2 = (3;0),\ \overline{a}_3 = (1;1)$

f) $\overline{a}_1 = (1;0;0),\ \overline{a}_2 = (0;1;0),\ \overline{a}_3 = (0;0;1)$

g) $\overline{a}_1 = (1;0;0),\ \overline{a}_2 = (0;1;0),\ \overline{a}_3 = (0;0;1),\ \overline{a}_4 = (10;0;-2)$

h) $\overline{a} = (3;3;0),\ \overline{b} = (1;1;0),\ \overline{c} = (-1;-1;1)$

1.1.8 Určte hodnosť nasledujúcich systémov vektorov.

a) $A = \left\{\overline{a}, \overline{b}\right\},\ \overline{a} = (1;0),\ \overline{b} = (1;1)$

b) $B = \left\{(2;-1), (4;-2)\right\}$

c) $C = \left\{(2;-1), (4;2), (4;-2)\right\}$

d) $D = \left\{(2;-3), (4;-6), (6;-9), (8;-12)\right\}$

e) $E = \left\{(3;3;0), (1;1;0), (-1;-1;1), (2;2;-2)\right\}$

f) $F = \left\{(1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)\right\}$

Výsledky

1.1.1 a) $(1;\ 1;-1)$; **b)** $(7;-3;1)$; **c)** $(20;-5;0)$; **d)** $(6;-4;2)$; **e)** $(-1;\ 0{,}25;\ 0)$;

f) $(14;-1;-2)$; **g)** $(22;-18;10)$; **h)** $\left(\frac{13}{4};-\frac{7}{4};\frac{3}{4}\right)$

1.1.2 a) 11; **b)** nie je definovaný; **c)** 1,3; **d)** 0; **e)** 12; **f)** 5

1.1.3 a) $\overline{a} \neq \overline{b}$; **b)** $\overline{a} \neq \overline{b}$; **c)** $\overline{a} = \overline{b}$; **d)** $\overline{a} = \overline{b}$

1.1.4 a) $r_1 = 1, r_2 = -7, r_3 = 4$; **b)** $r_1 = 2, r_2 = 2, r_3 \in R$; **c)** $\forall r_1, r_2, r_3 \in R:\ \overline{a} \neq \overline{b}$

1.1.5 a) $(6;-1)$; **b)** $(13;-23;4)$; **c)** $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};0\right)$

1.1.6 a) $\overline{b} = LK(\overline{a}_1, \overline{a}_2),\ \overline{b} = -1\cdot\overline{a}_1 + 1\cdot\overline{a}_2$; **b)** $\overline{b} = LK(\overline{a}_1, \overline{a}_2),\ \overline{b} = -1\cdot\overline{a}_1 + 1\cdot\overline{a}_2$;

c) $\overline{b} = LK(\overline{a}_1, \overline{a}_2),\ \overline{b} = -\frac{10}{8}\cdot\overline{a}_1 + \frac{7}{8}\cdot\overline{a}_2$; **d)** $\overline{b} = LK(\overline{a}_1, \overline{a}_2),\ \overline{b} = -\frac{1}{4}\cdot\overline{a}_1 + \frac{3}{4}\cdot\overline{a}_2$;

e) $\overline{b} \neq LK(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$

1.1.7 a) lineárne nezávislé; **b)** lineárne závislé, $\overline{b} = 2\cdot\overline{a}$; **c)** lineárne nezávislé; **d)** lineárne závislé, $\overline{a}_2 = 2\cdot\overline{a}_1$; **e)** lineárne závislé, $\overline{a}_2 = 1\cdot\overline{a}_1 + 1\cdot\overline{a}_3$; **f)** lineárne nezávislé;

g) lineárne závislé, $\overline{a}_4 = 10\cdot\overline{a}_1 + 0\cdot\overline{a}_2 + (-2)\cdot\overline{a}_3$; **h)** lineárne závislé, $\overline{a} = 3\cdot\overline{b} + 0\cdot\overline{c}$

1.1.8 a) $h(A) = 2$; **b)** $h(B) = 1$; **c)** $h(C) = 2$; **d)** $h(D) = 1$; **e)** $h(E) = 2$; **f)** $h(F) = 3$

1.2 Matice

Dôležitou matematickou štruktúrou, ktorá sa používa pri formulovaní a riešení mnohých ekonomických problémov, je matica. Matica je množina prvkov usporiadaných do riadkov a stĺpcov, ktoré tvoria obdĺžnikovú alebo štvorcovú schému. Matica môže byť tvorená rôznymi prvkami, my sa ale zameriame na matice, ktorých prvkami sú reálne čísla.

Definícia 1.2.1 Nech $m, n \in N$. Množina reálnych čísel a_{ij} usporiadaných do m riadkov a n stĺpcov $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ sa nazýva ***matica*** typu $m \times n$.

Reálne čísla a_{ij} sa nazývajú ***prvky matice***. Prvok a_{ij} sa nachádza v i-tom riadku a v j-tom stĺpci matice, $i = 1,2,...,m,\ \ j = 1,2,...,n$.

Zapisujeme $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ alebo $\mathbf{A}_{m \times n}$ alebo $\mathbf{A}$.

Poznámka 1.2.1 Prvky matice $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ tvoria i-tý riadok a prvky $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ tvoria j-tý stĺpec matice. Riadky matice tvoria m n-zložkových vektorov a stĺpce matice tvoria n m-zložkových vektorov.

Poznámka 1.2.2 Riadok matice obsahujúci aspoň jeden nenulový prvok sa nazýva **nenulový riadok** matice. Ak obsahuje len nulové prvky, tak sa nazýva **nulový riadok** matice.

Poznámka 1.2.3 Prvý nenulový prvok riadku matice sa nazýva **vedúci prvok riadku** matice.

Príklad 1.2.1 Podnik vyrába tri druhy výrobkov V_1, V_2, V_3 zo surovín S_1, S_2, S_3, S_4. Na výrobu jedného výrobku V_1 používa tri jednotky suroviny S_1, štyri jednotky suroviny S_2, päť jednotiek suroviny S_3 a dve jednotky suroviny S_4. Na výrobu jedného výrobku V_2 podnik používa päť jednotiek suroviny S_1, dve jednotky suroviny S_2, dve jednotky suroviny S_3 a tri jednotky suroviny S_4. Na výrobu jedného výrobku V_3 používa štyri jednotky suroviny S_1, sedem jednotiek suroviny S_2, štyri jednotky suroviny S_3 a tri jednotky suroviny S_4. Zapíšte uvedené údaje pomocou matice.

Riešenie. Počet jednotiek surovín S_i ($i = 1,2,3,4$) potrebných na výrobu jedného výrobku V_j ($j = 1,2,3$) určuje matica $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{4 \times 3}$ (tzv. matica technologických koeficientov).

Prvok a_{ij} určuje, koľko jednotiek suroviny S_i je potrebnej na produkciu jedného výrobku V_j. Takže napríklad prvok $a_{23} = 7$ matice $\mathbf{A}$ interpretujeme tak, že je potrebných 7 jednotiek suroviny S_2 na výrobu jedného výrobku V_3.

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{4 \times 3} = \begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{matrix}$$

K dôležitým pojmom algebry matíc patria:

- štvorcová matica,
- nulová matica,
- jednotková matica,
- opačná matica,
- transponovaná matica,
- diagonálna matica,
- trojuholníková matica,
- matica v stupňovitom tvare (Gaussov tvar),
- matica v redukovanom stupňovitom tvare (Jordanov tvar).

Definícia 1.2.2 Matica $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ sa nazýva ***štvorcová matica*** typu $n \times n$ alebo aj štvorcová matica *n*-tého stupňa.

Poznámka 1.2.4 Prvky $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ tvoria ***hlavnú diagonálu*** matice, prvky $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ tvoria ***vedľajšiu diagonálu*** matice.

Definícia 1.2.3 Matica $\mathbf{O} = \left[0 \right]_{m \times n}$ sa nazýva ***nulová matica***, ak sú všetky jej prvky rovné nule.

Definícia 1.2.4 Štvorcová matica $\mathbf{E_n} = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ sa nazýva ***jednotková matica*** *n*-tého stupňa, ak sú všetky jej prvky na hlavnej diagonále 1 a ostatné prvky sú 0.

Poznámka 1.2.5 Príklady jednotkových matíc:

$$\mathbf{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definícia 1.2.5 Nech $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$. Matica $-\mathbf{A} = \left[-a_{ij} \right]_{m \times n}$ sa nazýva ***opačná matica*** k $\mathbf{A}$.

Definícia 1.2.6 Nech $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$. Matica $\mathbf{A}^T = \left[a_{ij}^t \right]_{n \times m}$ sa nazýva ***transponovaná matica*** k $\mathbf{A}$, ak $a_{ij}^t = a_{ji}$.

Poznámka 1.2.6 Platí $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Príklad 1.2.2 Určte transponovanú a opačnú maticu k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Riešenie. $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ $\quad -\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Definícia 1.2.7 Štvorcová matica $\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ sa nazýva ***diagonálna matica***, ak má nenulové prvky len na hlavnej diagonále, t.j. ak platí $a_{ij}=0$ pre $i\neq j$.

Poznámka 1.2.7 Jednotkové matice sú špeciálnym prípadom diagonálnych matíc.

Definícia 1.2.8 Štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sa rovnajú nule, sa nazýva ***horná trojuholníková matica***. Štvorcová matica, ktorej prvky nad hlavnou diagonálou sa rovnajú nule, sa nazýva ***dolná trojuholníková matica***.

Príklad 1.2.3 Napíšte ľubovoľnú diagonálnu maticu typu 3×3 a hornú a dolnú trojuholníkovú maticu typu 3×3.

Riešenie. $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$ $\mathbf{H}=\begin{pmatrix}9&2&5\\0&1&8\\0&0&4\end{pmatrix}$ $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&4&0\\4&8&9\end{pmatrix}$

diagonálna matica horná trojuholníková matica dolná trojuholníková matica

Definícia 1.2.9 Matica $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ sa nazýva ***matica v stupňovitom (Gaussovom) tvare*** alebo aj ***stupňovitá matica***, ak platí:

(1) Nech a_{pq} je vedúci prvok (t.j. prvý nenulový prvok) v p-tom riadku a nech a_{rs} je vedúci prvok v r-tom riadku. Ak $p<r$, tak $q<s$.

(2) Ak k-tý riadok matice je nenulový a l-tý riadok je nulový, tak $k<l$.

Poznámka 1.2.8 Matica v stupňovitom tvare má na začiatku každého nenulového riadku aspoň o jeden nulový prvok viac než na začiatku predchádzajúceho riadku a nulové riadky (ak existujú) sú pod nenulovými.

Poznámka 1.2.9 Vedúce prvky nenulových riadkov budeme niekedy zvýrazňovať, aby sme si lepšie uvedomovali stupňovitý tvar matíc.

Poznámka 1.2.10 Príklad matice v stupňovitom tvare: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}&0&1&4&0\\0&\mathbf{5}&7&0&6\\0&0&0&\mathbf{2}&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

Definícia 1.2.10 Stupňovitá matica $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ sa nazýva ***matica v redukovanom stupňovitom (Jordanovom) tvare*** alebo ***redukovaná stupňovitá matica***, ak platí:

(1) Vedúci prvok každého nenulového riadku je číslo 1.

(2) V stĺpci, ktorý obsahuje vedúci prvok niektorého riadku, sú všetky prvky okrem vedúceho prvku nulové.

Poznámka 1.2.11 Príklad matice v redukovanom stupňovitom tvare: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&2&0\\0&\mathbf{1}&3&0\\0&0&0&\mathbf{1}\end{pmatrix}$

Operácie s maticami

K základným operáciám s maticami patria:

- rovnosť matíc,
- súčet matíc,
- násobenie matice reálnym číslom,
- násobenie matíc.

Definícia 1.2.11 Matice $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ a $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{k\times l}$ ***sa rovnajú*** práve vtedy, ak $m=k, n=l$ a $a_{ij}=b_{ij}$ pre všetky $i=1,2,...,m,\ \ j=1,2,...,n$. Zapisujeme $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

Poznámka 1.2.12 Matice sa rovnajú, ak sú rovnakého typu a ak sa rovnajú všetky ich navzájom zodpovedajúce prvky.

Definícia 1.2.12 Nech $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ sú matice typu $m\times n$. Matica $\mathbf{C}=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ sa nazýva ***súčet matíc*** $\mathbf{A},\mathbf{B}$ práve vtedy, keď $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ pre všetky $i=1,2,...,m,\ \ j=1,2,...,n$. Zapisujeme $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Poznámka 1.2.13 Súčet matíc $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ je komutatívny, t.j. platí $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

Poznámka 1.2.14 Pre každú maticu $\mathbf{A}_{m\times n}$ a nulovú maticu $\mathbf{O}_{m\times n}$ platí $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{O}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

Poznámka 1.2.15 Platí $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$ (za predpokladu, že uvedené operácie majú zmysel).

Poznámka 1.2.16 Pod rozdielom matíc $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ rozumieme súčet matíc $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$.

Definícia 1.2.13 Nech $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $k\in R$. Matica $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ sa nazýva ***k-násobok matice*** $\mathbf{A}$ práve vtedy, keď $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$ pre všetky $i=1,2,...,m,\ \ j=1,2,...,n$.

Zapisujeme $\mathbf{B}=k\cdot\mathbf{A}$ alebo $\mathbf{B}=k\mathbf{A}$.

Poznámka 1.2.17 Pre každú maticu $\mathbf{A}$ a reálne čísla k,l platí

$$k\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot k$$
$$k\cdot\mathbf{A}+l\cdot\mathbf{A}=(k+l)\cdot\mathbf{A}$$

Príklad 1.2.4 Dané sú matice $\mathbf{A}_{2\times3}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_{2\times3}=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&-1&0\end{pmatrix}$. Vypočítajte súčet matíc $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, 10-násobok matice $\mathbf{A}$ a lineárnu kombináciu transponovaných matíc k $\mathbf{A},\mathbf{B}$ $-3\cdot\mathbf{A}^T+2\cdot\mathbf{B}^T$.

Riešenie. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&2\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4&0+0&-1+2\\0+0&2+(-1)&-3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&1\\0&1&-3\end{pmatrix}$

$$10\cdot\mathbf{A}=10\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\cdot1&10\cdot0&10\cdot(-1)\\10\cdot0&10\cdot2&10\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0&-10\\0&20&-30\end{pmatrix}$$

$$-3\cdot\mathbf{A}^T+2\cdot\mathbf{B}^T=-3\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&-3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}4&0\\0&-1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-6\\3&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8&0\\0&-2\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&-8\\7&9\end{pmatrix}$$

Definícia 1.2.14 Nech $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$, $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ sú matice. Matica $\mathbf{C}=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ sa nazýva ***súčin matíc*** $\mathbf{A},\mathbf{B}$ (v tomto poradí) práve vtedy, keď $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\cdot b_{kj}$ pre všetky $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$. Zapisujeme $\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ alebo $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$.

Poznámka 1.2.18 Ak sa budeme na riadky matice $\mathbf{A}$ sa pozerať ako na riadkové aritmetické vektory a na stĺpce matice $\mathbf{B}$ ako na stĺpcové aritmetické vektory, potom prvok c_{ij} je skalárnym súčinom i-tého riadkového vektora matice $\mathbf{A}$ a transponovaného j-tého stĺpcového vektora matice $\mathbf{B}$.

Poznámka 1.2.19 Súčin matíc $\mathbf{A},\mathbf{B}$ existuje len vtedy, ak sa počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ rovná počtu riadkov matice $\mathbf{B}$. Typ matice $\mathbf{C}$ je jednoznačne určený počtom riadkov matice $\mathbf{A}$ a počtom stĺpcov matice $\mathbf{B}$, t.j. $\mathbf{C}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times p}\cdot\mathbf{B}_{p\times n}$.

Poznámka 1.2.20 Keď chceme zdôrazniť poradie matíc v súčine $\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, potom uvedieme, že maticu $\mathbf{A}$ násobíme maticou $\mathbf{B}$ sprava, alebo že maticu $\mathbf{B}$ násobíme maticou $\mathbf{A}$ zľava.

Poznámka 1.2.21 **Násobenie matíc nie je komutatívne**, t.j. vo všeobecnosti

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

Poznámka 1.2.22 Násobenie matíc je distributívne vzhľadom na sčítanie matíc, a teda platí

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$$

za predpokladu, že sú uvedené operácie pre matice $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ definované.

Poznámka 1.2.23 Pre matice $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ a reálne číslo k platí

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$
$$\mathbf{A}\cdot(k\cdot\mathbf{B})=k\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

za predpokladu, že sú uvedené operácie pre matice $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ definované.

Poznámka 1.2.24 Pre maticu $\mathbf{A}$ a jednotkovú maticu $\mathbf{E}$ platí

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{A}$$
$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

za predpokladu, že sú uvedené operácie pre matice $\mathbf{A},\mathbf{E}$ definované.

Poznámka 1.2.25 Pre matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$ platí

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathbf{T}}=\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

za predpokladu, že sú uvedené operácie pre matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$ definované.

Príklad 1.2.5 Dané sú matice $\mathbf{A}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_{3\times 3}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ -1 & 5 & 0\\ -2 & 6 & 1\end{pmatrix}$. Vypočítajte $\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

Riešenie. $$\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ -1 & 5 & 0\\ -2 & 6 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 4+0\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 5+(-1)\cdot 6 & 1\cdot 2+0\cdot 0+(-1)\cdot 1\\ 0\cdot 4+2\cdot(-1)+(-3)\cdot(-2) & 0\cdot 0+2\cdot 5+(-3)\cdot 6 & 0\cdot 2+2\cdot 0+(-3)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -6 & 1\\ 4 & -8 & -3\end{pmatrix}$$

Príklad 1.2.6 Podnik vyrába tri druhy výrobkov V_1, V_2, V_3 zo surovín S_1, S_2, S_3, S_4. Počet jednotiek surovín S_i $(i=1,2,3,4)$ potrebných na výrobu jedného výrobku V_j $(j=1,2,3)$ určuje matica technologických koeficientov $\mathbf{A}_{4\times 3}$. V jednotlivých mesiacoch posledného štvrťroka vyprodukoval podnik množstvá výrobkov dané maticou $\mathbf{Q}=\left[q_{ij}\right]_{3\times 3}$, kde prvok q_{ij} určuje, koľko výrobku V_i bolo vyprodukovaného v j-tom mesiaci sledovaného štvrťroka.

$$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{4\times 3}=\begin{array}{c}\begin{matrix}V_1 & V_2 & V_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ 4 & 2 & 7\\ 5 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\end{matrix}\qquad \mathbf{Q}=\left[q_{ij}\right]_{3\times 3}=\begin{array}{c}\begin{matrix}M_1 & M_2 & M_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}100 & 150 & 150\\ 150 & 100 & 150\\ 200 & 150 & 150\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}V_1\\ V_2\\ V_3\end{matrix}$$

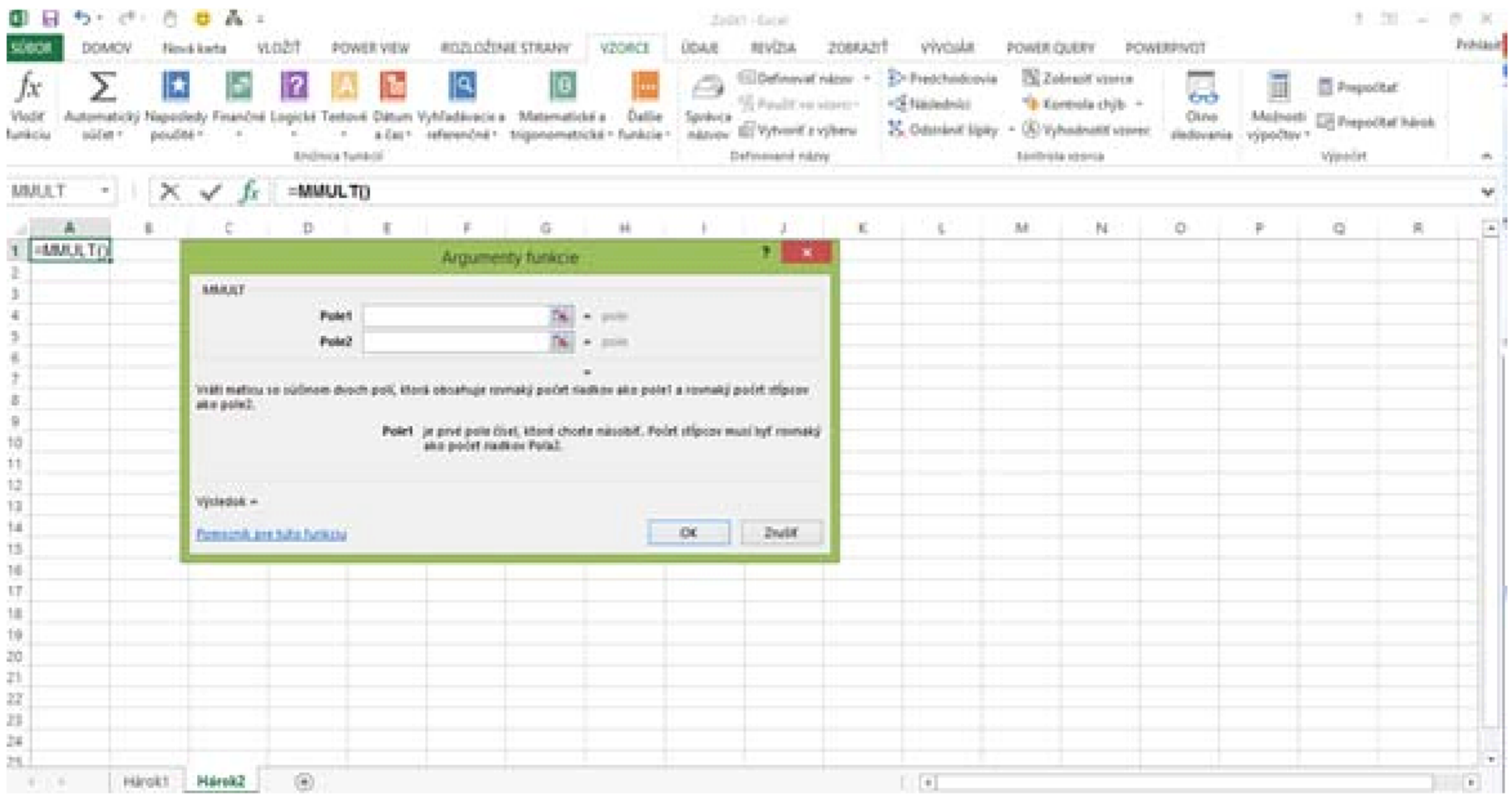
Určte množstvo spotrebovaných jednotiek každej zo surovín S_1, S_2, S_3, S_4 v jednotlivých mesiacoch sledovaného štvrťroka.

Riešenie. Počet jednotiek každej zo surovín S_1, S_2, S_3, S_4 spotrebovaných v jednotlivých troch mesiacoch na celkovú produkciu všetkých troch výrobkov vypočítame ako súčin $\mathbf{C}_{4\times 3}=\mathbf{A}_{4\times 3}\cdot\mathbf{B}_{3\times 3}$

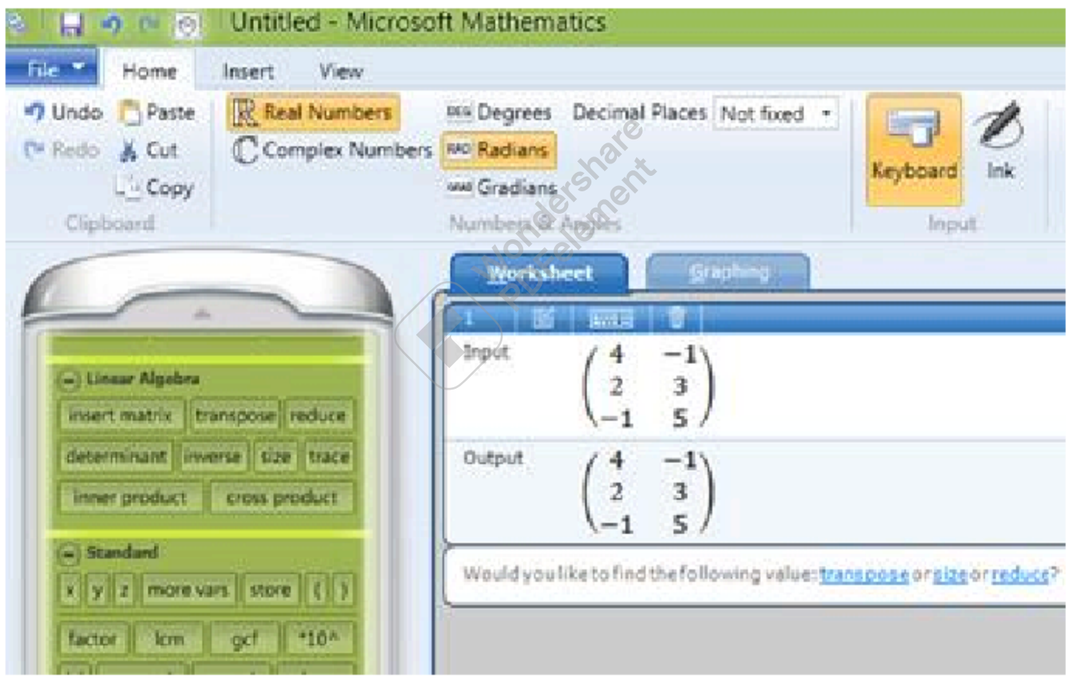
$$\boldsymbol{C}=\left[c_{ij}\right]_{4\times 3}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ 4 & 2 & 7\\ 5 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100 & 150 & 150\\ 150 & 100 & 150\\ 200 & 150 & 150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1850 & 1550 & 1800\\ 2100 & 1850 & 1950\\ 1600 & 1550 & 1650\\ 1250 & 1050 & 1200\end{pmatrix}$$

Stĺpcové vektory matice $\mathbf{C}$ určujú množstvo spotrebovaných jednotiek surovín S_1, S_2, S_3, S_4 v jednotlivých mesiacoch. Prvok c_{ij} určuje spotrebu suroviny S_i v j-tom mesiaci. Napríklad druhý stĺpcový vektor matice $\mathbf{C}$ interpretujeme tak, že v druhom mesiaci sledovaného štvrťroka sa spotrebovalo 1550 jednotiek suroviny S_1, 1850 jednotiek suroviny S_2, 1550 jednotiek suroviny S_3 a 1050 jednotiek suroviny S_4.

Poznámka 1.2.26 V praxi sa často využíva softvérová podpora operácií s maticami, najmä v Microsoft Excel (obr. 1.2.1) a v Microsoft Mathematics (obr. 1.2.2).



Obr. 1.2.1 Softvérová podpora v Microsoft Excel



Obr. 1.2.2 Softvérová podpora v Microsoft Mathematics

Hodnosť matice

Dôležitými pojmami lineárnej algebry sú hodnosť systému vektorov a hodnosť matice. Hodnosť systému vektorov sme už definovali (definícia 1.1.12). V nasledujúcej časti sa budeme venovať pojmu a vlastnostiam hodnosti matice. Je potrebné si uvedomiť vzájomný vzťah medzi hodnosťou matice a hodnosťou systému vektorov. Každú maticu totiž môžeme chápať ako systém riadkových alebo stĺpcových vektorov.

Definícia 1.2.15 Nech $m,n \in N$ a nech je daná matica $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$. Hodnosť systému riadkových vektorov matice **A** sa nazýva ***hodnosť matice*** **A**. Zapisujeme $h(\mathbf{A})$.

Poznámka 1.2.27 Hodnosť matice **A** je maximálny počet lineárne nezávislých vektorov tvoriacich riadky matice **A** (vyplýva to z definície 1.1.12).

Poznámka 1.2.28 Hodnosť matice $\mathbf{A}$ môžeme definovať aj ako hodnosť systému stĺpcových vektorov matice $\mathbf{A}$. Platí, že hodnosť systému stĺpcových vektorov sa rovná hodnosti systému riadkových vektorov matice $\mathbf{A}$.

Poznámka 1.2.29 Hodnosť nulovej matice je číslo nula, t.j. $h(\mathbf{O}) = 0$. Súčasne platí, že nulovú hodnosť má iba nulová matica.

Poznámka 1.2.30 Hodnosť nenulovej matice $\mathbf{A}_{m\times n}$ je prirodzené číslo, pre ktoré platí

$$1 \le h(\mathbf{A}) \le \min(m,n).$$

Poznámka 1.2.31 Nech $\mathbf{A}^T$ je transponovaná matica k matici $\mathbf{A}$. Potom platí $h(\mathbf{A}^T) = h(\mathbf{A})$.

Príklad 1.2.7 Podľa definície hodnosti matice určte hodnosť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

Riešenie. Hodnosť matice $\mathbf{A}$ je podľa definície 1.2.15 hodnosť systému jej riadkových vektorov $A = \{(0,1,1), (1,2,4), (1,1,3), (0,-4,-4)\} \subset R^3$. Z príkladu 1.1.18 vieme, že hodnosť systému vektorov $h(A) = 2$, a teda aj hodnosť matice $h(\mathbf{A}) = 2$.

Niekedy môže byť náročné určiť hodnosť matice priamo podľa definície. Na určovanie hodnosti matíc sa dá použiť viacero metód. Zameriame sa na metódu výpočtu hodnosti matice pomocou ekvivalentných úprav matice na Gaussov alebo Jordanov tvar. Ekvivalentné úpravy matice zachovávajú jej hodnosť a môžu byť uskutočňované prostredníctvom jej riadkov alebo stĺpcov. Z dôvodu zjednodušenia budeme používať iba riadkové ekvivalentné úpravy.

Definícia 1.2.16 ***Ekvivalentnou riadkovou úpravou matice*** nazývame každú z nasledujúcich úprav:

(1) výmena poradia riadkov matice,
(2) vynásobenie ľubovoľného riadku matice nenulovým reálnym číslom,
(3) pripočítanie lineárnej kombinácie ostatných riadkov k ľubovoľnému riadku matice,
(4) vynechanie takého riadku matice, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných riadkov matice,
(5) pridanie takého riadku k matici, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných riadkov matice.

Ekvivalentné riadkové úpravy (1), (2), (3), ktoré nemenia typ upravovanej matice, sa nazývajú ***elementárne ekvivalentné riadkové úpravy*** matice.

Poznámka 1.2.32 Špeciálnym prípadom ekvivalentnej riadkovej úpravy (3) je pripočítanie číselného násobku riadku matice k niektorému inému riadku matice.

Definícia 1.2.17 Dve matice budeme nazývať ***ekvivalentné matice***, ak sa jedna z nich dá upraviť na druhý pomocou ekvivalentných riadkových úprav. Zapisujeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Veta 1.2.1 Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sú ekvivalentné matice. Potom platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Veta 1.2.2 Nech $m,n,k \in N$ a nech $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ je matica v stupňovitom tvare s k nenulovými riadkami. Potom $h(\mathbf{A}) = k$.

Poznámka 1.2.33 Matica v redukovanom stupňovitom tvare je špeciálnym prípadom matice v stupňovitom tvare, a teda aj pre každú maticu v redukovanom stupňovitom tvare platí veta 1.2.2.

Veta 1.2.3 Každá nenulová matica sa dá upraviť na ekvivalentnú maticu v stupňovitom (resp. redukovanom stupňovitom) tvare.

Príklad 1.2.8 Maticu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ upravte na ekvivalentnú maticu v stupňovitom a v redukovanom stupňovitom tvare.

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav budeme maticu $\mathbf{A}$ upravovať na maticu v stupňovitom tvare podľa definície 1.2.9 tak, aby na začiatku každého nenulového riadku bolo aspoň o jeden nulový prvok viac než na začiatku predchádzajúceho riadku a aby boli nulové riadky (ak existujú) pod nenulovými. Ekvivalentné riadkové úpravy budeme symbolicky zapisovať vedľa príslušných upravovaných riadkov matice, pričom R_i znamená i-tý riadok upravovanej matice. Úloha nemá iba jedno riešenie. Existuje nekonečne veľa matíc v stupňovitom tvare, ktoré sú ekvivalentné s maticou $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 + (-1)R_1 \\ R_3 + (-3)R_1 \\ R_4 + (-4)R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \\ \updownarrow \\ R_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 + 1R_2 \\ R_4 + 4R_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & -2 & -34 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ R_4 + (-2)R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & -8 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}$$

Maticu $\mathbf{A}$ sme upravili pomocou ekvivalentných riadkových úprav na ekvivalentnú maticu $\mathbf{G}$ v stupňovitom tvare. Vedúce prvky nenulových riadkov sme zvýraznili, aby sme si lepšie uvedomili stupňovitý tvar matice $\mathbf{G}$.

Budeme pokračovať v ekvivalentných riadkových úpravách, aby sme získali ekvivalentnú maticu $\mathbf{J}$ v redukovanom stupňovitom tvare.

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & -8 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 \cdot 0{,}5 \\ R_3 \cdot (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_1 + (-1)R_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -15 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{J}$$

Príklad 1.2.9 Určte hodnosť matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ -3 & -9 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

Riešenie. Maticu $\mathbf{A}$ upravíme ekvivalentnými riadkovými úpravami na ekvivalentnú maticu $\mathbf{G}$ v stupňovitom tvare, ktorej hodnosť určíme podľa vety 1.2.2 ako počet jej nenulových riadkov. Použitie ekvivalentných úprav nemení hodnosť matice (veta 1.2.1), takže platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{G})$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ -3 & -9 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 + (-2)R_1 \\ R_3 + (-1)R_1 \\ R_4 + 3R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} R_2 \cdot 0,25 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R_3 + 2R_2 \\ R_4 + (-3)R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} R_4 + 3R_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}$$

Matica $\mathbf{G}$ má tri nenulové riadky, preto podľa vety 1.2.2 platí $h(\mathbf{G}) = 3$. Matica $\mathbf{A}$ je ekvivalentná s maticou $\mathbf{G}$, teda $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{G}) = 3$.

Veta 1.2.4 Nech $m,n \in N$, $A = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m\} \subset R^n$ je systém vektorov, $\mathbf{A}_{m\times n}$ je matica, ktorej riadky tvoria vektory systému A. Potom platí:

(1) Ak $h(\mathbf{A}) = m$, potom sú vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m$ lineárne nezávislé.

(2) Ak $h(\mathbf{A}) < m$, potom sú vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m$ lineárne závislé.

Poznámka 1.2.34 Pomocou výpočtu hodnosti príslušnej matice môžeme podľa vety 1.2.4 rozhodnúť o lineárnej závislosti či nezávislosti vektorov.

Príklad 1.2.10 Rozhodnite, či sú vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4 \in R^4$ lineárne závislé alebo lineárne nezávislé, ak $\overline{a}_1 = (1,0,-2,1)$, $\overline{a}_2 = (2,-1,1,2)$, $\overline{a}_3 = (4,0,-8,4)$, $\overline{a}_4 = (2,0,-4,4)$. Rozhodnite na základe výpočtu hodnosti matice, ktorej riadky tvoria vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$.

Riešenie. Úlohu je možné riešiť viacerými spôsobmi. Jeden spôsob riešenia sme uviedli v príklade 1.1.15. Teraz budeme úlohu riešiť na základe výpočtu hodnosti zodpovedajúcej matice $\mathbf{A}$. Maticu $\mathbf{A}$ upravíme na ekvivalentnú maticu v stupňovitom tvare a zistíme jej hodnosť.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \\ \overline{a}_3 \\ \overline{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -8 & 4 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 + (-2)R_1 \\ R_3 + (-4)R_1 \\ R_4 + (-2)R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 \leftrightarrow R_4 \\ R_4 \leftrightarrow R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \mathbf{-1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}$$

Matica $\mathbf{G}$ má tri nenulové riadky, podľa vety 1.2.2 platí $h(\mathbf{G}) = 3$. Matica $\mathbf{A}$ je ekvivalentná s maticou $\mathbf{G}$, teda $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{G}) = 3$. Podľa vety 1.2.4 sú vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$ lineárne závislé, lebo $h(\mathbf{A}) = 3 < 4 = m$.

Inverzná matica

Ďalším dôležitým pojmom lineárnej algebry je inverzná matica. Inverzné matice umožňujú riešiť mnohé úlohy lineárnej algebry. Budeme ich používať napríklad pri riešení maticových rovníc.

Definícia 1.2.18 Nech $n \in N$. Štvorcová matica $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]_{n \times n}$ sa nazýva ***inverzná matica*** k matici $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ práve vtedy, keď platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E_n}$.

Inverznú maticu k matici $\mathbf{A}$ označujeme symbolom $\mathbf{A}^{-1}$.

Poznámka 1.2.35 Matica, ku ktorej existuje inverzná matica sa nazýva ***invertibilná matica***.

Veta 1.2.5 Ku každej štvorcovej matici existuje najviac jedna inverzná matica.

Definícia 1.2.19 Nech $n \in N$. Štvorcová matica $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ sa nazýva ***regulárna matica***, ak $h(\mathbf{A}) = n$. Ak $h(\mathbf{A}) < n$, potom sa matica $\mathbf{A}$ nazýva ***singulárna matica***.

Poznámka 1.2.36 Štvorcová matica n-tého stupňa je regulárna práve vtedy, ak je ekvivalentná s jednotkovou maticou $\mathbf{E_n}$.

Veta 1.2.6 Štvorcová matica n-tého stupňa je invertibilná práve vtedy, keď je regulárna.

Veta 1.2.7 Nech $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$, $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]_{n \times n}$ sú regulárne matice, potom platí

(1) $\left(\mathbf{A}^{-1} \right)^{-1} = \mathbf{A}$

(2) $\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

(3) $\left(\mathbf{A}^{T} \right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1} \right)^{T}$

Veta 1.2.8 Ak štvorcovú maticu $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ upravíme pomocou postupnosti elementárnych riadkových úprav na jednotkovú maticu n-tého stupňa, tak matica $\mathbf{A}$ je invertibilná a tou istou postupnosťou elementárnych riadkových úprav jednotkovej matice dostaneme inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$.

Poznámka 1.2.37 ***Metóda výpočtu inverznej matice elementárnymi riadkovými úpravami*** je založená na vete 1.2.8. Štvorcovú maticu $\mathbf{A}_{n \times n}$ rozšírime o jednotkovú maticu $\mathbf{E_n}$ na maticu v tvare $\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{E_n} \right)$. Ak je matica $\mathbf{A}$ regulárna, a teda k nej existuje matica inverzná, potom pomocou elementárnych riadkových úprav maticu $\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{E_n} \right)$ postupne upravíme na tvar $\left(\mathbf{E_n} \middle| \mathbf{A}^{-1} \right)$.

Schematicky môžeme postup výpočtu inverznej matice zapísať $\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{E_n} \right) \sim \ldots \sim \left(\mathbf{E_n} \middle| \mathbf{A}^{-1} \right)$.

Príklad 1.2.11 Určte inverznú maticu k regulárnej matici $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&8&6\\2&7&3\end{pmatrix}$.

Riešenie. $\left(\mathbf{A}\middle|\mathbf{E}_3\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\3&8&6&0&1&0\\2&7&3&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\R_2+(-3)R_1\\R_3+(-2)R_1\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&-1&0&-3&1&0\\0&1&-1&-2&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}R_1+3R_2\\\\R_3+1R_2\end{matrix}\sim$

$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&-8&3&0\\0&-1&0&-3&1&0\\0&0&-1&-5&1&1\end{array}\right)R_1+2R_3\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-18&5&2\\0&-1&0&-3&1&0\\0&0&-1&-5&1&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\R_2\cdot(-1)\\R_3\cdot(-1)\end{matrix}\sim$

$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-18&5&2\\0&1&0&3&-1&0\\0&0&1&5&-1&-1\end{array}\right)=\left(\mathbf{E}_3\middle|\mathbf{A}^{-1}\right)$

Inverzná matica k matici $\mathbf{A}$ je $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-18&5&2\\3&-1&0\\5&-1&-1\end{pmatrix}$.

Maticové rovnice

Pri riešení problémov formulovaných pomocou matíc sa stretávame s maticovými rovnicami, teda rovnicami, v ktorých je neznámou matica. Pri výpočte neznámej matice $\mathbf{X}$ z maticovej rovnice je dôležité uvedomiť si, že násobenie matíc nie je komutatívne a že operácia delenia matíc nie je definovaná (namiesto nej používame inverzné matice). Maticové rovnice riešime použitím nasledujúcich viet.

Veta 1.2.9 Nech $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ sú matice typu $m\times n$ a nech platí rovnosť matíc $\mathbf{A}=\mathbf{B}$. Potom ak použijeme niektorú z nasledujúcich úprav

(1) pripočítanie matice typu $m\times n$ k obom stranám rovnosti,
(2) vynásobenie oboch strán rovnosti nenulovým reálnym číslom,
(3) vynásobenie oboch strán rovnosti zľava regulárnou maticou typu $p\times m$,
(4) vynásobenie oboch strán rovnosti sprava regulárnou maticou typu $n\times p$,

tak dostaneme opäť rovnosť dvoch matíc.

Veta 1.2.10 Nech $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ je regulárna matica n-tého stupňa, $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ je matica typu $n\times p$. Potom maticová rovnica $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$ má práve jedno riešenie $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$.

Veta 1.2.11 Nech $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ je regulárna matica n-tého stupňa, $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ je matica typu $m\times n$. Potom maticová rovnica $\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{B}$ má práve jedno riešenie $\mathbf{X}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}$.

Poznámka 1.2.38 Pri riešení maticových rovníc s danými maticami, budeme postupovať nasledovne:
(1) vyriešime ich najskôr všeobecne pre ľubovoľné vhodné matice,
(2) rozhodneme o riešiteľnosti a nájdeme riešenie (ak existuje) pre dané matice.

Príklad 1.2.12 Riešte maticovú rovnicu $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$
a) všeobecne,
b) pre dané matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 5\\ 2 & -1 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

Riešenie. a) všeobecné riešenie

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}&=\mathbf{B} && /\cdot\mathbf{A}^{-1}{}_{zľava}\\ \mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X})&=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\\ (\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{X}&=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\\ \mathbf{E}\cdot\mathbf{X}&=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\\ \mathbf{X}&=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\end{aligned}$$

Maticová rovnica $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$ má riešenie $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$, ak je matica $\mathbf{A}$ regulárna (a teda k nej existuje inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$) a ak je definovaný súčin $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$ (matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$ sú vhodného typu).

b) Pri hľadaní riešenia pre dané matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ budeme vychádzať z nájdeného všeobecného riešenia. Najskôr určíme inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E})=\left(\begin{array}{cc|cc}4 & -5 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}R_1\\ \updownarrow\\ R_2\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 0 & 1\\ 4 & -5 & 1 & 0\end{array}\right)R_2+(-4)R_1\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -4\end{array}\right)R_2\cdot(-1)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -4\end{array}\right)R_2\cdot(-1)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 4\end{array}\right)R_1+1R_2\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 4\end{array}\right)=(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$$

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 5\\ 2 & -1 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -8 & 20 & -10\\ 7 & -7 & 16 & -9\end{pmatrix}$$

O správnosti riešenia sa presvedčíme skúškou. Dosadíme vypočítanú maticu $\mathbf{X}$ a danú maticu $\mathbf{A}$ do ľavej strany maticovej rovnice.

Ľ: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -8 & 20 & -10\\ 7 & -7 & 16 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 5\\ 2 & -1 & 4 & -1\end{pmatrix}$ Ľ = P

Príklad 1.2.13 Riešte všeobecne maticovú rovnicu $3\cdot(\mathbf{X}+2\mathbf{A})=4\mathbf{B}+4\mathbf{X}+8\mathbf{A}$.

Riešenie. Daná maticová rovnica má riešenie, ak sú matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$ rovnakého typu.

$$\begin{aligned}3\cdot(\mathbf{X}+2\cdot\mathbf{A})&=4\mathbf{B}+4\mathbf{X}+8\mathbf{A}\\ 3\mathbf{X}+6\mathbf{A}&=4\mathbf{B}+4\mathbf{X}+8\mathbf{A} && /+(-4)\mathbf{X}\\ -\mathbf{X}+6\mathbf{A}&=4\mathbf{B}+8\mathbf{A} && /+(-6)\mathbf{A}\\ -\mathbf{X}&=4\mathbf{B}+2\mathbf{A} && /\cdot(-1)\\ \mathbf{X}&=-4\mathbf{B}-2\mathbf{A}\end{aligned}$$

Príklad 1.2.14 Riešte maticovú rovnicu $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}+3\mathbf{X}$

a) všeobecne,

b) pre dané matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -8 & 1\end{pmatrix}$.

Riešenie. a) všeobecné riešenie

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}+3\mathbf{X} \quad /+(-3)\mathbf{X}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}-3\mathbf{X}=\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B} \quad /\cdot(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^{-1}\ \text{zľava}$$

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^{-1}\cdot(\mathbf{A}-3\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{X}=(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

$$\mathbf{X}=(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

b) Pri hľadaní riešenia pre dané matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$ budeme vychádzať z nájdeného všeobecného riešenia. Aby sme mohli vypočítať maticu $\mathbf{X}$, potrebujeme určiť inverznú maticu $(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^{-1}$.

$$\mathbf{A}-3\mathbf{E}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

Inverznú maticu vypočítame podľa nasledujúceho postupu (veta 1.2.8):

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{E}|\mathbf{E})=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\ldots\sim(\mathbf{E}|(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^{-1})=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{3}{8}\\ 0 & 1 & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8}\end{array}\right).$$

$$(A-3\cdot\mathbf{E})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{8} & \frac{3}{8}\\ \frac{2}{8} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}=(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^{-1}\cdot\mathbf{B}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -8 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-24 & 5\\ 8 & 1\end{pmatrix}$$

O správnosti riešenia sa presvedčíme skúškou. Dosadíme vypočítanú maticu $\mathbf{X}$ a dané matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$ do ľavej a pravej strany maticovej rovnice.

Ľ: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-24 & 5\\ 8 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-24 & 5\\ 8 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-72 & 23\\ -40 & 11\end{pmatrix}$

P: $\mathbf{B}+3\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -8 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-24 & 5\\ 8 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -8 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & \frac{15}{8}\\ 3 & \frac{3}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & \frac{23}{8}\\ -5 & \frac{11}{8}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-72 & 23\\ -40 & 11\end{pmatrix}$

Ľ = P

Príklad 1.2.15 Riešte všeobecne pre vhodné matice $\mathbf{B},\mathbf{C}$ maticovú rovnicu

a) $\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C}+6\mathbf{X}$,

b) $\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{C}+6\mathbf{X}$.

Riešenie. a)

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C}+6\mathbf{X} \quad /+(-6)\mathbf{X}$$
$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}-6\mathbf{X}=\mathbf{C}$$
$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{X}\cdot 6=\mathbf{C}$$
$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}\cdot 6=\mathbf{C}$$
$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{E}\cdot 6)=\mathbf{C}$$
$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{B}-6\mathbf{E})=\mathbf{C} \quad /\cdot(\mathbf{B}-6\mathbf{E})^{-1}\ \textit{sprava}$$
$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{B}-6\mathbf{E})\cdot(\mathbf{B}-6\mathbf{E})^{-1}=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}-6\mathbf{E})^{-1}$$
$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}-6\mathbf{E})^{-1}$$
$$\mathbf{X}=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}-6\mathbf{E})^{-1}$$

b)

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{C}+6\mathbf{X} \quad /+(-6)\mathbf{X}$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}-6\mathbf{X}=\mathbf{C}$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}-6\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{C}$$
$$(\mathbf{B}-6\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{C}$$
$$(\mathbf{B}-6\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{C} \quad /\cdot(\mathbf{B}-6\mathbf{E})^{-1}\ \textit{zľava}$$
$$(\mathbf{B}-6\mathbf{E})^{-1}\cdot(\mathbf{B}-6\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=(\mathbf{B}-6\mathbf{E})^{-1}\cdot\mathbf{C}$$
$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{X}=(\mathbf{B}-6\mathbf{E})^{-1}\cdot\mathbf{C}$$
$$\mathbf{X}=(\mathbf{B}-6\mathbf{E})^{-1}\cdot\mathbf{C}$$

Príklad 1.2.16 Riešte všeobecne maticovú rovnicu $5\mathbf{B}-\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}=2\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{C})$.

Riešenie.

$$5\mathbf{B}-\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}=2\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{C})$$
$$5\mathbf{B}-\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}=2\mathbf{X}-2\mathbf{C} \quad /+(-2)\mathbf{X}+(-5)\mathbf{B}$$
$$-\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}-2\mathbf{X}=-2\mathbf{C}-5\mathbf{B} \quad /\cdot(-1)$$
$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}+2\mathbf{X}=2\mathbf{C}+5\mathbf{B}$$
$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{X}\cdot 2\mathbf{E}=2\mathbf{C}+5\mathbf{B}$$
$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{A}+2\mathbf{E})=2\mathbf{C}+5\mathbf{B} \quad /\cdot(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}\ \textit{sprava}$$
$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{A}+2\mathbf{E})\cdot(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}=(2\mathbf{C}+5\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$$
$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}=(2\mathbf{C}+5\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$$
$$\mathbf{X}=(2\mathbf{C}+5\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$$

Príklad 1.2.17 Riešte maticovú rovnicu $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C}$ všeobecne pre vhodné matice $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$.

Riešenie.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C} \quad /\cdot\mathbf{A}^{-1}\ \textit{zľava} \quad /\cdot\mathbf{B}^{-1}\ \textit{sprava}$$
$$\mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^{-1}$$
$$(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{X}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1})=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^{-1}$$
$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^{-1}$$
$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^{-1}$$

Príklad 1.2.18 Podnik vyrába tri druhy výrobkov V_1, V_2, V_3 v neznámych množstvách v_1, v_2, v_3 daných maticou výroby **V**. Na výrobu každého z nich spotreboval tri druhy surovín S_1, S_2, S_3 v celkových množstvách s_1, s_2, s_3 daných maticou spotreby **S**. Matica spotreby **S** a matica technologických koeficientov **A** sú známe, matica výroby **V** je neznáma. Vypočítajte maticu výroby **V**, ak platí

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{matrix}.$$

Riešenie.

Celková spotreba jednotlivých druhov surovín S_1, S_2, S_3 je daná maticovou rovnicou $\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$. Vyjadríme z nej neznámu maticu výroby $\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S}$.

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \qquad / \cdot \mathbf{A}^{-1}{}_{zľava}$$
$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V})$$
$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{V}$$
$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{V}$$
$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S}$$

Určíme inverznú maticu k **A** a vypočítame maticu výroby **V**. Daná spotreba zodpovedá výrobe troch jednotiek výrobku V_1, dvoch jednotiek výrobku V_2 a štyroch jednotiek výrobku V_3.

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -13 & 5 & 2 \\ 10 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Determinanty

Determinant je reálne číslo, ktoré je jednoznačne priradené každej štvorcovej matici. Ak matica nie je štvorcová, jej determinant nie je definovaný. Determinanty sa používajú pri určovaní regulárnosti a singulárnosti matíc, pri riešení niektorých systémov lineárnych rovníc a v ďalších výpočtoch.

Definícia 1.2.20 Nech $(k_1, k_2, ..., k_n)$ je permutácia z prvkov $1, 2, ..., n$, $n \geq 2$. O prvkoch k_i, k_j hovoríme, že sú **v *inverzii*** práve vtedy, ak $k_i > k_j$ pre $i < j$. ***Počet inverzií v permutácii*** $(k_1, k_2, ..., k_n)$ označme $I(k_1, k_2, ..., k_n)$. Pre $n = 1$, definujeme $I(1) = 0$.

Príklad 1.2.19 Určte počet inverzií v permutácii $(2, 3, 1)$.

Riešenie. V uvedenej permutácii $(2, 3, 1)$ prvkov $1, 2, 3$ sú v inverzii dvojice prvkov $2,1$ a $3,1$. To znamená, že $I(2, 3, 1) = 2$.

Definícia 1.2.21 Nech $n \in N$, $n \geq 1$ a nech $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ je štvorcová matica n-tého stupňa. **Determinant matice A** je číslo $|\mathbf{A}| = \sum_{(k_1, k_2, ..., k_n)} (-1)^{I(k_1, k_2, ..., k_n)} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot ... \cdot a_{nk_n}$, kde index súčtu nadobúda hodnoty všetkých permutácií prvkov $1, 2, ..., n$. Zapisujeme $|\mathbf{A}|$ alebo $\det \mathbf{A}$.

Výpočet determinantu podľa definície 1.2.21 je univerzálny pre akúkoľvek štvorcovú maticu *n*-tého stupňa, je však pomerne zdĺhavý. Preto sa pri výpočte determinantu používajú skrátené postupy (schémy, pravidlá) odvodené z jeho definície.

Determinant prvého stupňa

$$|\mathbf{A}| = |a_{11}| = (-1)^0 \cdot a_{11} = a_{11}$$

Determinant druhého stupňa

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2)} \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^{I(2,1)} \cdot a_{12} \cdot a_{21} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Determinant druhého stupňa vypočítame tak, že *od súčinu prvkov na hlavnej diagonále odpočítame súčin prvkov na vedľajšej diagonále* matice.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$-\qquad +$$

Determinant tretieho stupňa

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2,3)} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^{I(2,3,1)} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ (-1)^{I(3,1,2)} \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^{I(3,2,1)} \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} +$$

$$+ (-1)^{I(1,2,3)} \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^{I(2,1,3)} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Determinant tretieho stupňa vypočítame podľa tzv. *Sarrusovho pravidla* tak, že *od troch sčítancov, ktoré dostaneme ako súčiny prvkov „v smere hlavnej diagonály“ odpočítame tri súčiny prvkov „v smere vedľajšej diagonály“.*

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$-\quad -\quad -\qquad +\quad +\quad +$$

Príklad 1.2.20 Vypočítajte determinanty matíc $\mathbf{A} = (4)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Riešenie. $|\mathbf{A}| = |4| = 4$, $|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$

$$|\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 8 \\ 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 8 \cdot 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 8 \cdot 4 \cdot 4 = -120$$

Determinant štvrtého a vyššieho stupňa

Determinanty štvrtého stupňa a vyšších stupňov môžeme vypočítať pomocou vety o rozvoji determinantu, ktorá umožňuje počítať determinant *n*-tého stupňa pomocou *n* determinantov (*n*-1)-ého stupňa.

Definícia 1.2.22 Nech $n \in N,\ n \geq 2,\ \mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ je štvorcová matica stupňa n. ***Subdeterminant*** prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ je determinant matice $(n\text{-}1)$-ého stupňa, ktorú dostaneme vynechaním i-tého riadka a j-tého stĺpca matice $\mathbf{A}$ a označujeme ho $\left|\mathbf{A}_{ij}\right|$. ***Algebraický doplnok*** prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ je číslo $(-1)^{i+j} \cdot \left|\mathbf{A}_{ij}\right|$ a označujeme ho $\left|\overline{\mathbf{A}}_{ij}\right|$.

Príklad 1.2.21 Určte algebraický doplnok prvku a_{23} matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Riešenie. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad \left|\mathbf{A}_{23}\right| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}, \quad \left|\overline{\mathbf{A}}_{23}\right| = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 22$

Veta 1.2.5 (*o rozvoji determinantu*) Nech $n \in N,\ n \geq 2,\ \mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ je štvorcová matica stupňa n.

Rozvoj determinantu podľa i-tého riadka je vyjadrený vzťahom

$$\left|\mathbf{A}\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{ij}\right| = a_{i1} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{i1}\right| + a_{i2} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{i2}\right| + \ldots + a_{in} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{in}\right|,$$

rozvoj determinantu podľa j-tého **stĺpca** je vyjadrený vzťahom

$$\left|\mathbf{A}\right| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{ij}\right| = a_{1j} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{1j}\right| + a_{2j} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{2j}\right| + \ldots + a_{nj} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{nj}\right|.$$

Príklad 1.2.22 Vypočítajte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ rozvojom podľa jej

a) druhého riadka, b) prvého stĺpca, c) tretieho stĺpca.

Riešenie.

a) $i = 2$: $\left|\mathbf{A}\right| = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{2j}\right| = a_{21} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{21}\right| + a_{22} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{22}\right| + a_{23} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{23}\right|$

$$\left|\mathbf{A}\right| = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 152$$

b) $j = 1$: $\left|\mathbf{A}\right| = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{i1}\right| = a_{11} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{11}\right| + a_{21} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{21}\right| + a_{31} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{31}\right|$

$$\left|\mathbf{A}\right| = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 152$$

c) $j = 3$: $\left|\mathbf{A}\right| = \sum_{i=1}^{3} a_{i3} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{i3}\right| = a_{13} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{13}\right| + a_{23} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{23}\right| + a_{33} \cdot \left|\overline{\mathbf{A}}_{33}\right|$

$$\left|\mathbf{A}\right| = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 152$$

Veta 1.2.6 Nech $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ je štvorcová matica n-tého stupňa a nech $\mathbf{A}^T$ je matica k nej transponovaná. Potom platí $\left|\mathbf{A}\right|=\left|\mathbf{A}^T\right|$.

Veta 1.2.7 (***o determinante regulárnej matice***) Štvorcová matica je regulárna práve vtedy, keď je jej determinant rôzny od nuly. Determinant singulárnej matice je rovný nule.

Príklad 1.2.23 Rozhodnite, či je matica $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&1&0\\5&1&6\end{pmatrix}$ regulárna lebo singulárna, na základe výpočtu jej determinantu.

Riešenie. Determinant matice A vypočítame rozvojom podľa jej druhého riadka.

$$i=2:\quad \left|\mathbf{A}\right|=\sum_{j=1}^{3}a_{2j}\cdot\left|\overline{\mathbf{A}}_{2j}\right|=a_{21}\cdot\left|\overline{\mathbf{A}}_{21}\right|+a_{22}\cdot\left|\overline{\mathbf{A}}_{22}\right|+a_{23}\cdot\left|\overline{\mathbf{A}}_{23}\right|$$

$$\left|\mathbf{A}\right|=2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&6\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3&2\\5&6\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3&1\\5&1\end{vmatrix}=-8+8+0=0$$

Podľa vety 1.2.7 je matica $\mathbf{A}$ singulárna (jej riadkové vektory sú lineárne závislé).

Definícia 1.2.23 Nech $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ je štvorcová matica n-tého stupňa. Matica

$$adj\,\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\left|\overline{\mathbf{A}}_{11}\right|&\left|\overline{\mathbf{A}}_{21}\right|&\cdots&\left|\overline{\mathbf{A}}_{n1}\right|\\\left|\overline{\mathbf{A}}_{12}\right|&\left|\overline{\mathbf{A}}_{22}\right|&\cdots&\left|\overline{\mathbf{A}}_{n2}\right|\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\\left|\overline{\mathbf{A}}_{1n}\right|&\left|\overline{\mathbf{A}}_{2n}\right|&\cdots&\left|\overline{\mathbf{A}}_{nn}\right|\end{pmatrix}$$

sa nazýva ***adjungovanou maticou*** k matici $\mathbf{A}$, ak $\left|\overline{\mathbf{A}}_{ij}\right|$ je algebraický doplnok prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$, $i,j=1,2,...,n$.

Veta 1.2.8 Nech $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ je regulárna matica n-tého stupňa. Potom platí $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{\left|\mathbf{A}\right|}\cdot(adj\,\mathbf{A})$.

Príklad 1.2.24 Vypočítajte inverznú maticu k matici $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&-5\\1&-1\end{pmatrix}$.

Riešenie.

$\left|\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}4&-5\\1&-1\end{vmatrix}=1$ Matica $\mathbf{A}$ je podľa vety 1.2.7 regulárna, lebo $\left|\mathbf{A}\right|\neq 0$. Podľa vety 1.2.8 platí

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\left|\mathbf{A}\right|}\cdot(adj\,\mathbf{A})=\frac{1}{\left|\mathbf{A}\right|}\cdot\begin{pmatrix}\left|\overline{\mathbf{A}}_{11}\right|&\left|\overline{\mathbf{A}}_{21}\right|\\\left|\overline{\mathbf{A}}_{12}\right|&\left|\overline{\mathbf{A}}_{22}\right|\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-1&5\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&5\\-1&4\end{pmatrix}.$$

ÚLOHY

1.2.1 Dané sú matice $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. **Vypočítajte nasledujúce matice:**

a) $\mathbf{B}+\mathbf{C},\ \mathbf{C}+\mathbf{B}$
b) $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C},\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$
c) $\mathbf{B}^T,\ \mathbf{C}^T$
d) $\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^T,\ (\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})^T$
e) $-2\mathbf{B}+\mathbf{C}\cdot 3\mathbf{B}$
f) $\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}-\mathbf{B})+3\mathbf{E}_2$

1.2.2 Dané sú matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. **Zapíšte matice:**

a) $\mathbf{B}+\mathbf{A},\ \mathbf{A}+\mathbf{B}$
b) $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A},\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$
c) $\mathbf{B}^T,\ \mathbf{A}^T$
d) $-2\mathbf{AB}+3\mathbf{B}$
e) $\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}+5\mathbf{B}^T$
f) $\mathbf{B}^T\cdot(\mathbf{A}+5\mathbf{E}_3)$

1.2.3 Upravte dané matice pomocou ekvivalentných riadkových úprav na matice v redukovanom stupňovitom tvare a určte ich hodnosť.

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}-3 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 7\end{pmatrix}$

e) $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -2 & 3\\ -1 & -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$

f) $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 0 & -2 & 5\\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

1.2.4 Upravte dané matice pomocou ekvivalentných riadkových úprav na matice v stupňovitom tvare a určte ich hodnosť.

a) $\mathbf{M}_1=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 0\\ 7 & 1 & 2\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{M}_2=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 6\\ 3 & 5 & 2 & 7\\ 2 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{M}_3=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 5\\ 4 & 0 & 2 & 7\\ 2 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$

d) $\mathbf{M}_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 5\\ 2 & 0 & 1 & 7\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

e) $\mathbf{M}_5=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$

f) $\mathbf{M}_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 7 & 5 & 4\\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$

g) $\mathbf{M}_7=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$

h) $\mathbf{M_8} = \begin{pmatrix} 36 & 4{,}5 & 16{,}5 \\ 24 & 3 & 11 \\ 72 & 9 & 33 \\ 12 & 1{,}5 & 5{,}5 \\ 48 & 6 & 22 \end{pmatrix}$ i) $\mathbf{M_9} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ j) $\mathbf{M_{10}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.2.5 S použitím výpočtu hodnosti matice rozhodnite, či sú dané vektory lineárne závislé alebo lineárne nezávislé:

a) $\bar{a}_1 = (2;-1;1;8;2), \quad \bar{a}_2 = (2;-1;3;-2;4), \quad \bar{a}_3 = (4;-2;5;1;7)$

b) $\bar{a}_1 = (2;-3;5), \bar{a}_2 = (1;0;-2), \bar{a}_3 = (1;-7;9), \bar{a}_4 = (-1;0;1), \bar{a}_5 = (1;2;-3), \bar{a}_6 = (2;-1;0)$

c) $\bar{a}_1 = (1;0;2;3), \quad \bar{a}_2 = (-1;1;0;5), \quad \bar{a}_3 = (2;3;7;1)$

d) $\bar{a}_1 = (-1;-2;-1;-4), \quad \bar{a}_2 = (1;5;4;3), \quad \bar{a}_3 = (-1;-3;-2;-1), \quad \bar{a}_4 = (-2;-1;-3;-2)$

e) $\bar{a}_1 = (-1;-1;0;1), \quad \bar{a}_2 = (-2;0;-1;-2), \quad \bar{a}_3 = (-1;2;2;1), \quad \bar{a}_4 = (-3;-1;-1;-3)$

f) $\bar{a}_1 = (-2;-5;-7;-3), \quad \bar{a}_2 = (1;-1;0;0), \quad \bar{a}_3 = (-1;0;-2;-3)$

1.2.6 Určte inverzné matice k nasledujúcich maticiam:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -13 \\ 0 & 1 & -5 \\ 8 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

g) $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

h) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\mathbf{M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\mathbf{M_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1.2.7 Určte všeobecné riešenia nasledujúcich maticových rovníc:

a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} - \mathbf{C} = 2\mathbf{X} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

b) $\mathbf{C} + \mathbf{X}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

c) $\mathbf{B}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{A} + 3\mathbf{C}$

d) $\mathbf{X}\cdot\mathbf{A} - 3\mathbf{X} = \mathbf{X}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}$

e) $\mathbf{C}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E} - 3\mathbf{A}$

f) $\mathbf{A} + \mathbf{X} = 3\mathbf{A} - \mathbf{X}\cdot\mathbf{C}$

g) $\mathbf{X}\cdot\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = 3\mathbf{E} - \mathbf{X}\cdot\mathbf{B}$

h) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} - 7\mathbf{E} = 7\mathbf{A} - \mathbf{X}$

1.2.8 Riešte maticové rovnice najskôr všeobecne, potom pre dané matice.

a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} + 4\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{X}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{X}\cdot\mathbf{A} + 4\mathbf{B} = \mathbf{X} + \mathbf{C}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $7\mathbf{A} + 2\mathbf{X} = \mathbf{B} + \mathbf{X}\cdot 3 + 5\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}-3\mathbf{B}=\mathbf{E}-2\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&9\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

e) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}-3\mathbf{X}+\mathbf{A}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$

f) $5\mathbf{X}-\mathbf{A}-2\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}+4\mathbf{X}+\mathbf{C}$,

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&1&0&1\\0&0&2&1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3&0&1&0&1\\0&0&2&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&1&0&3&0\\2&0&1&4&0\end{pmatrix}$

g) $3\mathbf{A}-\mathbf{D}+\mathbf{X}=2\mathbf{A}+\mathbf{C}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&7&3\end{pmatrix}$

h) $2\mathbf{C}-\mathbf{D}+2\mathbf{X}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}+3\mathbf{X}-\mathbf{C}$,

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&7&3\end{pmatrix}$

1.2.9 Vypočítajte determinant matice.

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&2\\5&3\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&2\\5&3\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-4&9\\-8&0\end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\2&-1&0\\10&1&2\end{pmatrix}$

e) $\mathbf{F}=\begin{pmatrix}3&0&2\\2&4&-1\\1&3&-1\end{pmatrix}$

f) $\mathbf{H}=\begin{pmatrix}2&0&1&5\\1&0&4&0\\3&2&0&2\\1&0&3&4\end{pmatrix}$

g) $\mathbf{K}=\begin{pmatrix}2&1&1&6\\0&0&4&0\\1&2&0&2\\1&0&3&4\end{pmatrix}$

Výsledky

1.2.1 a) $\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{C}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&4\\3&4\end{pmatrix}$; **b)** $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&2\\3&7\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3&5\\2&6\end{pmatrix}$; **c)** $\mathbf{B}^T=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$;

$\mathbf{C}^T=\begin{pmatrix}-1&2\\3&2\end{pmatrix}$; **d)** $\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^T=\begin{pmatrix}3&5\\2&6\end{pmatrix}$, $(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})^T=\begin{pmatrix}3&2\\5&6\end{pmatrix}$; **e)** $\begin{pmatrix}9&13\\4&14\end{pmatrix}$; **f)** $\begin{pmatrix}4&0\\1&5\end{pmatrix}$;

1.2.2 a) nedefinované; **b)** $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ nie je definované, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}6&-1\\0&-3\\1&-5\end{pmatrix}$; **c)** $\mathbf{B}^T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&-1\end{pmatrix}$,

$\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&2&3\\1&-1&-1\end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix}-6&2\\0&0\\-2&7\end{pmatrix}$; **e)** $\begin{pmatrix}16&0&2\\-1&-17&-2\end{pmatrix}$; **f)** $\begin{pmatrix}16&0&2\\-1&-17&-2\end{pmatrix}$

1.2.3 **a)** $h(\mathbf{A})=2$, $\mathbf{A}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$; **b)** $h(\mathbf{B})=3$, $\mathbf{B}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; **c)** $h(\mathbf{C})=3$,

$\mathbf{C}\sim\begin{pmatrix}1&0&0{,}5&0\\0&1&-0{,}5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$; **d)** $h(D)=4$, $\mathbf{D}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$; **e)** $h(\mathbf{M})=3$,

$M\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; **f)** $h(\mathbf{N})=3$, $\mathbf{N}\sim\begin{pmatrix}1&0&0{,}5&0&2{,}5\\0&1&-1{,}5&0&1{,}5\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$

1.2.4 **a)** $h(\mathbf{M}_1)=3$; **b)** $h(\mathbf{M}_2)=2$; **c)** $h(\mathbf{M}_3)=4$; **d)** $h(\mathbf{M}_4)=3$; **e)** $h(\mathbf{M}_5)=4$;
f) $h(\mathbf{M}_6)=2$; **g)** $h(\mathbf{M}_7)=5$; **h)** $h(\mathbf{M}_8)=1$; **i)** $h(\mathbf{M}_9)=3$; **j)** $h(\mathbf{M}_{10})=3$

1.2.5 **a)** lineárne závislé; **b)** lineárne závislé; **c)** lineárne nezávislé; **d)** lineárne nezávislé;
e) lineárne nezávislé; **f)** lineárne nezávislé

1.2.6 **a)** $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}$; **b)** $\mathbf{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&\frac{5}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-9&5\\3&-1\end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{C}^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-17&2&-5\\-13&2&-3\\3&0&1\end{pmatrix}$; **d)** $\mathbf{D}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\-13&-5&-4\end{pmatrix}$; **e)** $\mathbf{F}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-6&7\\-4&8&-9\\1&-1&1\end{pmatrix}$;

f) $\mathbf{H}^{-1}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}1&-5&3\\-40&100&5\\-8&15&1\end{pmatrix}$; **g)** $\mathbf{K}^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&1\\-4&2&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$; **h)** $\mathbf{M}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$;

i) $\mathbf{M}_1^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\-2&4&0&-2\\3&-5&1&5\end{pmatrix}$; **j)** $\mathbf{M}_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&-1&0\\1&0&1&1\\-1&1&0&0\end{pmatrix}$;

1.2.7 **a)** $\mathbf{X}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{C})$; **b)** $\mathbf{X}=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}^{-1}$; **c)** $\mathbf{X}=\mathbf{B}^{-1}\cdot3\mathbf{C}\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$;
d) $\mathbf{X}=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}-3\mathbf{E}-\mathbf{C})^{-1}$; **e)** $\mathbf{X}=\mathbf{C}^{-1}\cdot(\mathbf{E}-3\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}^{-1}$; **f)** $\mathbf{X}=2\mathbf{A}\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{C})^{-1}$;
g) $\mathbf{X}=(3\mathbf{E}-2\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}$; **h)** $\mathbf{X}=7\cdot\mathbf{E}$

1.2.8 **a)** $\mathbf{X}=(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}\cdot(\mathbf{C}-4\mathbf{B})$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-0{,}5&21\\-1&-5{,}5\end{pmatrix}$; **b)** $\mathbf{X}=(\mathbf{C}-4\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}$,
$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-1{,}5&-1\\17&-4{,}5\end{pmatrix}$; **c)** $\mathbf{X}=2\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&4&2&3\\-2&-9&9&0\end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{X}=(\mathbf{A}+2\mathbf{B})^{-1}\cdot(\mathbf{E}+3\mathbf{B})$, $\mathbf{X}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}6 & -49\\ 0 & 17\end{pmatrix}$; **e)** $\mathbf{X}=(\mathbf{A}+3\mathbf{E})^{-1}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{A})$,

$\mathbf{X}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}4 & 4\\ 7 & 3\end{pmatrix}$; **f)** $\mathbf{X}=2\mathbf{A}-\mathbf{B}+3\mathbf{C}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 9 & 1\\ 6 & 0 & 5 & 14 & 1\end{pmatrix}$; **g)** $\mathbf{X}=\mathbf{C}-\mathbf{A}+\mathbf{D}$,

$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$; **h)** $\mathbf{X}=-\mathbf{A}-2\mathbf{B}+3\mathbf{C}-\mathbf{D}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-1 & -5 & -3\\ -4 & -11 & -1\end{pmatrix}$

1.2.9 **a)** $|\mathbf{A}|=2$; **b)** $|\mathbf{B}|=-13$; **c)** $|\mathbf{C}|=72$; **d)** $|\mathbf{D}|=52$; **e)** $|\mathbf{F}|=1$; **f)** $|\mathbf{H}|=-46$;

g) $|\mathbf{K}|=-8$

Wondershare PDFelement

1.3 Systémy lineárnych rovníc

Systémy lineárnych rovníc majú široké uplatnenie pri modelovaní ekonomických procesov a rôznych optimalizačných úlohách. Pri definovaní a riešení systémov lineárnych rovníc budeme využívať maticovú algebru.

Definícia 1.3.1 Nech $m,\ n \in N$. Množina rovníc

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú neznáme, $a_{ij},\ b_i \in R$, $i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$

sa nazýva ***systém m lineárnych rovníc s n neznámymi***. Reálne čísla a_{ij} sa nazývajú ***koeficienty*** systému lineárnych rovníc. Reálne čísla b_i sa nazývajú ***absolútne členy*** alebo ***pravé strany*** systému lineárnych rovníc.

Systém lineárnych rovníc sa nazýva ***homogénny***, ak $b_i = 0$ pre každé $i = 1,2,\ldots,m$.

Systém lineárnych rovníc sa nazýva ***nehomogénny***, ak aspoň jedno z čísel $b_i \neq 0$.

Poznámka 1.3.1 Každému systému lineárnych rovníc môžeme jednoznačne priradiť dve matice, a to maticu systému a rozšírenú maticu systému lineárnych rovníc.

Matica systému $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ je tvorená koeficientami systému lineárnych rovníc.

Rozšírená matica systému $\overline{\mathbf{A}} = \left[\overline{a}_{ij} \right]_{m \times (n+1)}$ je zložená z matice systému $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]_{m \times 1}$ tvorenej pravými stranami systému lineárnych rovníc.

Schematicky ju môžeme zapísať $\overline{\mathbf{A}}_{m \times (n+1)} = \left(\mathbf{A}_{m \times n} \middle| \mathbf{B}_{m \times 1} \right)$.

Príklad 1.3.1 Priraďte maticu systému a rozšírenú maticu systému lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 20 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -6 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Riešenie.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 4 & 0 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Poznámka 1.3.2

Zápis systému lineárnych rovníc uvedený v definícii 1.3.1 sa nazýva zápis systému lineárnych rovníc ***v základnom tvare***.

Systém lineárnych rovníc môžeme zapísať aj ***v maticovom tvare*** $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Prvkami matice $\mathbf{X} = \left[x_{ij} \right]_{n \times 1}$ sú $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

Poznámka 1.3.3 Maticový zápis systému lineárnych rovníc sa často používa v tvare $\mathbf{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$,

kde $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je **vektor neznámych** a $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ je **vektor pravých strán** rovníc.

Príklad 1.3.2 Systém lineárnych rovníc uvedený v príklade 1.3.1 zapíšte v maticovom tvare.

Riešenie.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Príklad 1.3.3 Podnik vyrába tri druhy výrobkov V_1, V_2, V_3 v neznámych množstvách x_1, x_2, x_3 daných maticou výroby **V**. Na výrobu každého z nich spotreboval tri druhy surovín S_1, S_2, S_3 v celkových množstvách s_1, s_2, s_3 daných maticou spotreby **S**. Matica spotreby **S** a matica technologických koeficientov **A** sú známe, a platí

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{S} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{V} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Pomocou systému lineárnych rovníc zapíšte situáciu pre určenie neznámych množstiev x_1, x_2, x_3 vyprodukovaných výrobkov V_1, V_2, V_3.

Riešenie. Prislúchajúci systém lineárnych rovníc zapíšeme v základnom tvare

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 21 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 28 \end{aligned}$$

aj v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix}_{3\times 1}.$$

Vynásobením matíc na ľavej strane maticového tvaru a použitím definície rovnosti matíc, môžeme previesť maticový tvar na základný tvar.

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix}_{3\times 1}.$$

Definícia 1.3.2 ***Riešením systému*** m lineárnych rovníc s n neznámymi nazývame takú usporiadanú n-ticu čísel $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, pre ktorú po dosadení čísel $c_1, c_2, \ldots, c_n$ za neznáme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do systému lineárnych rovníc dostaneme m rovností.

Množina všetkých riešení je $M = \left\{ \bar{c} \in R^n ; \mathbf{A} \cdot \bar{c} = \bar{b} \right\}$.

Všeobecné riešenie v parametrickom tvare popisuje všetky riešenia systému lineárnych rovníc.

Partikulárne riešenie je jedno konkrétne riešenie systému lineárnych rovníc. Určíme ho z všeobecného riešenia dosadením konkrétnych reálnych čísel za voliteľné neznáme.

Základné riešenie je partikulárne riešenie, v ktorom sa voliteľné neznáme rovnajú nule.

Poznámka 1.3.4 V prípade maticového zápisu systému lineárnych rovníc v tvare $\mathbf{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$, je riešenie v tvare stĺpcového vektora $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ pre ktorý platí $\mathbf{A} \cdot \bar{c} = \bar{b}$.

Definícia 1.3.3 Systém lineárnych rovníc sa nazýva ***riešiteľný***, ak má aspoň jedno riešenie, teda ak je množina všetkých riešení neprázdna ($M \neq \emptyset$).
Systém lineárnych rovníc sa nazýva ***neriešiteľný***, ak nemá ani jedno riešenie, teda ak je množina všetkých riešení prázdna ($M = \emptyset$).

Veta 1.3.1 (*Frobeniova veta*) Systém m lineárnych rovníc s n neznámymi je ***riešiteľný*** práve vtedy, ak sa hodnosť matice systému rovná hodnosti rozšírenej matice systému, teda ak platí

$$h(\mathbf{A}) = h\left(\bar{\mathbf{A}}\right).$$

Poznámka 1.3.5 Frobeniova veta hovorí o tom, či existuje alebo neexistuje aspoň jedno riešenie daného systému lineárnych rovníc.

Poznámka 1.3.6 Pre ***homogénny*** systém lineárnych rovníc $\mathbf{A} \cdot \bar{x} = \bar{o}$ vždy platí $h(\mathbf{A}) = h\left(\bar{\mathbf{A}}\right)$, podľa Frobeniovej vety je teda ***vždy riešiteľný***.

Veta 1.3.2 Nech $\mathbf{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$ je systém m lineárnych rovníc s n neznámymi. Potom platí:
(1) ak $h(\mathbf{A}) = h\left(\bar{\mathbf{A}}\right) = n$, tak systém lineárnych rovníc má práve jedno riešenie,
(2) ak $h(\mathbf{A}) = h\left(\bar{\mathbf{A}}\right) < n$, tak systém lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení s $n - h(\mathbf{A})$ parametrami (voľnými neznámymi) a s $h(\mathbf{A})$ viazanými neznámymi,
(3) ak $h(\mathbf{A}) \neq h\left(\bar{\mathbf{A}}\right)$, tak systém lineárnych rovníc nemá riešenie.

Poznámka 1.3.7 V prípade homogénneho systému lineárnych rovníc môžu nastať len možnosti (1) a (2). Ak $h(\mathbf{A}) = h\left(\bar{\mathbf{A}}\right) = n$, tak homogénny systém lineárnych rovníc má práve jedno riešenie, a to triviálne riešenie $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Ak $h(\mathbf{A}) = h\left(\bar{\mathbf{A}}\right) < n$, tak homogénny systém lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení.

Veta 1.3.3 Ak systém lineárnych rovníc S_1 vznikne zo systému lineárnych rovníc S_2 niektorou z nasledujúcich úprav:

(1) vzájomnou výmenou dvoch rovníc systému,
(2) vynásobením niektorej z rovníc systému nenulovým číslom,
(3) pripočítaním násobku rovnice k inej rovnici,
(4) vynechaním rovnice systému, ktorá je lineárnou kombináciou iných rovníc systému,
(5) pridaním rovnice do systému, ktorá je lineárnou kombináciou iných rovníc systému,

tak tieto systémy rovníc sú ekvivalentné.

Poznámka 1.3.9 Ekvivalentné úpravy systému lineárnych rovníc nemenia počet neznámych, menia iba koeficienty a pravé strany systému, teda prvky príslušnej rozšírenej matice systému.

Veta 1.3.4 (*o ekvivalentných systémoch lineárnych rovníc*) Ak rozšírené matice dvoch systémov lineárnych rovníc sú riadkovo ekvivalentné, tak tieto systémy lineárnych rovníc sú ekvivalentné.

Poznámka 1.3.10 Vzhľadom na vzájomne jednoznačné priradenie medzi systémom lineárnych rovníc a jeho rozšírenou maticou, môžeme ekvivalentné úpravy uskutočňovať na rozšírenej matici systému. Elementárnymi riadkovými úpravami ju upravíme na ekvivalentnú maticu v stupňovitom (Gaussovom) alebo redukovanom stupňovitom (Jordanovom) tvare. Táto matica je rozšírenou maticou ekvivalentného systému lineárnych rovníc, ktorý je jednoduchšie riešiteľný.

Metódy riešenia systému lineárnych rovníc, ktoré nemenia množinu riešení a vhodným spôsobom eliminujú z riadkov systému lineárnych rovníc jednotlivé neznáme, sa nazývajú eliminačné. K najznámejším patria Gaussova eliminačná metóda a Jordanova eliminačná metóda.

Gaussova eliminačná metóda je založená na úprave rozšírenej matice riešeného systému lineárnych rovníc na ekvivalentnú maticu $\overline{\mathbf{G}}$ v stupňovitom tvare. Postup hľadania $\overline{\mathbf{G}}$ sa nazýva *priamy chod Gaussovej eliminácie*. Keďže je $\overline{\mathbf{G}}$ v stupňovitom tvare, vieme určiť jej hodnosť a rozhodnúť o riešiteľnosti a počte riešení systému lineárnych rovníc. Z riešiteľného systému v Gaussovom tvare postupne zdola nahor vypočítame neznáme. Tento postup sa nazýva *spätný chod Gaussovej eliminácie*.

Príklad 1.3.4 Gaussovou eliminačnou metódou riešte systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 20 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Riešenie.

Priamy chod Gaussovej eliminácie:

$$\overline{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 4 & 0 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 \\ \updownarrow \\ R_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 20 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} R_2 \\ \updownarrow \\ R_4 \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&-1&6\\0&-1&1&-2&2\\1&1&-1&1&-1\\3&-2&4&0&20\end{array}\right)\begin{matrix}\\\\R_3+(-1)R_1\\R_4+(-3)R_1\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&-1&6\\0&-1&1&-2&2\\0&3&-2&2&-7\\0&4&1&3&2\end{array}\right)\begin{matrix}\\\\R_3+3R_2\\R_4+4R_2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&-1&6\\0&-1&1&-2&2\\0&0&1&-4&-1\\0&0&5&-5&10\end{array}\right)\begin{matrix}\\\\\\R_4+(-5)R_3\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&-2&1&-1&6\\0&\mathbf{-1}&1&-2&2\\0&0&\mathbf{1}&-4&-1\\0&0&0&\mathbf{15}&15\end{array}\right)=\bar{\mathbf{G}}\sim\bar{\mathbf{A}}$$

Rozhodnutie o riešiteľnosti a počte riešení systému lineárnych rovníc:
Systém lineárnych rovníc je riešiteľný a má jediné riešenie, lebo $h(\mathbf{A})=h\left(\bar{\mathbf{A}}\right)=4=n$.

Spätný chod Gaussovej eliminácie:

$$\begin{aligned}x_1-2x_2+x_3-\ x_4&=\ 6\\-x_2+x_3-2x_4&=\ 2\\x_3-4x_4&=-1\\15x_4&=15\end{aligned}$$

Z týchto rovníc postupne zdola nahor vypočítame $\begin{aligned}x_1&=\ 2\\x_2&=-1\\x_3&=\ 3\\x_4&=\ 1\end{aligned}$.

Množina všetkých riešení daného systému lineárnych rovníc je $M=\left\{(2,-1,3,1)\in R^4\right\}$.

O správnosti riešenia sa presvedčíme skúškou v maticovom tvare:

Ľ: $\begin{pmatrix}3&-2&4&4\\1&-2&1&-1\\1&1&-1&1\\0&-1&1&-2\end{pmatrix}_{4\times4}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix}_{4\times1}=\begin{pmatrix}20\\6\\-1\\2\end{pmatrix}_{4\times1}$ Ľ = P

Príklad 1.3.5 Gaussovou eliminačnou metódou riešte systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}x_1-x_3+x_4+\ x_5&=-1\\2x_2+4x_3+2x_5&=\ 3\\3x_1+4x_2+6x_3+3x_4+7x_5&=\ 4\end{aligned}$$

Riešenie.

Priamy chod Gaussovej eliminácie:

$$\bar{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-1&1&1&-1\\0&2&4&0&2&3\\3&4&6&3&7&4\end{array}\right)\begin{matrix}\\\\R_3+(-3)R_1\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-1&1&1&-1\\0&2&4&0&2&3\\0&4&9&0&4&7\end{array}\right)\begin{matrix}\\\\R_3+(-2)R_2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}\mathbf{1}&0&-1&1&1&-1\\0&\mathbf{2}&4&0&2&3\\0&0&\mathbf{1}&0&0&1\end{array}\right)=\bar{\mathbf{G}}$$

Rozhodnutie o riešiteľnosti a počte riešení systému lineárnych rovníc: Systém lineárnych rovníc je riešiteľný a má nekonečne veľa riešení, lebo $h(\mathbf{A})=h\left(\bar{\mathbf{A}}\right)=3<5=n$.

Spätný chod Gaussovej eliminácie:

$$\begin{aligned} x_1 \quad &- \; x_3 + x_4 + \; x_5 = -1 \\ 2x_2 + 4x_3 \quad &+ 2x_5 = \; 3 \\ x_3 \quad &= \; 1 \end{aligned}$$

Z uvedeného systému rovníc vypočítame $\begin{aligned} x_1 &= -x_4 - x_5 \\ x_2 &= -0,5 - x_5 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$.

Systém lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení s dvomi $(n - h(\mathbf{A}) = 5 - 3 = 2)$ voľnými neznámymi, za ktoré sme si zvolili x_4 a x_5. Viazané neznáme x_1, x_2, x_3 sme vyjadrili pomocou voľných neznámych, a tým sme dostali všeobecné riešenie daného systému lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_4 - x_5 \\ x_2 &= -0,5 - x_5 \\ x_3 &= 1 \\ x_4, x_5 &\in R \end{aligned} \; .$$

Všeobecné riešenie môžeme napísať v parametrickom tvare, ak voľné premenné vyjadríme ako parametre $x_4 = s, \quad x_5 = t,$ kde $s, t \in R$:

$$\begin{aligned} x_1 &= -s - t \\ x_2 &= -0,5 - t \\ x_3 &= 1 \\ s, t &\in R \end{aligned} \; .$$

Množina všetkých riešení je $M = \left\{ \left(-s - t; -0,5 - t;\ 1;\ s;\ t \right) \in R^5;\ s, t \in R \right\}$.

Partikulárne riešenie systému lineárnych rovníc je konkrétne riešenie z množiny všetkých riešení. Partikulárnych riešení je nekonečne veľa. Zvolíme si napríklad $s = 1, t = 0$ a dostaneme partikulárne riešenie $\left(-1; -0,5;\ 1;\ 1;\ 0 \right) \in R^5$.

Skúšku správnosti riešenia urobíme v maticovom tvare pre zvolené partikulárne riešenie:

$$\text{Ľ:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{5\times 1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{3\times 1} \qquad \text{Ľ} = \text{P}$$

Wondershare PDFelement

Príklad 1.3.6 Gaussovou eliminačnou metódou riešte systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - \; x_4 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + \; x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 - \; x_2 \qquad + 5x_4 &= 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + \; x_3 - 8x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Riešenie.

Priamy chod Gaussovej eliminácie:

$$\overline{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 + (-1)R_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ R_2 + (-3)R_1 \\ R_3 + (-2)R_1 \\ R_4 + (-5)R_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -18 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ R_3 + (-1)R_2 \\ R_4 + (-2)R_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) = \overline{\mathbf{G}}$$

Rozhodnutie o riešiteľnosti a počte riešení: Systém lineárnych rovníc nemá riešenie, lebo $h(\mathbf{A}) = 3 \neq 4 = h\left(\overline{\mathbf{A}}\right)$.

Jordanova eliminačná metóda, tzv. ***metóda úplnej eliminácie*** je rozšírením Gaussovej metódy. Jej základom je úprava rozšírenej matice riešeného systému lineárnych rovníc na ekvivalentnú maticu $\overline{\mathbf{J}}$ v redukovanom stupňovitom tvare. Gaussova eliminácia dáva pomerne rýchlu odpoveď na otázku riešiteľnosti a počtu riešení systému lineárnych rovníc, ale hľadanie samotného riešenia spätným chodom Gaussovej eliminácie býva zdĺhavé. Na určenie množiny riešení systému lineárnych rovníc sa preto používa častejšie Jordanova eliminačná metóda.

Postupujeme pri nej nasledujúcim spôsobom:

- Rozšírenú maticu riešeného systému lineárnych rovníc upravíme ekvivalentnými riadkovými úpravami na stupňovitý tvar a rozhodneme o riešiteľnosti systému. Ak je systém riešiteľný, tak určíme aj počet riešení.
- Ak je systém riešiteľný, tak rozšírenú maticu systému upravíme z Gaussovho na Jordanov tvar, t.j. na ekvivalentnú maticu $\overline{\mathbf{J}}$ v redukovanom stupňovitom tvare. Určíme k nej zodpovedajúci ekvivalentný systém lineárnych rovníc a jeho riešenie.

Príklad 1.3.7 Jordanovou eliminačnou metódou riešte systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 \qquad - 2x_4 &= 0 \end{aligned}.$$

a) Rozhodnite o riešiteľnosti a počte riešení daného systému lineárnych rovníc.
b) Nájdite množinu všetkých riešení.
c) Určte jedno partikulárne riešenie.

Riešenie.

$$\overline{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ R_2 + (-2)R_1 \\ R_3 + (-1)R_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ R_3 + (-1)R_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_2 \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_1 + (-2)R_2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \overline{\mathbf{J}}$$

a) Rozhodnutie o riešiteľnosti a počte riešení: Systém lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení, lebo $h(\mathbf{A}) = h\left(\overline{\mathbf{A}}\right) = 2 < 4 = n$. Počet voľných neznámych je $n - h(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$.

b) Matici $\overline{\mathbf{J}}$ zodpovedá systém lineárnych rovníc $x_1 - x_3 - 5x_4 = 0$, $x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$. Vyjadríme z neho všeobecné riešenie $x_1 = x_3 + 5x_4$, $x_2 = -x_3 - 3x_4$, $x_3, x_4 \in R$.

Všeobecné riešenie v parametrickom tvare je $x_1 = s + 5t$, $x_2 = -s - 3t$, $s, t \in R$.

Množina všetkých riešení je $M = \left\{(s + 5t, -s - 3t, s, t) \in R^4;\ s, t \in R\right\}$.

c) Ak zvolíme $s = -1,\ t = 1$, dostaneme partikulárne riešenie $(4, -2, -1, 1) \in R^4$.

Skúšku správnosti urobíme v maticovom tvare pre zvolené partikulárne riešenie:

$$\text{Ľ:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1} \qquad \text{Ľ} = \text{P}$$

Príklad 1.3.8 Nech $\overline{\mathbf{A}}$ je rozšírená matica systému lineárnych rovníc a nech platí $\overline{\mathbf{A}} \sim \overline{\mathbf{J}}$. Rozhodnite o riešiteľnosti a o počte riešení daného systému lineárnych rovníc. Ak je systém riešiteľný, nájdite všeobecné riešenie systému, množinu všetkých riešení a určte partikulárne riešenie.

a) $\overline{J} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

b) $\overline{J} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

c) $\overline{J} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

d) $\overline{J} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Riešenie.

a) Systém lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení, lebo $h(\mathbf{A}) = h\left(\overline{\mathbf{A}}\right) = 2 < 3 = n$.

Počet voľných neznámych je $n - h(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$.

Matici $\overline{\mathbf{J}}$ zodpovedá systém lineárnych rovníc $x_1 + x_3 = 0,\ x_2 - x_3 = 0$.

Vyjadríme z neho všeobecné riešenie $x_1 = -x_3,\ x_2 = x_3,\ x_3 \in R$.

Všeobecné riešenie v parametrickom tvare je $x_1 = -t,\ x_2 = t,\ t \in R$.

Množina všetkých riešení je $M = \left\{(-t, t, t) \in R^3;\ t \in R\right\}$.

Ak zvolíme $t = 1$, dostaneme partikulárne riešenie $(-1, 1, 1) \in R^3$.

b) Systém lineárnych rovníc nemá riešenie, lebo $2 = h(\mathbf{A}) \neq h\left(\overline{\mathbf{A}}\right) = 3$.

c) Systém lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení, lebo $h(\mathbf{A}) = h\left(\overline{\mathbf{A}}\right) = 2 < 3 = n$.

Počet voľných neznámych je $n - h(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$.

Matici $\overline{\mathbf{J}}$ zodpovedá systém lineárnych rovníc $x_1 + x_3 = 3,\ x_2 - x_3 = 2$.

Vyjadríme z neho všeobecné riešenie $x_1 = 3 - x_3,\ x_2 = 2 + x_3,\ x_3 \in R$.

Všeobecné riešenie v parametrickom tvare je $x_1 = 3 - t,\ x_2 = 2 + t,\ t \in R$.

Množina všetkých riešení je $M = \left\{(3 - t, 2 + t, t) \in R^3;\ t \in R\right\}$.

Ak zvolíme $t = 1$, dostaneme partikulárne riešenie $(2, 3, 1) \in R^3$.

d) Systém lineárnych rovníc má jediné riešenie, lebo $h(\mathbf{A}) = h\left(\overline{\mathbf{A}}\right) = 3 = n$.

Matici $\overline{\mathbf{J}}$ zodpovedá systém lineárnych rovníc $x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$.

Množina všetkých riešení je jednoprvková množina $M = \left\{(3, 0, 2) \in R^3\right\}$.

Ak zvolíme $t = 1$, dostaneme partikulárne riešenie $(-1, 1, 1) \in R^3$.

ÚLOHY

1.3.1 Rozhodnite o riešiteľnosti a o počte riešení systému lineárnych rovníc.

a) $x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7, \quad x_2 - x_3 = 1$

b) $-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -9, \quad x_1 + x_2 = 0, \quad -3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 15, \quad -x_4 = -6$

c) $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \quad 2x_1 + 4x_2 = 6, \quad -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7$

d) $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \quad 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \quad -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -2$

e) $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \quad -x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \quad x_1 + 2x_2 - 7x_4 = 5$

f) $-x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -4, \quad x_1 - x_2 + x_4 = 2, \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -2$

g) $x_1 + x_3 = 3, \quad 2x_2 - 2x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 = 2$

h) $-x_1 + 3x_3 = -2, \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -2, \quad x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -4$

1.3.2 Jordanovou eliminačnou metódou nájdite množinu všetkých riešení daného systému lineárnych rovníc a určte dve partikulárne riešenia (ak existujú).

a) $x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7, \quad x_2 - x_3 = 1$

b) $-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -9, \quad x_1 + x_2 = 0, \quad -3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 15, \quad -x_4 = -6$

c) $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \quad 2x_1 + 4x_2 = 6, \quad -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7$

d) $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \quad 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \quad -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -2$

e) $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \quad -x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \quad x_1 + 2x_2 - 7x_4 = 5$

f) $-x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -4, \quad x_1 - x_2 + x_4 = 2, \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -2$

g) $x_1 + x_3 = 3, \quad 2x_2 - 2x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 = 2$

h) $-x_1 + 3x_3 = -2, \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -2, \quad x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -4$

1.3.3 Nech $\bar{\mathbf{A}}$ je rozšírená matica systému lineárnych rovníc a nech platí $\bar{\mathbf{A}} \sim \bar{\mathbf{J}}$. Rozhodnite o riešiteľnosti a o počte riešení daného systému lineárnych rovníc. Ak je systém riešiteľný, nájdite všeobecné riešenie systému, množinu všetkých riešení a určte partikulárne riešenie.

a) $\bar{J} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

b) $\bar{J} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$

c) $\bar{J} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 40 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

d) $\bar{J} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$

e) $\bar{J} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

f) $\bar{J} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right)$

g) $\bar{J} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

1.3.4 Riešte homogénny systém lineárnych rovníc Jordanovou eliminačnou metódou.

a) $x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \quad x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0$

b) $-x_1 + 3x_3 = 0, \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$

c) $3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \quad -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$

1.3.5 Riešte nehomogénny systém lineárnych rovníc Jordanovou eliminačnou metódou.

a) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \quad 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 11, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$

b) $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1; 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -6; x_2 - x_3 - x_4 = -1; 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7$

c) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \quad 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 11$

Výsledky

1.3.1 a) je riešiteľný, má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 2 < 3$; **b)** je riešiteľný, má jediné riešenie, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 4$; **c)** je riešiteľný, má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 2 < 3$; **d)** je riešiteľný, má jediné riešenie, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 3$; **e)** nemá riešenie, $2 = h(\mathbf{A}) \neq h(\overline{\mathbf{A}}) = 3$; **f)** je riešiteľný, má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 2 < 4$; **g)** nemá riešenie, $2 = h(\mathbf{A}) \neq h(\overline{\mathbf{A}}) = 3$; **h)** je riešiteľný, má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 2 < 4$

1.3.2 a) $M = \{(5 + 2t, 1 + t, t) \in R^3;\ t \in R\}$, partikulárne riešenie pre $t = 0$ je $(5, 1, 0) \in R^3$, pre $t = 1$ je $(7, 2, 1) \in R^3$; **b)** $M = \{(-2, 2, -7, 0) \in R^4\}$;

c) $M = \{(-5 - 4t, 4 + 2t, t) \in R^3;\ t \in R\}$, partikulárne riešenie pre $t = 0$ je $(-5, 4, 0)$, pre $t = -1$ je $(-1, 2, -1) \in R^3$; **d)** $M = \{(1, 2, -1) \in R^3\}$; **e)** $M = \varnothing$;

f) $M = \{(1 - 0{,}5s - t; -1 - 0{,}5s; s; t) \in R^4;\ s, t \in R\}$ partikulárne riešenie pre $s = t = 0$ je $(1, -1, 0, 0) \in R^4$, pre $s = 0, t = -1$ je $(2, -1, 0, -1) \in R^4$; **g)** $M = \varnothing$;

h) $M = \{(2 + 3s; 3 + 3{,}5s + 0{,}5t; s; t) \in R^4;\ s, t \in R\}$, partikulárne riešenie pre $s = t = 0$ je $(2, 3, 0, 0) \in R^4$, pre $s = 1, t = -1$ je $(5, 6, 1, -1) \in R^4$

1.3.3 a) je riešiteľný, má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 2 < 3$, všeobecné riešenie je $x_1 = 2x_3,\ x_2 = 4x_3,\ x_3 \in R,\ M = \{(2t, 4t, t) \in R^3;\ t \in R\}$, partikulárne riešenie pre $t = 1$ je $(2, 4, 1) \in R^3$; **b)** nie je riešiteľný, lebo $2 = h(\mathbf{A}) \neq h(\overline{\mathbf{A}}) = 3,\ M = \varnothing$;

c) je riešiteľný, má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 2 < 3$, všeobecné riešenie je $x_1 = 40 - 8x_3,\ x_2 = -2 + x_3,\ x_3 \in R,\ M = \{(40 - 8t, -2 + t, t) \in R^3;\ t \in R\}$, partikulárne riešenie pre $t = 1$ je $(32, -1, 1) \in R^3$; **d)** je riešiteľný, má práve jedno riešenie, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 3$, všeobecné riešenie je $x_1 = -3,\ x_2 = 10,\ x_3 = -2,\ M = \{(1, 2, -1) \in R^3\}$;

e) je riešiteľný, má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 3 < 4$, všeobecné riešenie je

$x_1 = -2 - 6x_4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 2x_4$, $x_4 \in R$, $M = \{(-2-6t, 8, 2t, t) \in R^4;\ t \in R\}$,
partikulárne riešenie pre $t = 1$ je $(-8, 8, 2, 1) \in R^4$;

f) je riešiteľný, má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 3 < 6$, všeobecné riešenie je
$x_1 = -x_3 + 4x_6$, $x_2 = 15 - 2x_3 - x_5$, $x_4 = -4 - 2x_5 + 2x_6$, $x_3, x_5, x_6 \in R$,
$M = \{(-r+4t, 15-2r-s, r, -4-2s+2t, s, t) \in R^6;\ r, s, t \in R\}$, partikulárne riešenie
pre $r = s = t = 1$ je $(3, 12, 1, -4, 1, 1) \in R^6$; **g)** je riešiteľný, má nekonečne veľa riešení,
$h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 3 < 4$, všeobecné riešenie je $x_1 = 2 + 2x_3$, $x_2 = 3 - 9x_3$, $x_4 = 5$, $x_3 \in R$,
$M = \{(2+2t, 3-9t, t, 5) \in R^4;\ t \in R\}$, partikulárne riešenie pre $t = 1$ je $(4, -6, 1, 5) \in R^4$

1.3.4 **a)** má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 2 < 5$, všeobecné riešenie je
$x_1 = -2x_3 - x_4 + x_5$, $x_2 = 2x_3 - x_4 - 3x_5$, $x_3, x_4, x_5 \in R$,
$M = \{(-2r - s + t, 2r - s - 3t, r, s, t) \in R^5;\ t \in R\}$, partikulárne riešenie pre $r = s = t = 1$
je $(-2, -2, 1, 1, 1) \in R^5$;

b) má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 2 < 4$, všeobecné riešenie je
$x_1 = 3x_3$, $x_2 = 3{,}5x_3 - 0{,}5x_4$, $x_3, x_4, x_5 \in R$,
$M = \{(3s;\ 3{,}5s + 0{,}5t;\ s;\ t) \in R^4;\ s, t \in R\}$, partikulárne riešenie pre $s = t = 1$ je
$(3, 4, 1, 1) \in R^4$;

c) má len triviálne riešenie, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 3$, $M = \{(0, 0, 0) \in R^3\}$

1.3.5 **a)** je riešiteľný, má jediné riešenie, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 3$, $x_1 = 4{,}4$, $x_2 = 0{,}6$, $x_3 = -2$,
$M = \{(4{,}4;\ 0{,}6; -2) \in R^3\}$;

b) nemá riešenie, $2 = h(\mathbf{A}) \neq h(\overline{\mathbf{A}}) = 3$;

c) je riešiteľný, má nekonečne veľa riešení, $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = 2 < 3$, všeobecné riešenie je
$x_1 = -2{,}2 - 2{,}4x_3$, $x_2 = 2{,}2 + 0{,}4x_3$, $x_3 \in R$,
$M = \{(-2{,}2 - 2{,}4t;\ 2{,}2 + 0{,}4t;\ t) \in R^3;\ t \in R\}$, partikulárne riešenie pre $t = -1$ je
$(0{,}2;\ 1{,}8;\ -1) \in R^3$

2 Funkcia jednej reálnej premennej, limita funkcie a jej použitie

2.1 Pojem funkcia

Pojem funkcia patrí medzi najdôležitejšie pojmy matematiky, ktorý opisuje vzťah medzi dvomi alebo viacerými veličinami. Veličinu v matematike chápeme ako pojem, ktorý opisuje kvantitatívne vlastnosti reálnych a abstraktných objektov (napr. výška úrokovej miery v banke, počet nezamestnaných v istej oblasti a iné). Keďže tieto veličiny menia svoju hodnotu, resp. veľkosť, nazývame ich premennými veličinami, skrátene *premennými*.

V druhej, tretej a piatej kapitole sa budeme zaoberať pojmom funkcia jednej reálnej premennej, čo znamená, že budeme pracovať len s funkciami definovanými na množine reálnych čísel alebo na jej podmnožine. Množinu všetkých konečných reálnych čísel označujeme R a môžeme ju zapísať aj pomocou intervalu $(-\infty;\infty)$. Platí teda

$$R=(-\infty;\infty)$$

Definícia 2.1.1 ***Reálna funkcia*** je zobrazenie neprázdnej množiny A do množiny reálnych čísel, tzn.

$$f: A \to R,\ \ A \neq \emptyset$$

Teda každému prvku $x \in A$ je priradený práve jeden taký prvok $y \in R$, že platí $y = f(x)$.
Ak je množina A podmnožinou reálnych čísel, hovoríme o ***reálnej funkcii reálnej premennej***.

Pod pojmom *funkcia* budeme vždy rozumieť reálnu funkciu jednej reálnej premennej. Množinu A nazývame ***definičným oborom*** funkcie a označujeme $D(f)$. Platí

$$D(f)=\{x \in R;\ \exists y \in R,\ y=f(x)\}$$

Množinu všetkých hodnôt $y \in R$ nazývame ***oborom hodnôt*** funkcie a označujeme $H(f)$. Platí

$$H(f)=\{y \in R;\ \exists x \in D(f),\ y=f(x)\}$$

Funkcia je teda určená (definovaná) definičným oborom $A \subset R$ a predpisom (rovnicou, výrokovou formou) v tvare

$$f: y=f(x),\ \ x \in A$$

Niekedy je funkcia zadaná iba predpisom. Vtedy za jej definičný obor považujeme „najväčšiu“ možnú množinu, tzv. *prirodzený definičný obor* alebo jednoducho definičný obor. Ide o množinu všetkých x, pre ktoré má výraz $f(x)$ zmysel.

Číslo $f(x)$ nazývame *funkčnou hodnotou funkcie f* v čísle (bode) x. Číslo x z množiny A sa nazýva *argument funkcie* alebo *nezávisle premenná* a číslo y je *závisle premenná.*

Grafom funkcie f je množina bodov v rovine, pre ktorú platí

$$G=\{[x,\ f(x)] \in R \times R:\ x \in D(f) \wedge y=f(x) \in H(f)\}$$

Príklad 2.1.1 Určme definičný obor funkcie $f: y = \dfrac{x}{x+3}$.

Riešenie: Je zrejmé, že definičným oborom funkcie f budú všetky reálne čísla, pre ktoré $x+3 \neq 0$. Teda

$$D(f) = R - \{-3\}$$

V niektorých prípadoch funkciu f nevieme zadať jediným vyjadrením funkčnej hodnoty alebo je výhodné zadať ju viacerými funkčnými predpismi na rôznych disjunktných intervaloch. Taktiež môže nastať situácia, že pri skúmaní určitých vlastností funkcie má danú vlastnosť funkcia len na časti definičného oboru. Preto zavedieme pojem ***parciálna funkcia***.

Definícia 2.1.2 Nech je daná funkcia f s definičným oborom $D(f)$. Hovoríme, že funkcia g je ***parciálna funkcia*** funkcie f na množine M, ak $M \subset D(f)$ a pre všetky $x \in M$ platí $f(x) = g(x)$.

Príklad 2.1.2 Vyjadrime funkciu $f: y = |x-2|$ parciálne.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(f) = R$.

Ak $x-2 \geq 0$, potom $|x-2| = x-2$, a ak $x-2 < 0$, potom $|x-2| = 2-x$.

Predpis funkcie $f: y = |x-2|$ môžeme vyjadriť pomocou dvoch parciálnych funkcií

$$f_1: y = x-2, \text{ ak } x \geq 2, \text{ a } f_2: y = 2-x, \text{ ak } x < 2$$

čo zapisujeme takto:

$$f: y = \begin{cases} x-2 & \text{pre } x \geq 2 \\ 2-x & \text{pre } x < 2 \end{cases}$$

Poznámka 2.1.1 Funkcia $g: y = \dfrac{x}{x+3}$ s definičným oborom $D(g) = (-3; \infty)$ je parciálnou funkciou k funkcii $f: y = \dfrac{x}{x+3}$ s definičným oborom $D(f) = R - \{-3\}$ z príkladu 2.1.1.

Poznámka 2.1.2 Parciálne definovaná funkcia je aj funkcia daná viacerými predpismi, ktoré určujú funkciu f na disjunktných intervaloch. Napríklad:

$$f: y = \begin{cases} x^2+1, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in \langle 0, 1) \\ \sqrt{x}, & x \in \langle 1, \infty) \end{cases}$$

Zjednotením týchto disjunktných intervalov dostaneme definičný obor funkcie $D(f) = R$.

Platí: $(-\infty, 0) \cup \langle 0, 1) \cup \langle 1, \infty) = R$.

2.2 Elementárne funkcie

Medzi elementárne funkcie patria:

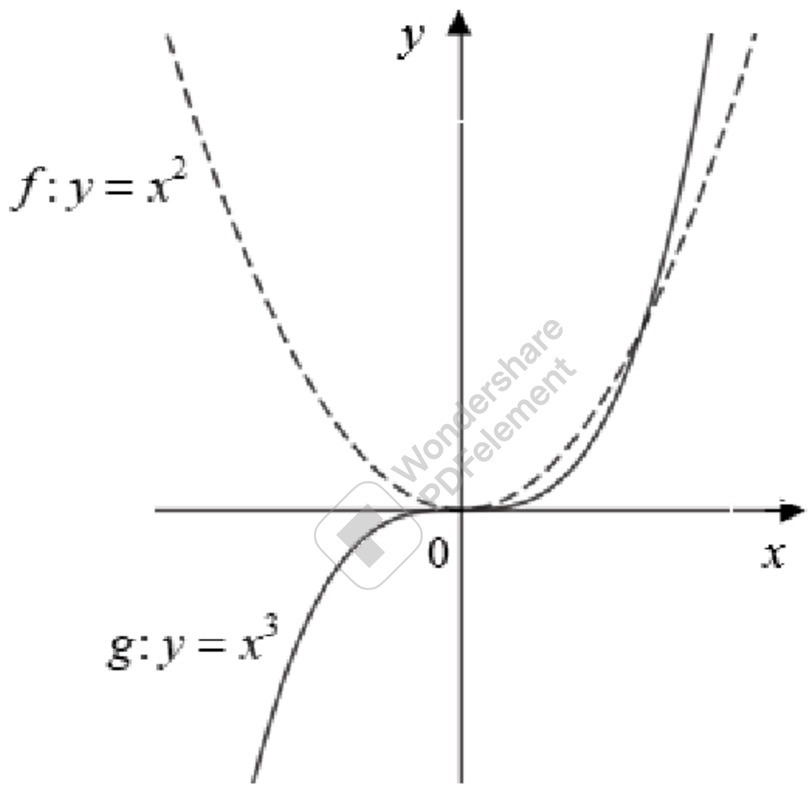
a) polynomická funkcia

$$f: y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad n \in N, \quad D(f) = R$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sú ľubovoľné reálne čísla, ktoré nazývame koeficienty polynomickej funkcie. Ak $a_n \neq 0$, hovoríme o *polynomickej funkcii n-tého stupňa*.

Špeciálne typy polynomickej funkcie podľa stupňa:

1. *konštantná funkcia* $f_1: y = a$,
2. *lineárna funkcia* $f_2: y = ax + b, \quad a \neq 0$,
3. *kvadratická funkcia* $f_3: y = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$,
4. *kubická funkcia* $f_4: y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \ a \neq 0$.



Obr. 2.2.1 Grafy funkcií $f: y = x^2$ a $g: y = x^3$

b) racionálne lomená funkcia

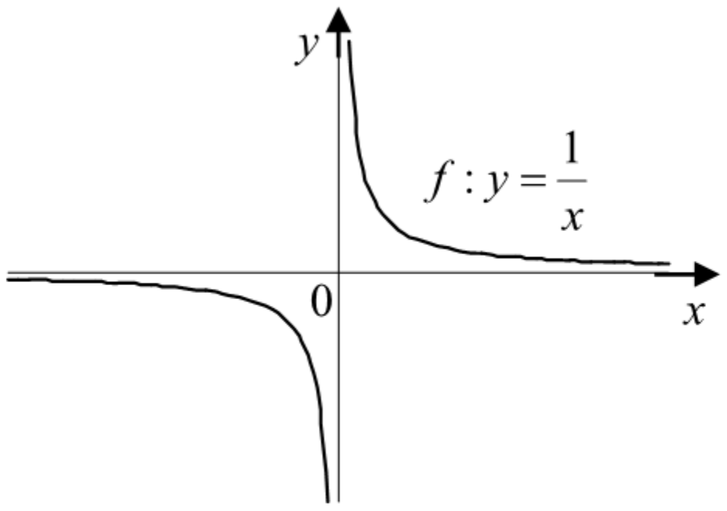
$$f: y = \frac{h(x)}{g(x)}, \ g(x) \neq 0$$

pričom $h(x)$ je ľubovoľná polynomická funkcia stupňa *m* a $g(x)$ je nenulová polynomická funkcia stupňa *n*.

Ak $h(x)$ a $g(x)$ sú polynomické funkcie prvého stupňa, potom funkciu

$$f: y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad x \neq -\frac{d}{c}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0$$

nazývame *lineárne lomenou funkciou* (Obr. 2.2.2).



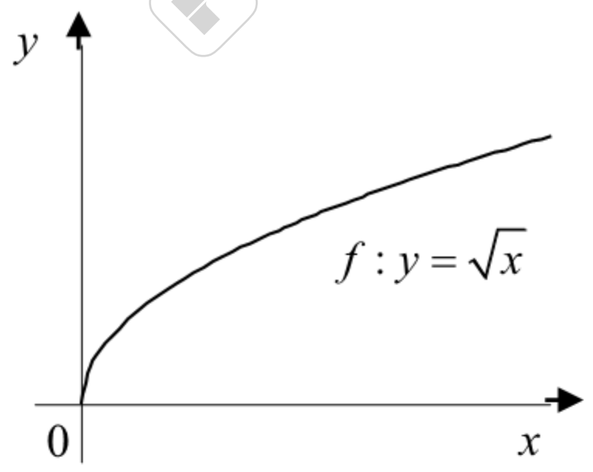
Obr. 2.2.2 Graf funkcie $f: y = \frac{ax+b}{cx+d}$ pre $a = d = 0$, $b = c = 1$

c) mocninová funkcia

$$f: y = x^s, \quad s \in R$$

je vo všeobecnosti definovaná pre také $x \in R$, pre ktoré je definovaná mocnina x^s.
Uvedieme niektoré špeciálne druhy mocninových funkcií:

1. Ak $s = n$, $n \in N$, potom $f: y = x^n$ je *polynomická funkcia*, $D(f) = R$.
2. Ak $s = -n$, $n \in N$, potom $f: y = \frac{1}{x^n}$ je *racionálna funkcia*, $D(f) = R - \{0\}$.
3. Ak $s = \frac{1}{n}$, $n \in N$, potom $f: y = \sqrt[n]{x}$ je *odmocninová funkcia*. Ak n je párne číslo, potom $D(f) = \langle 0; \infty)$, a ak n je nepárne číslo, $D(f) = R$.

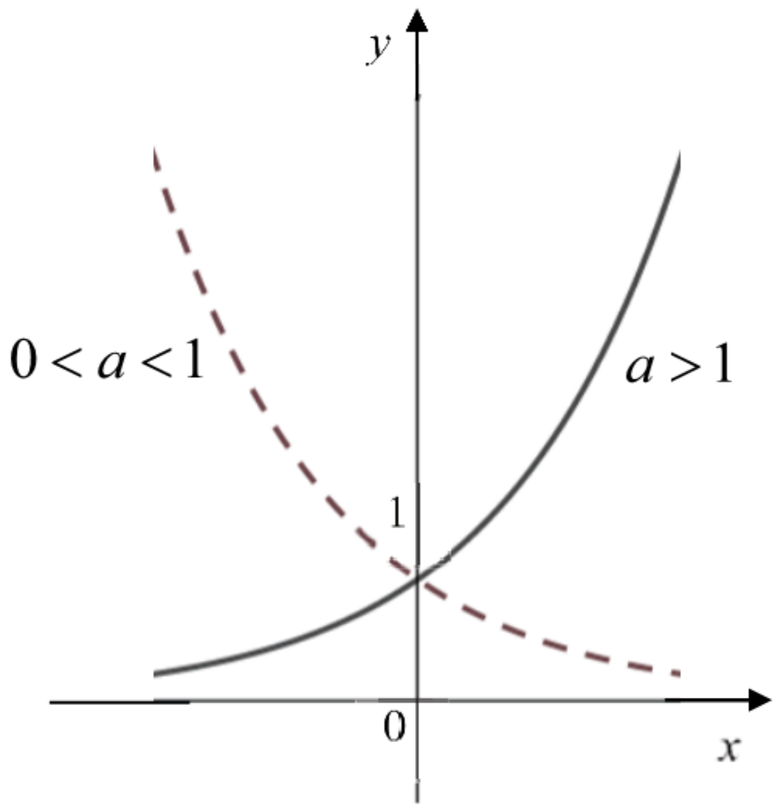


Obr. 2.2.3 Graf odmocninovej funkcie $f: y = \sqrt{x}$

d) exponenciálna funkcia

$$f: y = a^x, \quad a \in (0;1) \cup (1;\infty), \; D(f) = R, \; H(f) = (0;\infty)$$

Číslo a nazývame základ exponenciálnej funkcie. Ak $a = e$, pričom e je Eulerovo číslo ($e \doteq 2,718$), hovoríme o prirodzenej exponenciálnej funkcii.

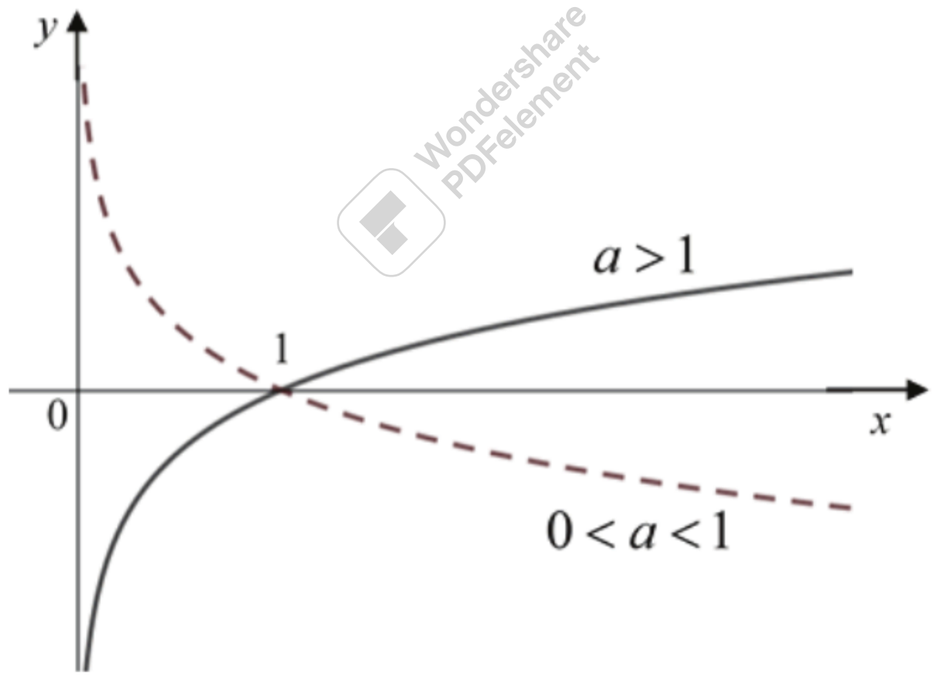


Obr. 2.2.4 Graf expenenciálnej funkcie $f: y = a^x$

e) logaritmická funkcia

$$f: y = \log_a x, \quad a \in (0;1) \cup (1;\infty),\ D(f) = (0;\infty),\ H(f) = R$$

Ak $a = 10$, tak funkciu $f: y = \log x$ nazývame *dekadický logaritmus*. Ak $a = e$ ($e \doteq 2,718$), tak funkciu $f: y = \ln x$ nazývame *prirodzený logaritmus*.

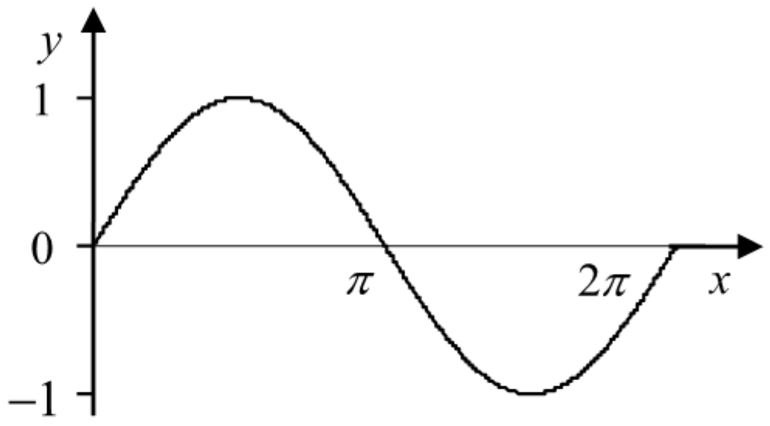


Obr. 2.2.5 Graf logaritmickej funkcie $f: y = \log_a x$

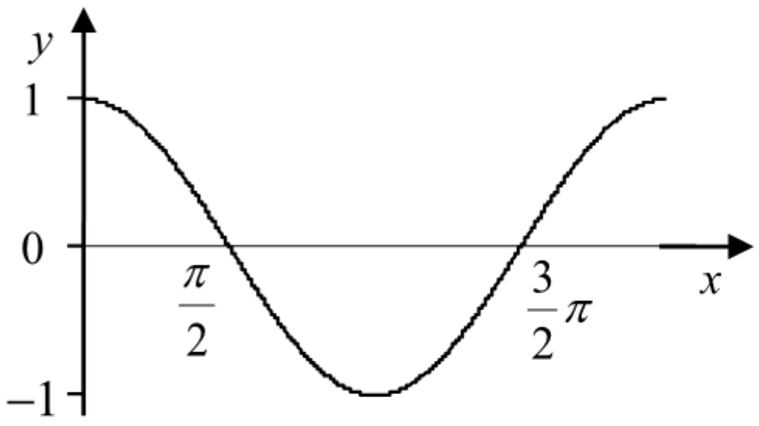
f) goniometrické funkcie

Goniometrické funkcie sú funkcie *sínus*, *kosínus*, *tangens* a *kotangens*. Ich odpovedajúce symbolické označenie je

$$f_1: y = \sin x, \quad D(f_1) = R,\ H(f_1) = \langle -1; 1 \rangle$$
$$f_2: y = \cos x, \quad D(f_2) = R,\ H(f_2) = \langle -1; 1 \rangle$$



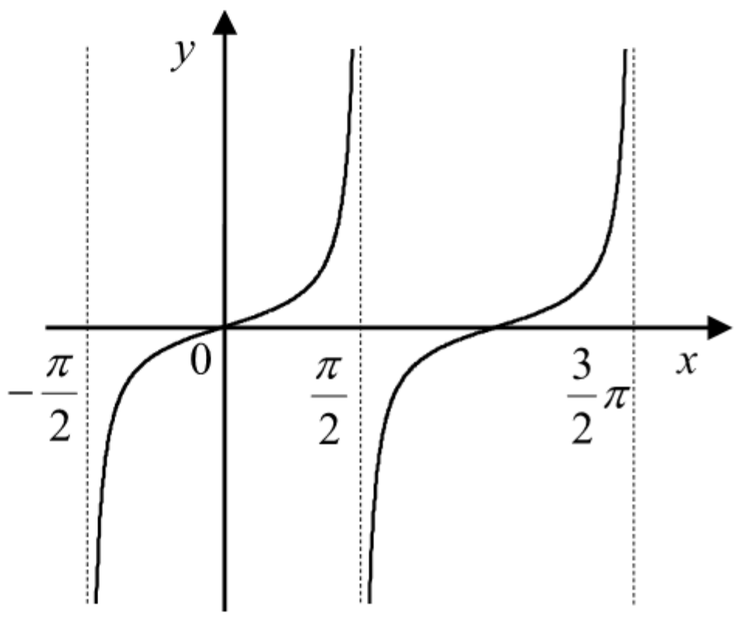
Obr. 2.2.6 Graf funkcie $f_1: y = \sin x$

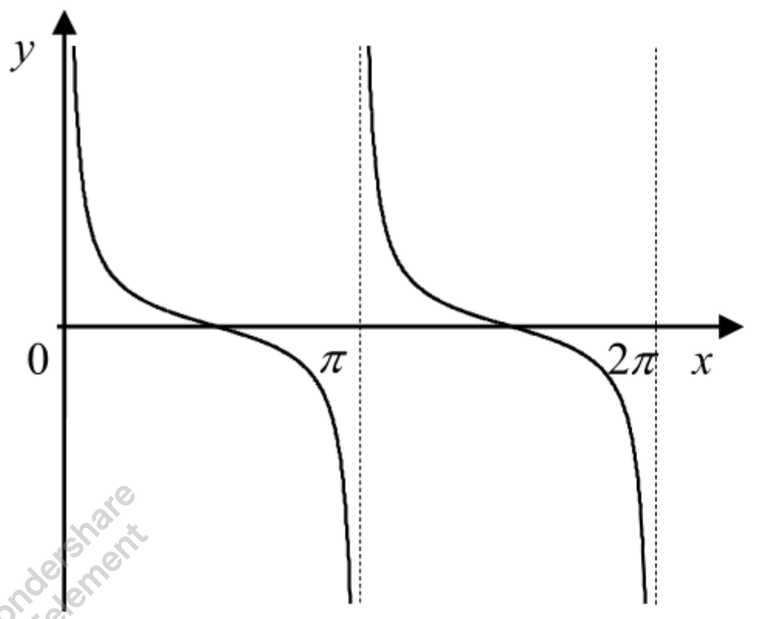


Obr. 2.2.7 Graf funkcie $f_2: y = \cos x$

$$f_3: y = \operatorname{tg} x, \quad D(f_3) = R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}, k \in Z;\ H(f_3) = R$$

$$f_4: y = \operatorname{cotg} x,\ D(f_4) = R - \{2k\pi\}, k \in Z;\ H(f_4) = R$$





Obr. 2.2.8 Graf funkcie $f_3: y = \operatorname{tg} x$

Obr. 2.2.9 Graf funkcie $f_4: y = \operatorname{cotg} x$

g) cyklometrické funkcie

Cyklometrické funkcie sú funkcie inverzné ku goniometrickým. Patria sem funkcie: *arkussínus*, *arkuskosínus*, *arkustangens* a *arkuskotangens*.

Goniometrické funkcie nie sú prosté na svojom definičnom obore. Preto ak chceme nájsť ich inverzné funkcie, musíme vybrať takú podmnožinu definičného oboru každej goniometrickej funkcie, na ktorej je táto funkcia prostá. Z definičného oboru funkcie *sínus* sa vyberá interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, na ktorom je funkcia rastúca, a teda prostá, a pre funkciu *kosínus* interval $\langle 0; \pi \rangle$, na ktorom je funkcia klesajúca, a teda tiež prostá. Inverzná funkcia k funkcii *tangens* sa definuje na množine $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, na ktorej je táto funkcia rastúca, a teda prostá.

Pre funkciu *kotangens* definujeme inverznú funkciu na množine $(0; \pi)$.

Symbolické označenie cyklometrických funkcií je takéto:

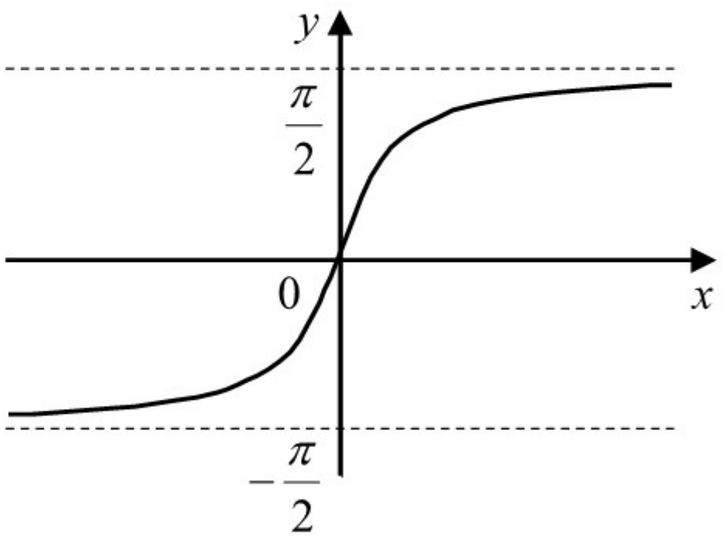
$$f_1: y = \arcsin x, \quad D(f_1) = \langle -1; 1 \rangle,\ H(f_1) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$f_2: y = \arccos x, \quad D(f_2) = \langle -1; 1 \rangle,\ H(f_2) = \langle 0; \pi \rangle$$

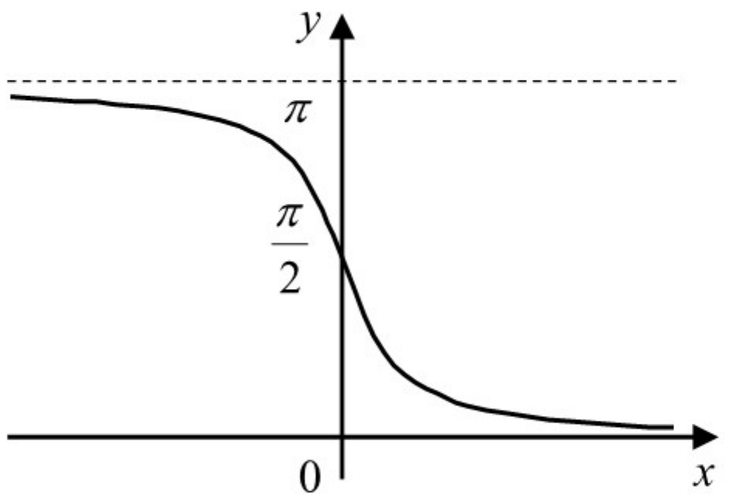
$$f_3: y = \operatorname{arctg} x, \qquad D(f_3) = R,\ H(f_3) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_4: y = \operatorname{arccotg} x, \quad D(f_4) = R,\ H(f_4) = (0; \pi)$$

Znázornime len grafy funkcií $f_3: y = \operatorname{arctg} x$ a $f_4: y = \operatorname{arccotg} x$, ktoré budeme používať pri výpočte limít týchto cyklometrických funkcií.

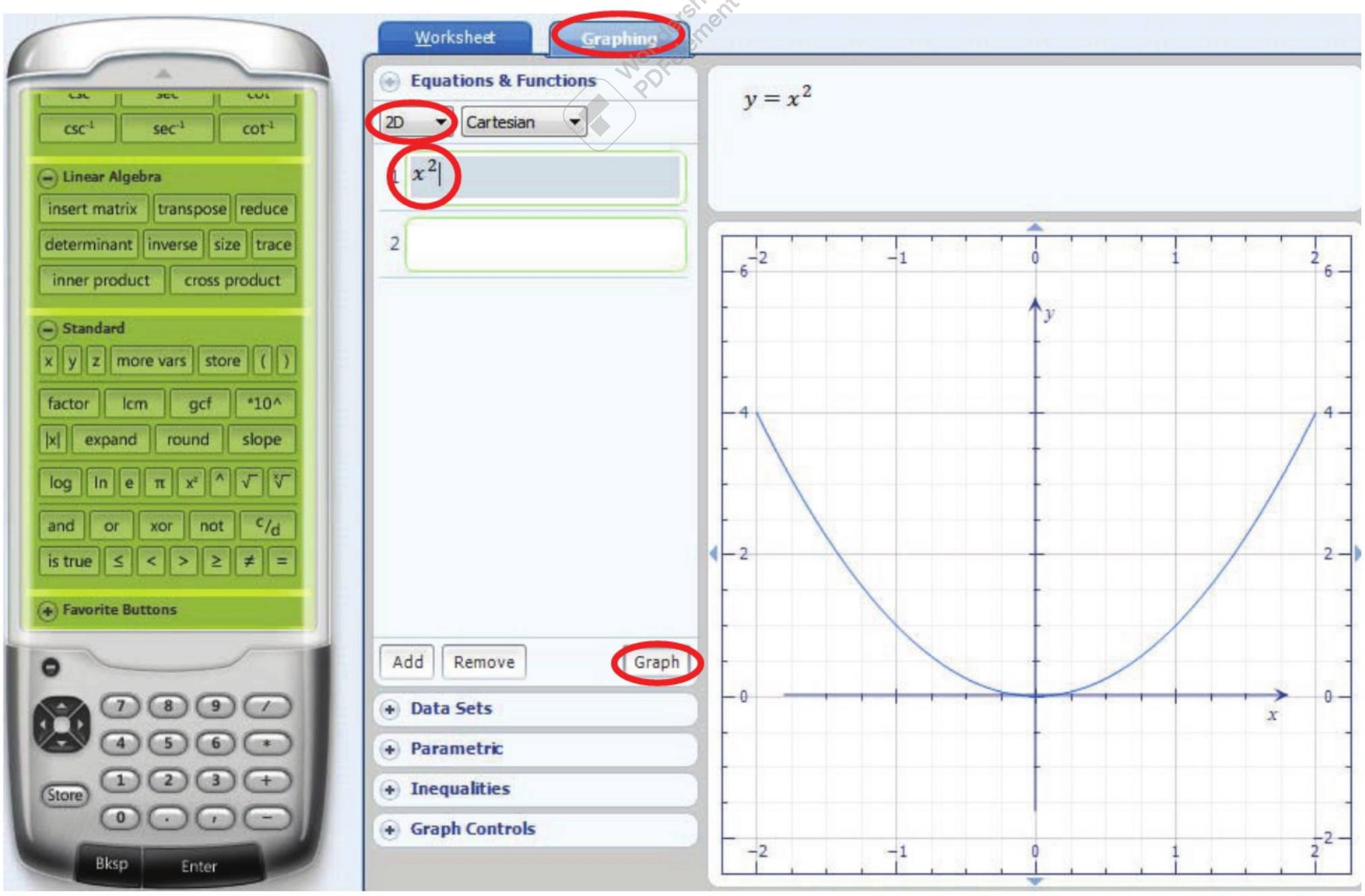


Obr. 2.2.10 Graf $f_3: y = \operatorname{arctg} x$



Obr. 2.2.11 Graf $f_4: y = \operatorname{arccotg} x$

Grafy elementárnych a aj zložených funkcií, ktorým sa budeme venovať neskôr, môžeme načrtnúť použitím rôznych softvérov. Na obr. 2.2.12 je ukážka nákresu grafu kvadratickej funkcie $f: y = x^2$ v MS MATHEMATICS 4.0.



Obr. 2.2.12 Ukážka nákresu grafu kvadratickej funkcie $f: y = x^2$ v MS MATHEMATICS 4.0

Príklad 2.2.1 Dané funkcie graficky znázornime. Určme ich definičný obor a obor hodnôt.

a) $f_1: y = \sqrt{x-2}$

b) $f_2: y = x^2 + 2$

c) $f_3: y = 2\arcsin x$

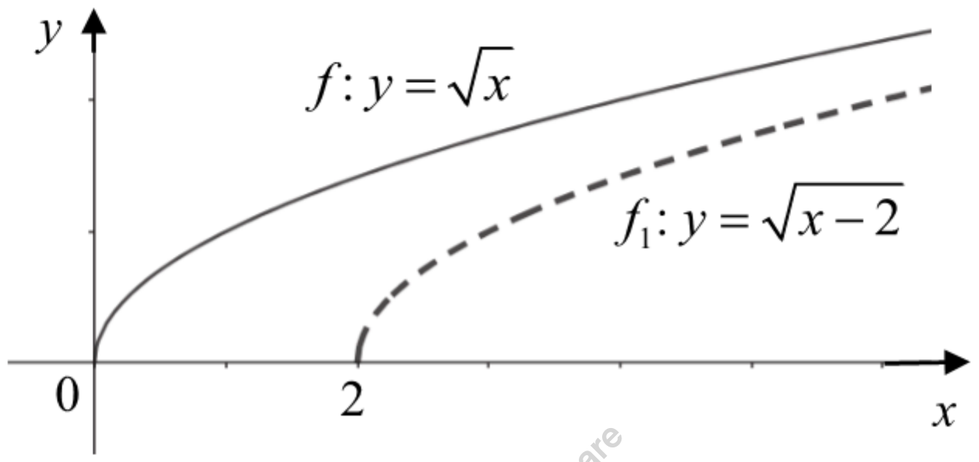
d) $f_4: y = \log 2x$

e) $f_5: y = -x^2$

f) $f_6: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

Riešenie: **a)** ***Transformácia*** $f_1: y = f(x+c)$ *grafu funkcie* $f: y = f(x)$ *posunie pôvodný graf o konštantu* $c \in R$ *v smere osi* x *tak, že ak* $c > 0$, *graf sa posúva doľava, a ak* $c < 0$, *graf sa posúva doprava.*

Graf funkcie $f_1: y = \sqrt{x-2}$ vznikol posunutím grafu elementárnej funkcie $f: y = \sqrt{x}$ v smere osi o_x o 2 jednotky doprava, pretože $c = -2$ (obr. 2.2.13).



Obr. 2.2.13

Transformácia f_1 spôsobí zmenu pôvodného definičného oboru funkcie f:

$$D(f) = \langle 0; \infty) \text{ na } D(f_1) = \langle 2; \infty)$$

Obory hodnôt pôvodnej a transformovanej funkcie budú rovnaké, t. j.

$$H(f) = H(f_1) = \langle 0; \infty).$$

b) ***Transformácia*** $f_2: y = f(x) + c$ *grafu funkcie* $f: y = f(x)$ *posunie graf funkcie* f *o konštantu* $c \in R$ *v smere osi* y *tak, že ak* $c > 0$, *graf sa posúva nahor, a ak* $c < 0$, *graf sa posúva nadol.*

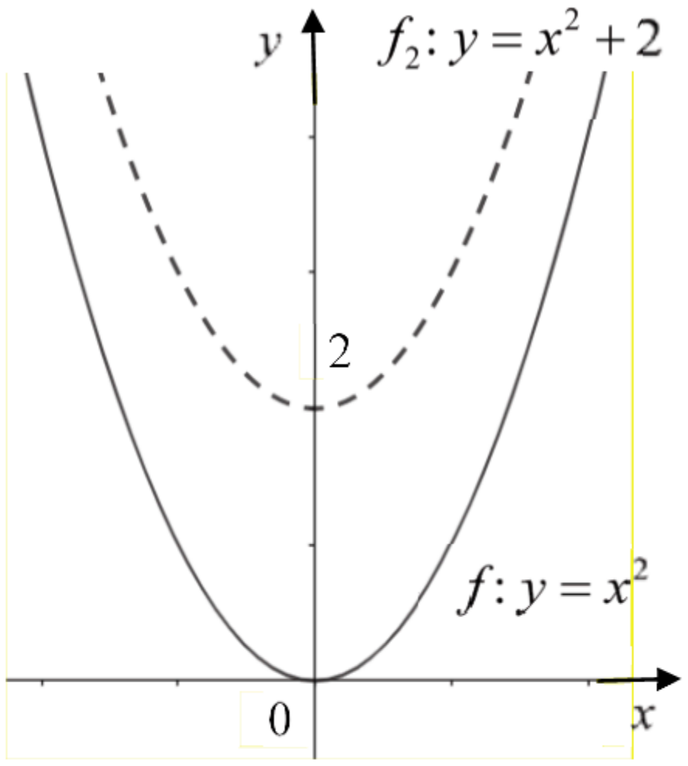
Graf funkcie $f_2: y = x^2 + 2$ vznikol posunutím grafu elementárnej funkcie $f: y = x^2$ v smere osi o_y o 2 jednotky nahor, pretože $c = 2$ (obr. 2.2.14).

Transformácia spôsobí zmenu pôvodného oboru hodnôt funkcie f:

$$H(f) = \langle 0; \infty) \text{ na } H(f_2) = \langle 2; \infty)$$

Definičné obory pôvodnej a transformovanej funkcie budú rovnaké, t. j.

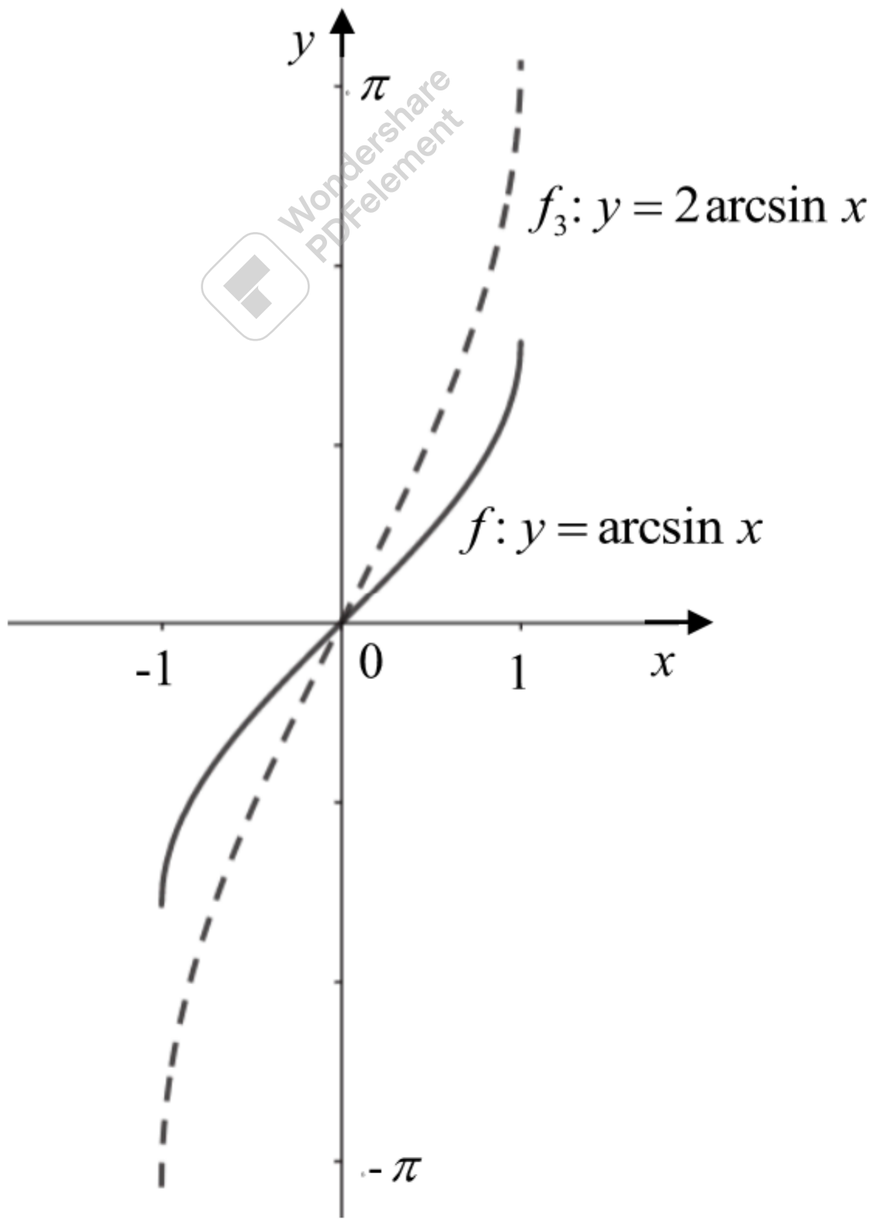
$$D(f) = D(f_2) = R$$



Obr. 2.2.14

c) ***Transformácia*** $f_3: y = c \cdot f(x)$, $c \in R - \{0\}$, *grafu funkcie* $f: y = f(x)$ *spôsobí, že každá y-ová súradnica funkcie f sa vynásobí konštantou c* (obr. 2.2.15).

Graf funkcie $f_3: y = 2\arcsin x$ získame z grafu funkcie $f: y = \arcsin x$ vynásobením každej y-ovej súradnice konštantou $c = 2$.



Obr. 2.2.15

Transformácia spôsobí zmenu pôvodného oboru hodnôt funkcie f:

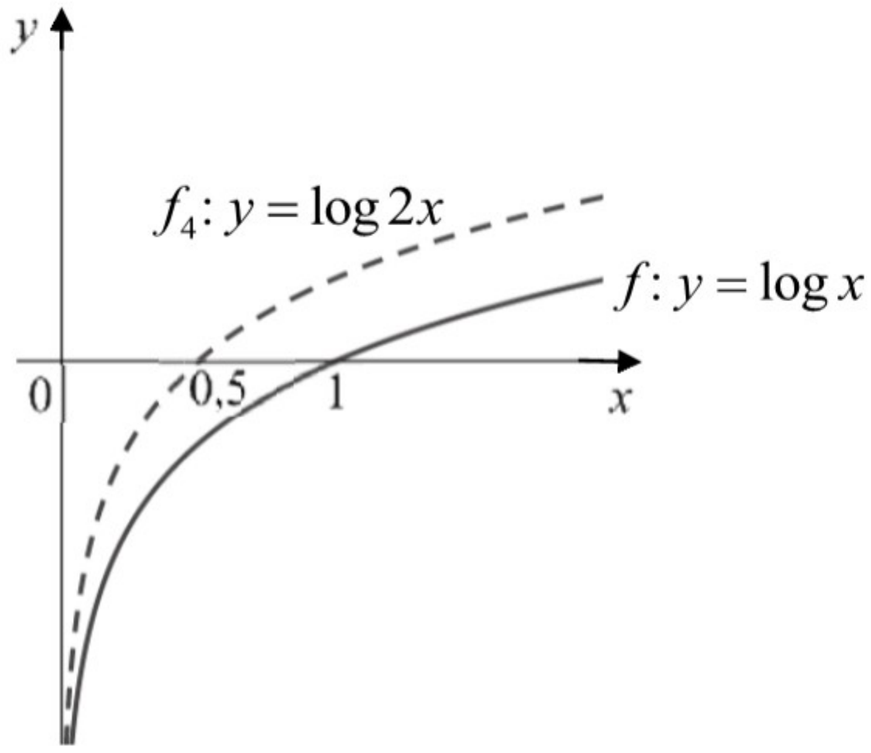
$$H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ na } H(f_3) = \langle -\pi; \pi \rangle .$$

Definičné obory pôvodnej a transformovanej funkcie budú rovnaké. Platí

$$D(f) = D(f_3) = \langle -1; 1 \rangle.$$

d) ***Transformácia*** $f_4: y = f(cx)$, $c \in R - \{0\}$, *grafu funkcie* $f: y = f(x)$ *spôsobí, že každá x-ová súradnica funkcie f sa vydelí konštantou c.*

Graf funkcie $f_4: y = \log 2x$ získame z grafu funkcie $f: y = \log x$ tak, že každú x-ovú súradnicu delíme konštantou $c = 2$ (obr. 2.2.16).



Obr. 2.2.16

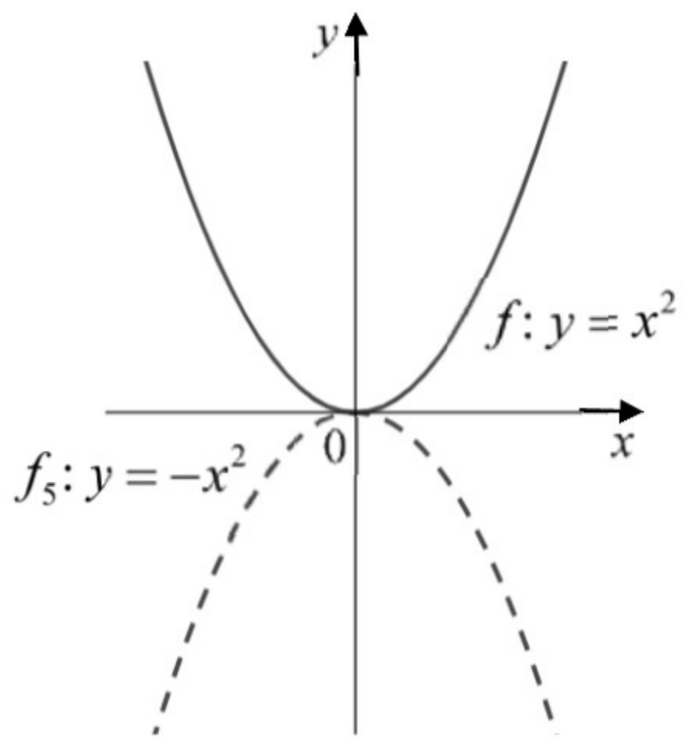
V prípade našej funkcie transformácia nemení ani definičný obor ani obor hodnôt:

$$D(f) = D(f_4) = (0; \infty)$$

$$H(f) = H(f_4) = R$$

e) ***Transformácia*** $f_5: y = -f(x)$ *vyjadruje symetriu grafu funkcie* $f: y = f(x)$ *vzhľadom na os x.*

Grafy funkcií $f: y = x^2$ a $f_5: y = -x^2$ sú symetrické vzhľadom na priamku $y = 0$, t. j. vzhľadom na os x (obr. 2.2.17).



Obr. 2.2.17

Vplyvom tejto transformácie sa mení obor hodnôt funkcie *f*:

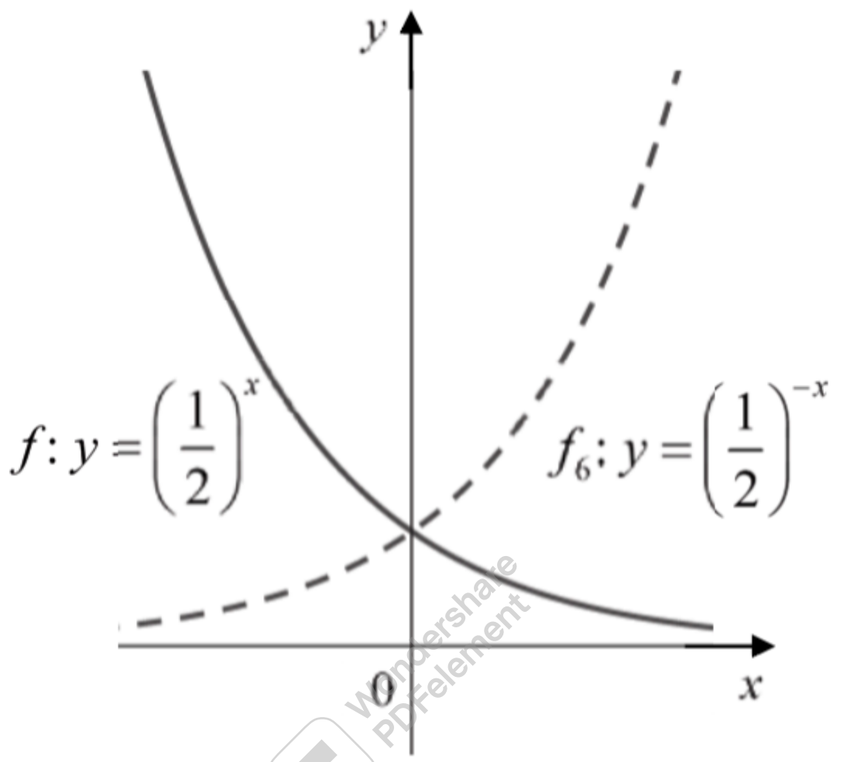
$$H(f)=\langle 0;\infty)\quad \text{na}\quad H(f_5)=(-\infty;0\rangle$$

Definičné obory oboch funkcií budú rovnaké, tzn.

$$D(f)=D(f_5)=R.$$

f) ***Transformácia*** $f_6: y=f(-x)$ *vyjadruje symetriu grafu funkcie* $f: y=f(x)$ *vzhľadom na os y.*

Graf funkcie $f_6: y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ dostaneme preklopením grafu funkcie $f: y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ okolo osi y (obr. 2.2.18).



Obr. 2.2.18

Transformácia v prípade našej funkcie nemení ani definičný obor a ani obor hodnôt, teda

$$D(f)=D(f_6)=R$$

$$H(f)=H(f_6)=(0;\infty)$$

Obor funkčných hodnôt sme vo všetkých funkciách v predchádzajúcom príklade určovali na základe poznania základných elementárnych funkcií a ich grafov.

Treba si uvedomiť, že to, ako každá transformácia ovplyvní definičný obor a obor funkčných hodnôt funkcie závisí aj od typu funkcie (tzn., či robíme transformácie kvadratickej, exponenciálnej, goniometrickej funkcie atď.). Preto zmeny definičného oboru a oboru funkčných hodnôt, opísané v predchádzajúcom príklade, nie sú univerzálne použiteľné pre ľubovoľnú funkciu.

ÚLOHY

2.2.1 Určte definičný obor a obor hodnôt daných funkcií a graficky ich znázornite.

a) $f_1: y=2x-6$

b) $f_2: y=4-x^2$

f) $f_6: y=5^x+5$

g) $f_7: y=\ln(x-1)$

c) $f_3: y = x^2 + 14x + 47$

d) $f_4: y = \sqrt{x-3}$

e) $f_5: y = \frac{1}{4} \cdot 2^{-x}$

h) $f_8: y = 3\log_{0,5} x$

i) $f_9: y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$

j) $f_{10}: y = -4\operatorname{arccotg} x$

Výsledky

2.2.1 a) $D(f_1) = H(f_1) = R$; **b)** $D(f_2) = R; H(f_2) = (-\infty; 4\rangle$;

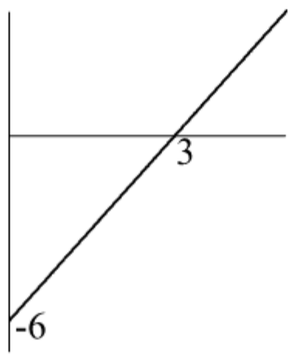
c) $D(f_3) = R;\ H(f_3) = \langle -2; \infty)$; **d)** $D(f_4) = \langle 3; \infty)$; $H(f_4) = \langle 0; \infty)$;

e) $D(f_5) = R$; $H(f_5) = (0; \infty)$; **f)** $D(f_6) = R$; $H(f_6) = (5; \infty)$;

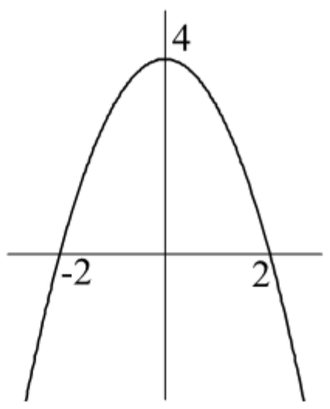
g) $D(f_7) = (1; \infty)$; $H(f_7) = R$; **h)** $D(f_8) = (0; \infty)$; $H(f_8) = R$;

i) $D(f_9) = R$; $H(f_9) == \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; **j)** $D(f_{10}) = R$; $H(f_{10}) = (-4\pi; 0)$.

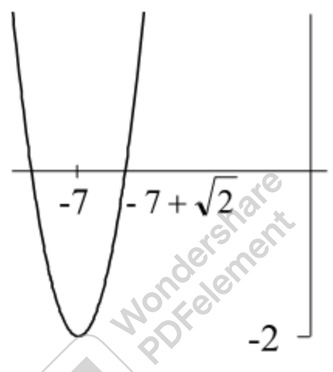
a)



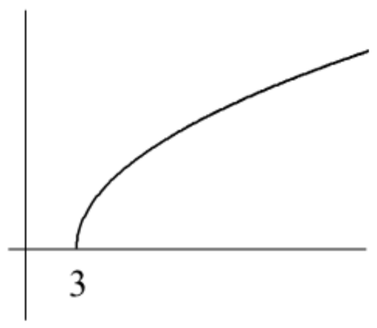
b)



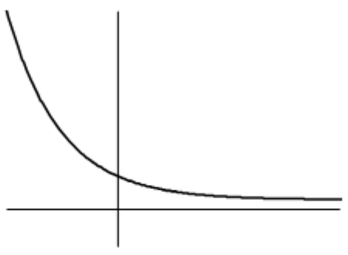
c)



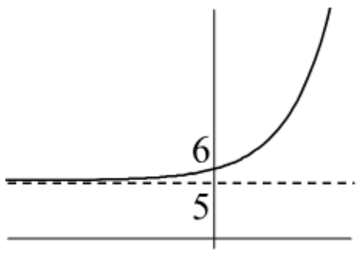
d)



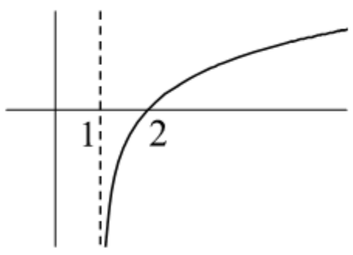
e)



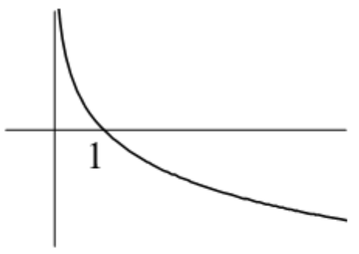
f)



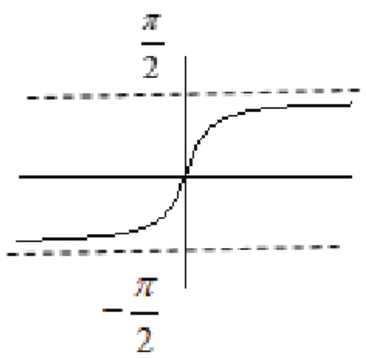
g)



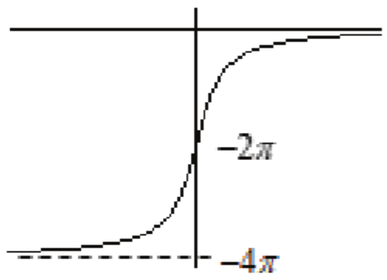
h)



i)



j)



2.3 Operácie s funkciami

Definícia 2.3.1 Nech sú dané funkcie f, g a množina M, pre ktorú platí $M \subset D(f) \cap D(g)$. Hovoríme, že funkcie f a g sa ***rovnajú*** na množine M práve vtedy, ak pre každé $x \in M$ platí $f(x) = g(x)$.

Väčšina funkcií nie sú elementárne, ale môžeme ich vytvoriť z elementárnych funkcií konečným počtom operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia, umocňovania, skladaním a invertovaním.

Definícia 2.3.2 Nech sú dané dve funkcie f a g a nech D je množina, pre ktorú platí $D = D(f) \cap D(g)$, $D \neq \emptyset$. Potom definujeme

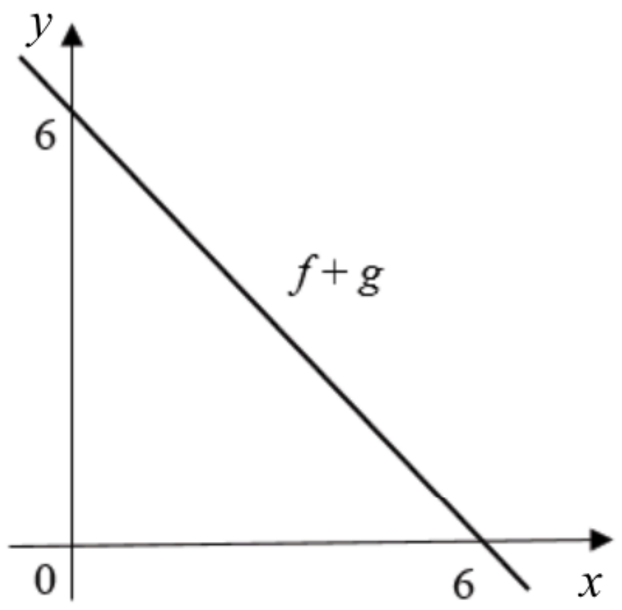
súčet, resp. *rozdiel* f a g	$f+g$: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
súčin f a g	$f \cdot g$: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
podiel f a g	$\frac{f}{g}$: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
umocnenie f *na* g	f^g: $\left(f^g\right)(x) = f(x)^{g(x)}$

pre všetky $x \in D$, pre ktoré sú príslušné operácie medzi funkčnými hodnotami $f(x)$ a $g(x)$ definované.

Príklad 2.3.1 Dané sú funkcie $f: y = x+2$ a $g: y = -2x+4$.

Určme funkcie $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ a nakreslime ich grafy.

Riešenie: Funkcie f a g sú lineárne funkcie. Platí $D(f) = D(g) = R$.

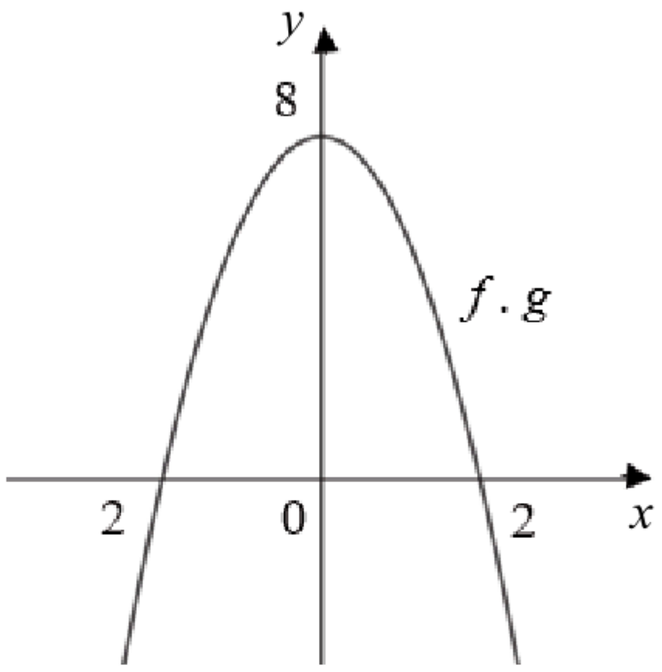


Obr. 2.3.1

Súčtom funkcií f, g dostaneme opäť lineárnu funkciu (obr. 2.3.1) danú predpisom

$$f+g: y = (x+2)+(-2x+4)$$
$$f+g: y = 6-x$$

$$D(f+g) = D(f) \cap D(g) = R$$
$$H(f+g) = R$$



Obr. 2.3.2

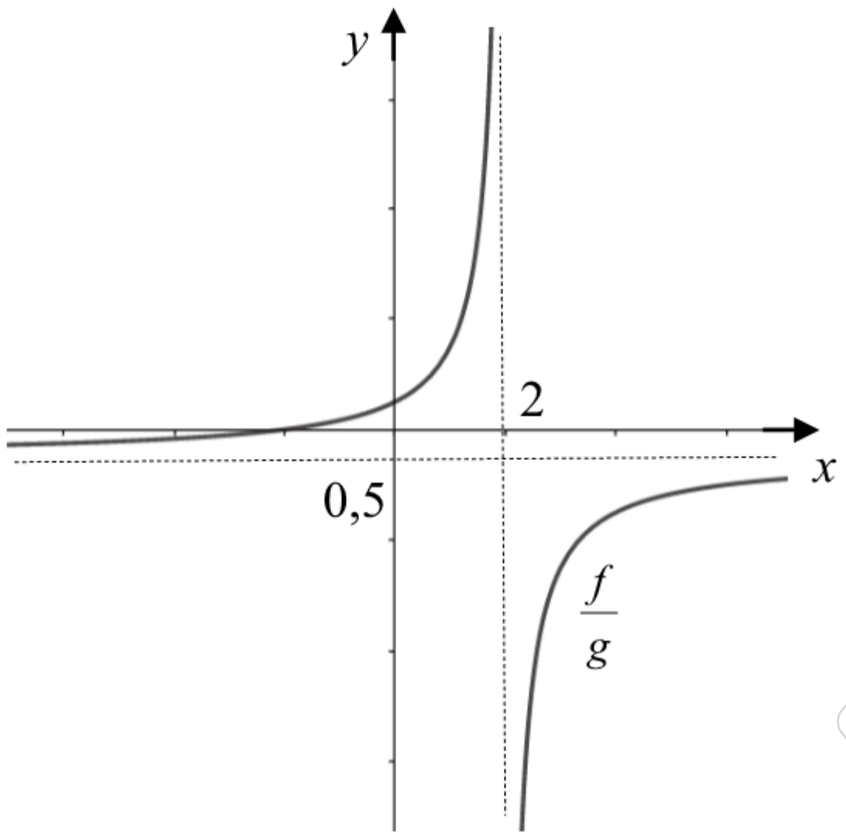
Súčinom funkcií f, g je kvadratická funkcia (obr. 2.3.2) daná predpisom

$$f \cdot g: y = (x+2)(-2x+4)$$

$$f \cdot g: y = 8 - 2x^2$$

$$D(f \cdot g) = R$$

$$H(f \cdot g) = (-\infty; 8\rangle$$



Obr. 2.3.3

Podielom funkcií f, g dostaneme racionálne lomenú funkciu (obr. 2.3.3)

$$\frac{f}{g}: y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{f}{g}: y = \frac{x+2}{-2x+4} = -\frac{2}{x-2} - \frac{1}{2}$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = R - \{2\}$$

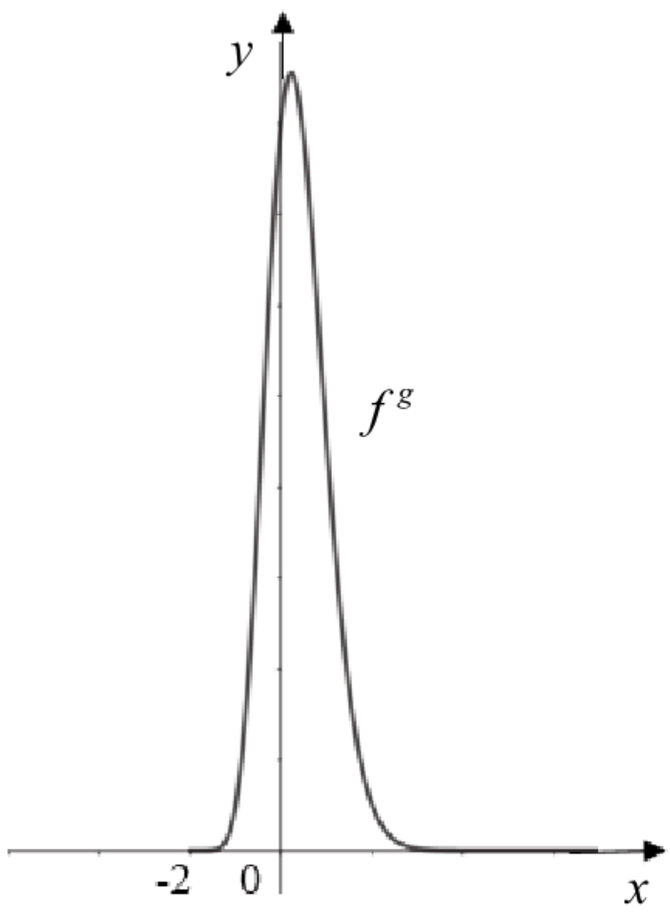
$$H\left(\frac{f}{g}\right) = R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Výsledkom ***umocnenia funkcie*** f funkciou g je funkcia (obr. 2.3.4)

$$f^g: y = (x+2)^{(-2x+4)}$$

$$D(f^g) = (-2; \infty)$$

Funkcia f^g nepatrí medzi elementárne funkcie. Jej graf by sme zostrojili až po vyšetrení jednotlivých vlastností funkcie pomocou derivácií (kapitola 3).



Obr. 2.3.4

Definícia 2.3.3 Nech sú dané dve funkcie f a g, pričom $D(f)\cap H(g)\neq\emptyset$. Funkciu $f(g)$ s definičným oborom $D(f(g))=\{x\in D(g);\ g(x)\in D(f)\}$ nazývame ***zloženou funkciou*** $f(g)$. Funkciu f nazývame ***vonkajšia zložka***, funkciu g ***vnútorná zložka*** zloženej funkcie $f(g)$ a označujeme $f: y=f(u)$, $g: u=g(x)$.

Príklad 2.3.2 Určme definičný obor funkcie $F: y=\sqrt{x^2-8}$.

Riešenie: Funkcia F je zložená z dvoch základných elementárnych funkcií f a g. Vo všeobecnosti ju môžeme označiť $F(x)=f(g(x))$, pričom $f: y=\sqrt{u}$, $g: u=x^2-8$.

Pri určovaní definičného oboru funkcie F budeme postupovať od vnútornej zložky $g: u=x^2-8$ k vonkajšej $f: y=\sqrt{u}$. Vieme, že platí

$$D(f)=H(f)=\langle 0;\infty)$$
$$D(g)=(-\infty;\infty),\ H(g)=\langle -8;\infty).$$

Keďže $D(f)\cap H(g)\neq\emptyset$, podľa definície 2.3.3 platí

$$D(f(g))=\{x\in D(g);\ g(x)\in D(f)\}=\{x\in R;\ (x^2-8)\in\langle 0;\ \infty)\}$$

Podmienku $(x^2-8)\in\langle 0;\infty)$ prepíšeme na nerovnicu

$$x^2-8\geq 0$$
$$(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})\geq 0$$

a riešime metódou nulových bodov.

Nulové body sú korene kvadratickej rovnice $(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})=0$, tzn. $x_1=-2\sqrt{2}$ a $x_2=2\sqrt{2}$.

Keďže hľadáme taký interval, v ktorom funkcia $g: u=x^2-8$ nadobúda nezáporné funkčné hodnoty, $D(F)=(-\infty;2\sqrt{2}\rangle\cup\langle 2\sqrt{2};\infty)$

Definičný obor funkcie F je $D(F)=(-\infty;-2\sqrt{2}\rangle\cup\langle 2\sqrt{2};\ \infty)$.

Pri určovaní definičného oboru zložených funkcií je jednoduchšie priamo určiť len podmienky. Tento zjednodušený postup použijeme pri riešení príkladu 2.3.2 a ukážeme, že dostaneme ten istý výsledok.

Platí

$$D(F)=\{x\in R;\ x^2-8\geq 0\}.$$

Riešime nerovnicu

$$x^2-8\geq 0$$

a dostaneme ten istý definičný obor

$$D(F)=(-\infty;-2\sqrt{2}\rangle\cup\langle 2\sqrt{2};\ \infty).$$

Príklad 2.3.3 Určme definičný obor funkcií:

a) $F_1: y = \sqrt{x^2 - 9x + 18} - \log(16x - x^2)$

b) $F_2: y = \dfrac{\sqrt{12 - x - x^2}}{\ln(2x - 5)}$

c) $F_3: y = \dfrac{1}{x^2} + \arcsin\dfrac{x+2}{3}$

Riešenie: a) Platí

$$D(F_1) = \left\{x \in R;\ x^2 - 9x + 18 \geq 0 \ \wedge\ 16x - x^2 > 0\right\}$$

Riešime dve kvadratické nerovnice

$$x^2 - 9x + 18 \geq 0 \ \wedge\ 16x - x^2 > 0$$

$$(x-3)(x-6) \geq 0 \ \wedge\ x(16-x) > 0$$

a použitím metódy nulových bodov dostaneme

$$x \in (-\infty; 3\rangle \cup \langle 6; \infty) \ \wedge\ x \in (0; 16).$$

Definičný obor funkcie F_1 je $D(F_1) = (0; 3\rangle \cup \langle 6; 16)$.

b) Platí

$$D(F_2) = \left\{x \in R;\ 12 - x - x^2 \geq 0 \ \wedge\ 2x - 5 > 0 \ \wedge\ \ln(2x-5) \neq 0\right\}$$

Zistíme, pre aké x sú splnené podmienky

$$12 - x - x^2 \geq 0 \ \wedge\ 2x - 5 > 0 \ \wedge\ \ln(2x-5) \neq 0$$

$$x^2 + x - 12 \leq 0 \ \wedge\ 2x - 5 > 0 \ \wedge\ \ln(2x-5) \neq 0$$

$$(x+4)(x-3) \leq 0 \ \wedge\ x > \frac{5}{2} \ \wedge\ \ln(2x-5) \neq 0$$

Riešením prvých dvoch nerovníc sú intervaly

$$x \in \langle -4; 3\rangle \ \wedge\ x \in \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$$

Podľa definície logaritmu platí

$$\ln(2x-5) = 0 \ \Leftrightarrow\ e^0 = 2x - 5 \ \Leftrightarrow\ 1 = 2x - 5 \ \Leftrightarrow\ x = 3$$

Preto dostaneme

$$\ln(2x-5) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ x \neq 3$$

Definičný obor funkcie F_2 je $D(F_2) = \left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

c) Platí

$$D(F_3) = \left\{x \in R;\ x^2 \neq 0 \wedge\ -1 \leq \frac{x+2}{3} \leq 1\right\}$$

Teda

$$x^2 \neq 0 \wedge\ -1 \leq \frac{x+2}{3} \leq 1$$

$$x \neq 0 \wedge\ -3 \leq x+2 \leq 3$$
$$x \neq 0 \wedge\ -5 \leq x \leq 1$$

a dostaneme definičný obor funkcie F_3

$$D(F_3) = \langle -5; 0) \cup (0; 1\rangle .$$

Poznámka 2.3.1 Pri určovaní definičného oboru funkcií je potrebné uvažovať:

- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule (príklad 2.1.1),
- výraz pod párnou odmocninou musí byť nezáporný (príklad 2.3.2),
- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument (príklad 2.3.3).

Definícia 2.3.4 Nech funkcia f je prostá na množine $A \subset D(f)$. Potom ***inverznou funkciou*** f^{-1} definovanou na množine $f(A)$ k funkcii f definovanej na množine A nazývame predpis, ktorý každému prvku $y \in f(A)$ priradí taký prvok $x \in A$, že platí

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Ak $A = D(f)$, hovoríme o inverznej funkcii k funkcii f.

Poznámka 2.3.2 Inverzná funkcia f^{-1} priradí číslu $y \in f(A)$ číslo $x \in A$ práve vtedy, keď pôvodná funkcia priradila číslu $x \in A$ číslo $y \in f(A)$.

Poznámka 2.3.3 Keďže každá rýdzo monotónna funkcia je prostá, pri zisťovaní existencie inverznej funkcie f^{-1} stačí ukázať, že funkcia f je rastúca alebo klesajúca.

Veta 2.3.1 Inverzná funkcia k *rastúcej* [*klesajúcej*] funkcii je tiež *rastúca* [*klesajúca*] funkcia.

Príklad 2.3.4 Daná je funkcia $f: y = \sqrt{225 - 3x}$.

a) Zistime, či k danej funkcii existuje inverzná funkcia. Ak áno, určme jej predpis.
b) Určme definičný obor a obor hodnôt inverznej funkcie.
c) Nakreslime grafy oboch funkcií.

Riešenie: a) Pre definičný obor funkcie f platí

$$D(f) = \{x \in R;\ 225 - 3x \geq 0\} \Rightarrow D(f) = (-\infty;\ 75\rangle$$

Najskôr zistíme, či inverzná funkcia existuje. Podľa poznámky 1.3.1 stačí ukázať, že funkcia f je rastúca, resp. klesajúca na definičnom obore $D(f)$. Teda ukázať, či platí

$$\forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \text{ resp.}$$
$$\forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Platí

$$\forall x_1, x_2 \in (-\infty;\ 75\rangle:\ x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow 225 - 3x_1 > 225 - 3x_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{225 - 3x_1} > \sqrt{225 - 3x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcia f je teda klesajúca na definičnom obore $\langle -\infty; 75\rangle$, t. j., že k nej existuje inverzná funkcia f^{-1}. Jej predpis určíme tak, že pre každé $y \in H(f)$ určíme prislúchajúce $x \in D(f)$.
Z rovnice

$$y = \sqrt{225 - 3x}$$

postupne vyjadríme x. Teda

$$y^2 = 225 - 3x$$
$$3x = 225 - y^2$$
$$x = 75 - \frac{y^2}{3}$$

Pretože pri funkciách nezávisle premennú označujeme x a závisle premennú označujeme y, dostaneme

$$f^{-1}: y = 75 - \frac{x^2}{3}$$

b) Chceme určiť definičný obor a obor hodnôt inverznej funkcie f^{-1}. Platí

$$D(f^{-1}) = H(f)$$
$$H(f^{-1}) = D(f)$$

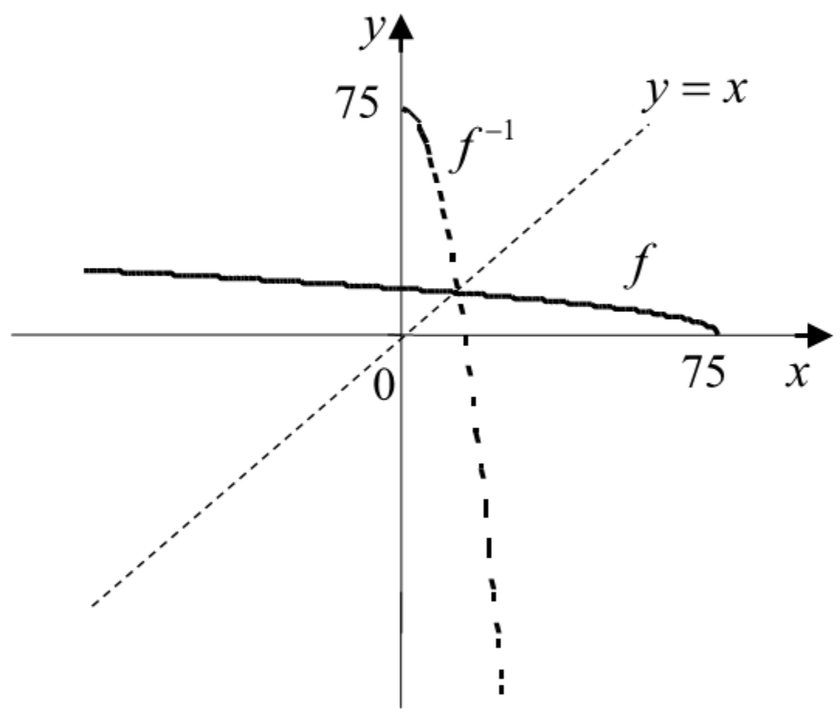
Definičný obor funkcie f sme určili na začiatku riešenia príkladu v úlohe a). Obor hodnôt inverznej funkcie f^{-1} je

$$H(f^{-1}) = D(f) = \langle -\infty; 75\rangle$$

Aby sme určili definičný obor inverznej funkcie f^{-1}, nájdeme obor hodnôt funkcie f. Dosadíme krajný bod $x = 75$ definičného oboru funkcie f do rovnice $y = \sqrt{225 - 3x}$. Keďže funkcia f je klesajúca, vypočítame tak začiatočnú hodnotu $y = 0$ intervalu, ktorý určuje obor hodnôt funkcie f.
Keďže f je odmocninová funkcia, druhý krajný bod intervalu je číslo ∞.
Teda definičný obor funkcie f^{-1} je

$$D(f^{-1}) = H(f) = \langle 0; \infty).$$

c) Graf funkcie f^{-1} je osovo súmerný podľa priamky $y = x$ s grafom funkcie f (obr. 2.3.4).



Obr. 2.3.4 Grafy funkcií f a f^{-1}

ÚLOHY

2.3.1 Určte zložené funkcie F: $y = f\big(g(x)\big)$ a G: $y = g\big(f(x)\big)$ a ich definičné obory, ak funkcie f a g sú dané predpismi:

a) $f: y = x^2 + 2;\ g: y = \log x$

b) $f: y = \sqrt{x+1};\ g: y = e^x$

c) $f: y = \dfrac{5}{x};\ g: y = \operatorname{arctg} x$

d) $f: y = \sin^2 x;\ g: y = 3^{2x}$

2.3.2 Určte vonkajšiu a vnútornú zložku nasledujúcich funkcií:

a) $f_1: y = \sqrt{x^3 + 1}$

b) $f_2: y = \cos x^4$

c) $f_3: y = \dfrac{1}{\ln^2 x}$

d) $f_4: y = 2^{\operatorname{arccotg}\ x}$

e) $f_5: y = \sqrt[3]{\log(6 - x)}$

f) $f_6: y = \arcsin \dfrac{1}{e^x}$

2.3.3 Zistite, či sa dané funkcie f a g rovnajú:

a) $f: y = \dfrac{4x}{x^2 - x};\ g: y = \dfrac{4}{x-1}$

b) $f: y = x^2 + x + 1;\ g: y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

c) $f: y = \log x^5;\ g: y = 5 \log x$

d) $f: y = 2^x;\ g: y = \dfrac{4^x}{2^x}$

e) $f: y = \dfrac{\cos 2x}{\sin x};\ g: y = 2 \cos x$

f) $f: y = x^2;\ g: y = \sqrt{x^4}$

2.3.4 Pre danú funkciu určte predpis inverznej funkcie, jej definičný obor, obor funkčných hodnôt a graficky ju znázornite.

a) $f_1: y = \dfrac{x}{6} + 1$

b) $f_2: y = \dfrac{1}{x-5} + 3$

c) $f_3: y = \sqrt{x+2} - 5$

d) $f_4: y = 3 \cdot 2^x - 1$

e) $f_5: y = 3 - \ln(x - 2)$

f) $f_6: y = 100 - x^2$, pre $x \in \langle -\infty; 0 \rangle$

V úlohách 2.3.5 – 2.3.9 určte definičný obor daných funkcií.

2.3.5 a) $f_1: y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-4}$

b) $f_2: y = \sqrt{2 + x - x^2}$

c) $f_3: y = \sqrt{\dfrac{-3}{x^2 - 5x + 4}}$

d) $f_4: y = \dfrac{-3}{\sqrt{x^2 - 3x}}$

e) $f_5: y = \dfrac{\sqrt{2x+10}}{16 - x^2}$

f) $f_6: y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x^2 - 5}$

g) $f_7: y = \sqrt{15 + 2x - x^2} + \dfrac{1}{8 - 2x}$

h) $f_8: y = \sqrt{x - x^3}$

2.3.6 a) $f_1: y = \log\left(x^2+1\right)$

b) $f_2: y = e^{\log\left(2x^2-5x-3\right)}$

c) $f_3: y = \dfrac{-1}{\ln\left(2x-x^2\right)}$

d) $f_4: y = \dfrac{2}{x-1} - \log 4x$

e) $f_5: y = \log x^2 + \log\left(4-x^2\right)$

f) $f_6: y = \ln\sqrt{\dfrac{3x-1}{x+4}}$

g) $f_7: y = \dfrac{\sqrt{\ln\left(x-1\right)}}{x-2}$

h) $f_8: y = \sqrt{1-\log_2\left(x^2+7x+10\right)}$

2.3.7 a) $f_1: y = \arcsin\dfrac{2x+4}{x}$

b) $f_2: y = \operatorname{arccotg}\dfrac{x^2}{x^2-2}$

c) $f_3: y = \arccos\dfrac{1}{x^2}$

d) $f_4: y = \dfrac{1}{x} + \arccos\left(x^2-1\right)$

e) $f_5: y = \dfrac{x}{\operatorname{arctg}\left(12-4x\right)}$

f) $f_6: y = \sqrt{\arcsin\left(x-4\right)}$

2.3.8 a) $f_1: y = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}} + \log(x+1)$

b) $f_2: y = \sqrt{x^2+4x-5} + \ln(x+5)$

c) $f_3: y = \dfrac{\log(3-2x)}{\sqrt{4x-x^2}}$

d) $f_4: y = \log\left(x^2-13x+22\right) + \dfrac{1}{\sqrt{10x-x^2}}$

e) $f_5: y = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln\left(2x-5\right)} - \sqrt{5-x}$

f) $f_6: y = \dfrac{\log_3\left(8-2x-x^2\right)}{\sqrt{x}-1}$

g) $f_7: y = 5\log\left(\dfrac{x+1}{x-5}\right) - \dfrac{\sqrt{5x-10}}{x^2-36}$

h) $f_8: y = \sqrt{\log\dfrac{5x-x^2}{4}} + \dfrac{1}{\log_2 x-2}$

2.3.9 a) $f_1: y = \log\left(1-2x\right) - 3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$

b) $f_3: y = \arccos\left(3+2x\right) + \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$

c) $f_5: y = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{\ln x} - 4 \cdot \arcsin \dfrac{1 - 2x}{4}$

d) $f_7: y = \arccos \dfrac{2x - 11}{3} + \ln\left(6 + 11x - 2x^2\right)$

e) $f_8: y = \dfrac{14 - x}{\ln\left(x^2 - 4\right)} + \arccos\left(3x + 7\right)$

Výsledky

2.3.1 a) $F: y = \log^2 x + 2$, $G: y = \log\left(x^2 + 2\right)$;

b) $F: y = \sqrt{e^x + 1}$, $G: y = e^{\sqrt{x+1}}$;

c) $F: y = \dfrac{5}{\operatorname{arctg} x}$, $G: y = \operatorname{arctg} \dfrac{5}{x}$;

d) $F: y = \left(\sin 3^{2x}\right)^2$, $G: y = 3^{2\sin^2 x}$.

2.3.2 a) $u = x^3 + 1$, $y = \sqrt{u}$; **b)** $u = x^4$, $y = \cos u$; **c)** $u = \ln x$, $y = \dfrac{1}{u^2}$;

d) $u = \operatorname{arccotg} x$, $y = 2^u$; **e)** $v = 6 - x$, $u = \log v$, $y = \sqrt[3]{u}$;

f) $v = e^x$, $u = \dfrac{1}{v}$, $y = \arcsin u$.

2.3.3 a) Nie; **b)** nie; **c)** áno; **d)** áno; **e)** nie; **f)** áno.

2.3.4 a) $f_1^{-1}: y = 6x - 6$, $D\left(f_1^{-1}\right) = H\left(f_1^{-1}\right) = R$;

b) $f_2^{-1}: y = \dfrac{1}{x-3} + 5$, $D\left(f_2^{-1}\right) = R - \{3\}$, $H\left(f_2^{-1}\right) = R - \{5\}$;

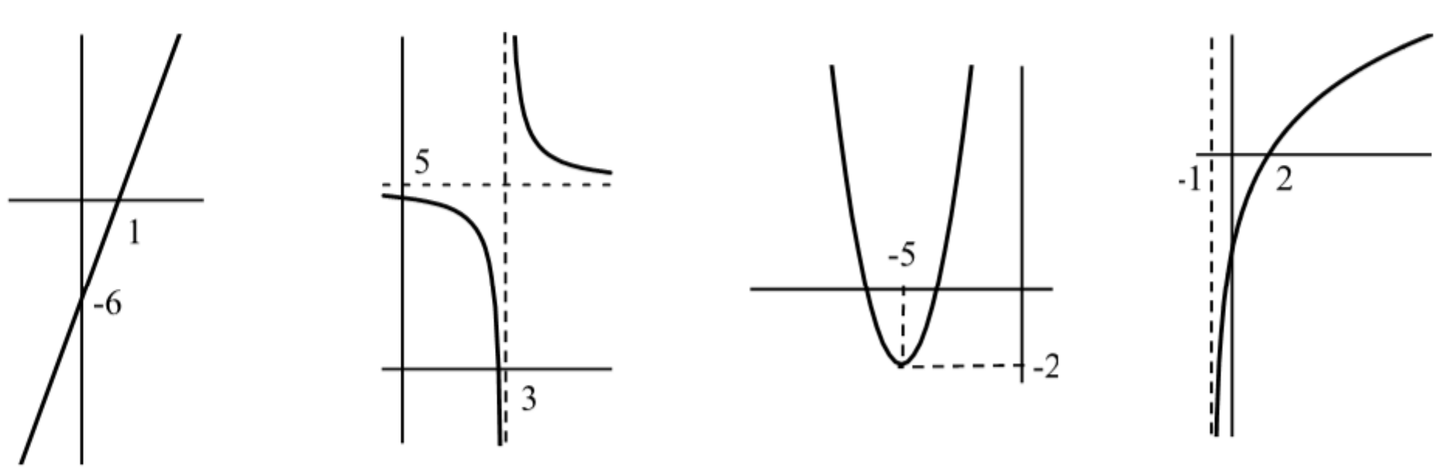
c) $f_3^{-1}: y = x^2 + 10x + 23$, $D\left(f_3^{-1}\right) = \langle -5; \infty)$, $H\left(f_3^{-1}\right) = \langle -2; \infty)$;

d) $f_4^{-1}: y = \log_2 \dfrac{x+1}{3}$, $D\left(f_4^{-1}\right) = (-1; \infty)$, $H\left(f_4^{-1}\right) = R$;

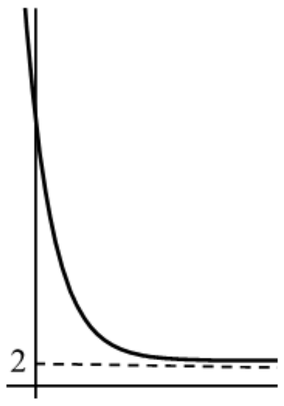
e) $f_5^{-1}: y = e^{3-x} + 2$, $D\left(f_5^{-1}\right) = R$, $H\left(f_5^{-1}\right) = (2; \infty)$;

f) $f_6^{-1}: y = -\sqrt{100 - x}$, $D\left(f_6^{-1}\right) = (-\infty; 100\rangle$, $H\left(f_6^{-1}\right) = (-\infty; 0\rangle$.

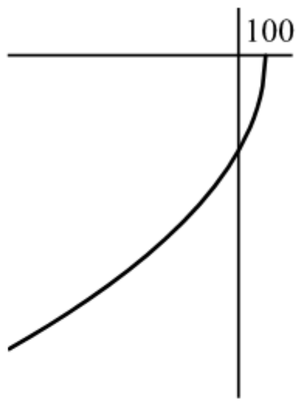
a) graf f_1^{-1} **b)** graf f_2^{-1} **c)** graf f_3^{-1} **d)** graf f_4^{-1}



d) graf f_5^{-1}



e) graf f_6^{-1}



2.3.5 a) $\langle -1;4)\cup(4;\infty)$; **b)** $\langle -1;2\rangle$; **c)** $(1;4)$; **d)** $(-\infty;0)\cup(3;\infty)$; **e)** $\langle -5;\infty)-\{\pm 4\}$;

f) $\langle \sqrt{5};\infty)$; **g)** $\langle -3;4)\cup(4;5\rangle$; **h)** $(-\infty;-1\rangle\cup\langle 0;1\rangle$.

2.3.6 a) R; **b)** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(3;\infty)$; **c)** $(0;1)\cup(1;2)$; **d)** $(0;1)\cup(1;\infty)$; **e)** $(-2;0)\cup(0;2)$;

f) $(-\infty;-4)\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$; **h)** $(2;\infty)$.

2.3.7 a) $\left\langle -4;-\frac{4}{3}\right\rangle$; **b)** $R-\{\pm\sqrt{2}\}$; **c)** $(-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;\infty)$; **d)** $\langle -\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle-\{0\}$; **e)** $R-\{3\}$;

f) $\langle 4;5\rangle$.

2.3.8 a) $(-1,\ 5)$; **b)** $\langle 1,\infty)$; **c)** $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$; **d)** $(0,2)$; **e)** $\langle 3;5\rangle$; **f)** $\langle 0,1)\cup(1,2)$;

g) $(5;6)\cup(6;\infty)$; **h)** $\langle 1;4)$.

2.3.9 a) $\left\langle -\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$; **b)** $\varnothing$; **c)** $\left\langle 2;\frac{5}{2}\right\rangle$; **d)** $\langle 4;6)$; **e)** $\left\langle -\frac{8}{3};-\sqrt{5}\right)\cup(-\sqrt{5};-2)$.

2.4 Základné funkcie ekonomickej analýzy

Definičným oborom funkcií ekonomickej analýzy je zvyčajne množina všetkých celých nezáporných čísel (Z_0^+) alebo jej podmnožina. V matematickom modeli však môžeme použiť namiesto diskrétneho definičného oboru funkcie spojitý definičný obor (t. j. množinu R_0^+).

Premennú vyjadrujúcu množstvo výrobkov, resp. úroveň produkcie budeme označovať x alebo q (z anglického slova *quantity* = množstvo).

Medzi základné funkcie ekonomickej analýzy patria:

$C(x)$ – funkcia ***celkových nákladov***; určuje celkové náklady, ak sa vyrobí x jednotiek produkcie. Platí

$$TC = C(x) = FC + VC(x),\ x \geq 0$$

kde FC sú ***fixné náklady*** (konštanta) a $VC(x)$ sú ***variabilné náklady***, ktoré sa menia v závislosti od vyrobeného počtu jednotiek produkcie x.
Je zrejmé, že

$$FC = C(0)$$

$\tilde{C}(x)$ – funkcia ***priemerných nákladov***; určuje náklady pripadajúce na jednotku produkcie, ak sa vyrobí x jednotiek produkcie. Platí

$$\tilde{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$R(x)$ – funkcia ***celkových príjmov***; určuje celkové príjmy, ak sa predá x jednotiek produkcie. Platí

$$TR = R(x)$$

$\tilde{R}(x)$ – funkcia ***priemerných príjmov***; určuje príjmy z predaja jedného výrobku, ak sa predá x jednotiek produkcie. Platí

$$\tilde{R}(x) = \frac{R(x)}{x}$$

$P(x)$ – funkcia ***celkových ziskov***; určuje celkové zisky, ak sa vyrobí a predá x jednotiek produkcie. Platí

$$TP = P(x)$$

$\tilde{P}(x)$ – funkcia ***priemerných príjmov***; určuje zisk pripadajúci na jeden výrobok, ak sa vyrobí a predá x jednotiek produkcie. Platí

$$\tilde{P}(x) = \frac{P(x)}{x}$$

Funkcia dopytu

Vyjadruje vzťah medzi množstvom q, resp. x jednotiek produkcie, ktoré sú na trhu a spotrebitelia sú ochotní si ich zakúpiť za cenu p (*model správania sa spotrebiteľa*). Je zrejmé, že zníženie (zvýšenie) ceny výrobku vyvolá zvýšenie (zníženie) dopytu po tomto výrobku. Z toho vyplýva, že funkcia dopytu je klesajúca.

Funkciu budeme označovať takto:

$$q = d(p)$$

Častejšie sa však funkcia dopytu vyjadruje ako závislosť jednotkovej ceny p od množstva jednotiek produkcie q na konkurenčnom trhu:

$$p = D(q)$$

Základné vzťahy medzi funkciami ekonomickej analýzy:

$$\left.\begin{aligned} R(x) &= x \cdot p(x) \\ P(x) &= R(x) - C(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(x) = x \cdot p(x) - C(x)$$

Funkcia ponuky

Vyjadruje vzťah medzi množstvom q, resp. x jednotiek produkcie, ktoré je výrobca daného výrobku ochotný vyrobiť a následne predať na trhu za jednotkovú cenu p (*model správania sa výrobcu*). Z toho vyplýva, že funkcia ponuky je rastúca.

Funkciu budeme označovať takto:

$$q = s(p)$$

Často sa funkcia ponuky vyjadruje však aj v tvare:

$$p = S(q)$$

Príklad 2.4.1 Daná je funkcia celkových nákladov $C(x) = -0{,}1x^2 + 100x + 5000$ a funkcia celkových príjmov $R(x) = -0{,}2x^2 + 600x$, kde $0 \le x \le 500$.

a) Určme fixné a variabilné náklady.
b) Určme funkciu celkových ziskov $P(x)$.
c) Určme, pri akej produkcii začína byť výroba rentabilná.
d) Graficky znázornime funkcie $C(x)$, $R(x)$, $P(x)$.

Riešenie: a) Variabilné náklady sa menia v závislosti od počtu jednotiek produkcie x, teda

$$VC(x) = -0{,}1x^2 + 100x;\ 0 \le x \le 500$$

a fixné náklady sú konštantné

$$FC = C(0) = 5\,000$$

b) Pre funkciu celkových ziskov platí

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

Po dosadení dostaneme

$$P(x) = -0{,}2x^2 + 600x - (-0{,}1x^2 + 100x + 5000)$$

$$P(x) = -0{,}1x^2 + 500x - 5000;\ 0 \le x \le 500$$

c) Výroba je rentabilná, ak sa dosahuje kladný zisk, teda $P(x) > 0$. Preto

$$-0{,}1x^2 + 500x - 5\,000 > 0$$

$$x^2 - 5\,000x + 50\,000 < 0$$

Riešením kvadratickej nerovnice je $x \in (10{,}02;\ 4\,989{,}98)$. Keďže zo zadania príkladu platí $x \in \langle 0;\ 500 \rangle$, dostaneme riešenie $x \in (10{,}02;\ 500\rangle$.

Výroba začína byť rentabilná pri výrobe a predaji 10,02 jednotiek produkcie. Je zrejmé, že ak by sa realizovala produkcia v kusoch, potom výroba by bola rentabilná, ak sa vyrobí a predá aspoň 11 kusov a menej ako 500 kusov produkcie.

d) Funkcie $C(x), R(x), P(x)$ sú kvadratické funkcie, a teda ich grafmi sú paraboly. Aby sme ich vedeli graficky znázorniť, upravíme ich predpisy na vrcholový tvar rovnice paraboly a potom využijeme transformácie grafu elementárnej funkcie $f: y = x^2$.

Funkcia celkových nákladov sa dá doplnením na úplný štvorec vyjadriť v tvare

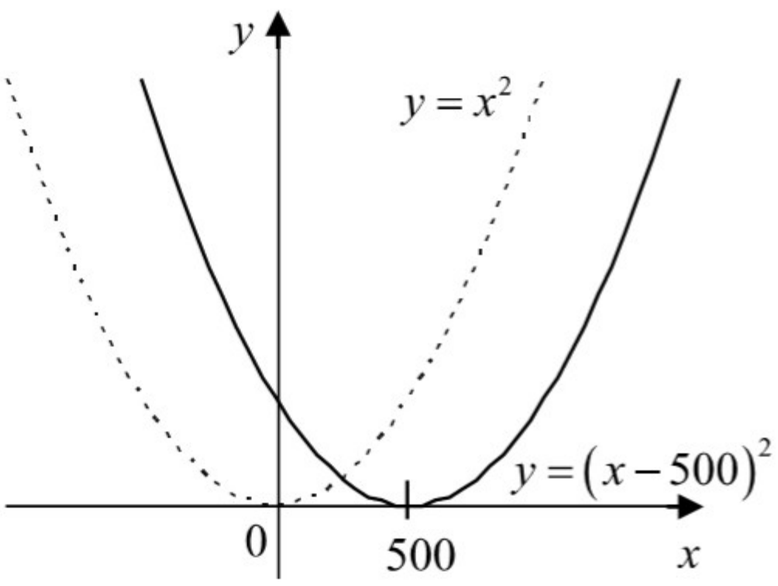
$$C(x) = -0,1x^2 + 100x + 5000 = -0,1\left(x^2 - 1000x - 50\,000\right) =$$

$$= -0,1\left[\left(x-500\right)^2 - 500^2 - 50\,000\right] = -0,1\left[\left(x-500\right)^2 - 300\,000\right]$$

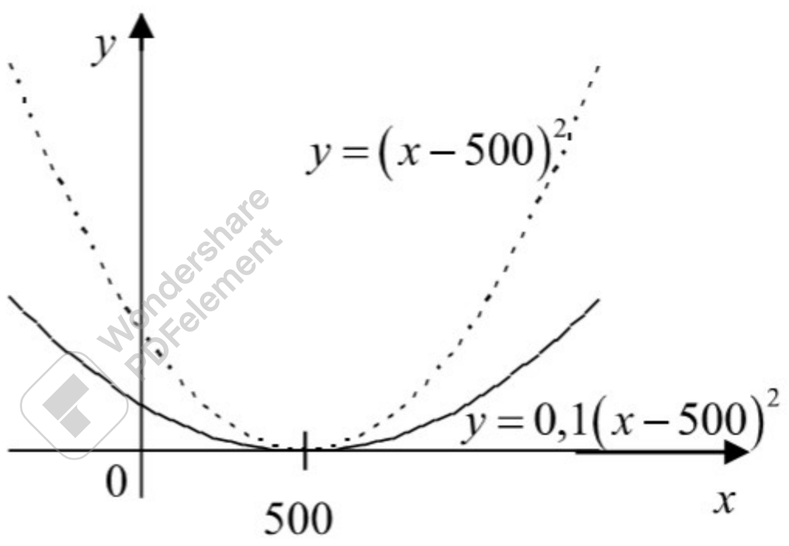
$$C(x) = -0,1(x-500)^2 + 30000$$

Je zrejmé, že vrchol paraboly je v bode $[500; 30\,000]$.

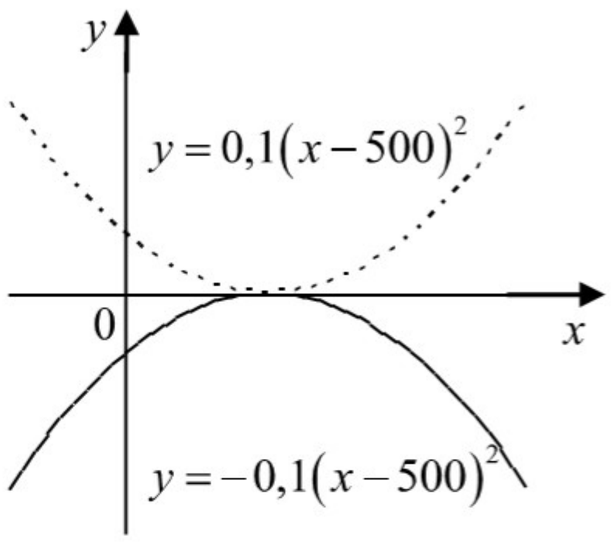
Na obr. 2.4.1 až 2.4.5 sú v postupných krokoch zobrazené transformácie grafu funkcie $f: y = x^2$, ktorých výsledkom je graf funkcie $f: y = -0,1(x-500)^2 + 30000$.



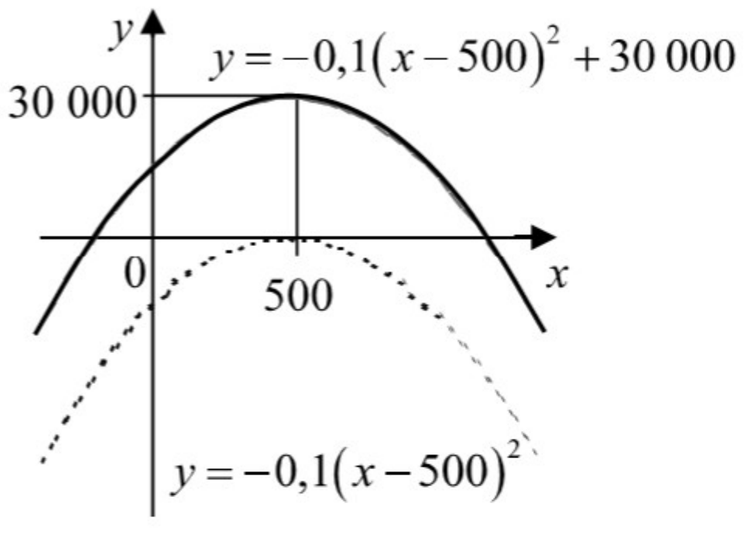
Obr. 2.4.1



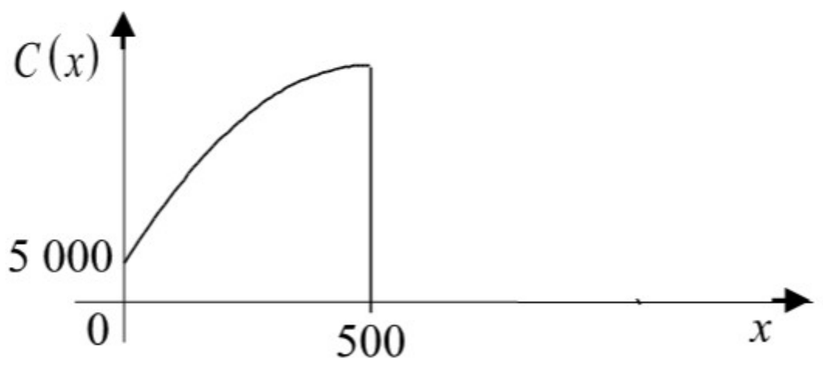
Obr. 2.4.2



Obr. 2.4.3



Obr. 2.4.4



Obr. 2.4.5 Graf nákladovej funkcie $C(x)$ pre $0 \le x \le 500$

Podobne upravíme funkciu celkových príjmov a celkových ziskov:

$$R(x) = -0,2x^2 + 600x = -0,2\left(x^2 - 3\,000x\right) =$$

$$= -0,2\left[\left(x - 1\,500\right)^2 - 1\,500^2\right] = -0,2\left(x - 1\,500\right)^2 + 450\,000$$

$$R\left(x\right) = -0,2\left(x - 1\,500\right)^2 + 450\,000$$

Je zrejmé, že vrchol paraboly je v bode $\left[1\,500;\, 450\,000\right]$.

Pre funkciu celkových ziskov platí

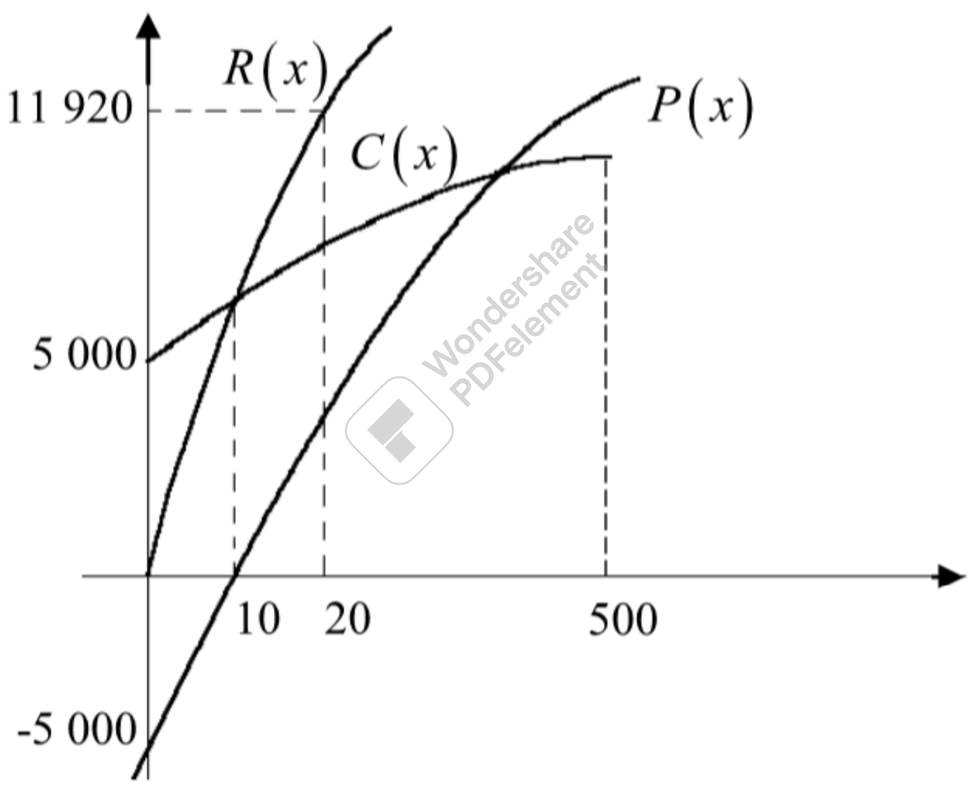
$$P(x) = -0,1\left(x^2 - 5\,000x + 5\,0\,000\right) = -0,1\left[\left(x - 2\,500\right)^2 - 2\,500^2 + 5\,0\,000\right] =$$

$$= -0,1\left[\left(x - 2\,500\right)^2 - 6\,200\,000\right] = -0,1(x - 2\,500)^2 + 620\,000$$

$$P(x) = -0,1(x - 2\,500)^2 + 620\,000$$

Z vyjadrenia funkcie $P(x)$ je zrejmé, že vrchol paraboly je v bode $\left[2\,500;\, 620\,000\right]$.

Na obr. 2.4.6 sú graficky znázornené funkcie $C(x), R(x), P(x)$ na intervale $\langle 0;\, 500\rangle$.



Obr. 2.4.6 Grafy funkcií $C(x), R(x), P(x)$

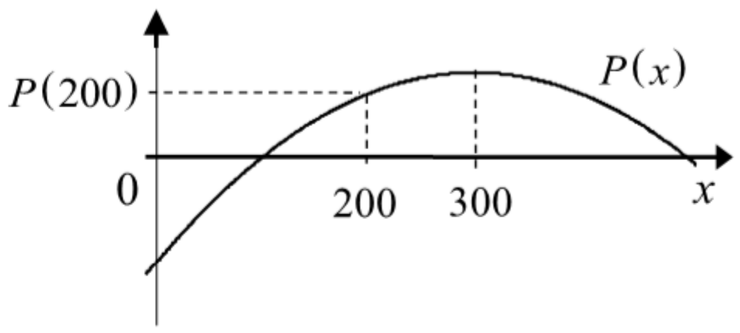
Príklad 2.4.2 Daná je funkcia celkového zisku $P(x) = -x^2 + 600x - 5\,000$ pre $x \in \langle 0;\, 300\rangle$.

a) Vypočítajme hodnotu celkového zisku, ak sa vyrobí 200 jednotiek produkcie.
b) Určme, ako sa zmení celkový zisk, ak sa objem produkcie zvýši z 200 jednotiek produkcie o 10 jednotiek.
c) Určme funkciu priemerného zisku.
d) Určme priemerný zisk, ak sa vyrobí 200 jednotiek produkcie.
e) Určme priemerný zisk, ak sa objem produkcie zvýši z 200 jednotiek produkcie o 10 jednotiek.
f) Zostrojme grafy funkcií $P(x)$ a $\tilde{P}(x)$.

Riešenie: a) Hodnota celkového zisku, ak sa vyrobí a predá 200 jednotiek produkcie, je funkčná hodnota funkcie celkového zisku v bode $x_0 = 200$ (obr. 2.4.7). Teda

$$P(200) = -200^2 + 600 \cdot 200 - 5\,000 = 75\,000 \text{ p. j.}$$

Ak sa vyrobí a predá 200 *jednotiek produkcie, celkový zisk bude* 75 000 *p. j.*



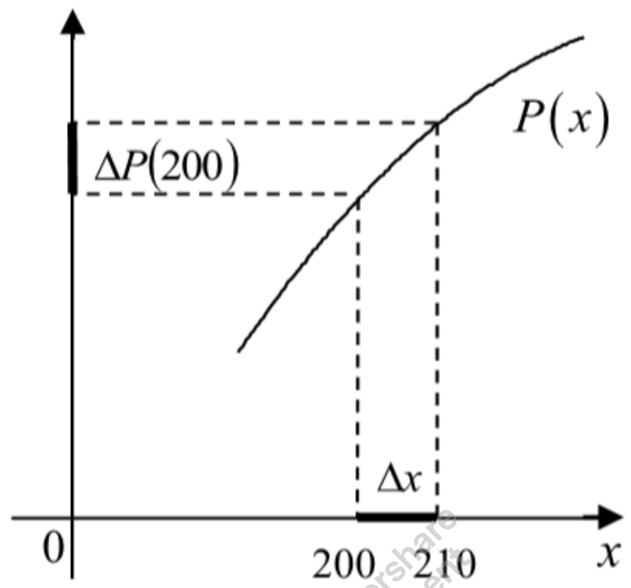
Obr. 2.4.7 Graf funkcie $P(x)$

b) Budeme počítať $\Delta P(200)$. Platí: $\Delta P(x_0) = P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)$

Ak $x_0 = 200$ a $\Delta x = 10$, potom platí

$$\Delta P(200) = P(210) - P(200) = 76\,900 - 75\,000 = 1\,900 \text{ p. j.}$$

Ak sa produkcia zvýši z 200 *jednotiek o* 10 *jednotiek, celkový zisk vzrastie o* 1 900 *p. j.*



Obr. 2.4.8 Grafické znázornenie hodnoty $\Delta P(200)$

c) Pre funkciu priemerného zisku platí

$$\tilde{P}(x) = \frac{P(x)}{x}, \quad x > 0$$

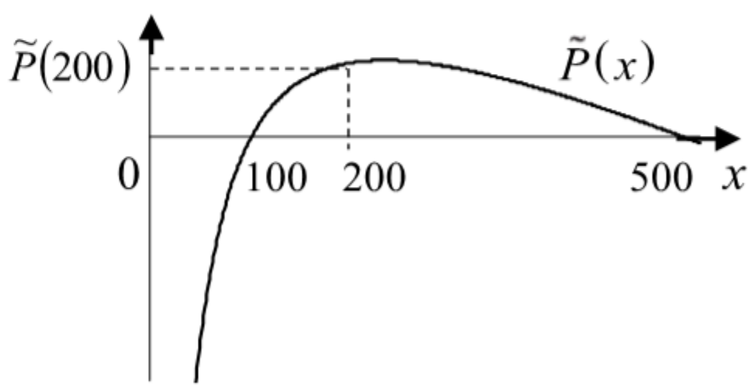
Teda

$$\tilde{P}(x) = -x + 600 - \frac{5\,000}{x}, \quad x > 0$$

d) Priemerný zisk, ak sa vyrobí 200 jednotiek produkcie, je funkčná hodnota funkcie priemerného zisku v bode $x_0 = 200$ (obr. 2.4.9). Teda

$$\tilde{P}(200) = \frac{P(200)}{200} = \frac{75\,000}{200} = 375 \text{ p. j.}$$

Zisk pripadajúci na jeden výrobok pri produkcii 200 *jednotiek je* 375 *p. j.*



Obr. 2.4.9 Graf funkcie $\tilde{P}(x)$

e) Priemerný zisk pri zvýšení produkcie z x_0 na $x_0 + \Delta x$ vyjadruje vzťah

$$\frac{\Delta P(x_0)}{\Delta x} = \frac{P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)}{\Delta x}$$

Pretože $x_0 = 200$ a $\Delta x = 10$, platí

$$\frac{\Delta P(200)}{\Delta x} = \frac{P(210) - P(200)}{10} = \frac{76\,900 - 75\,000}{10} = 190 \text{ p. j.}$$

Zisk pripadajúci na jeden výrobok pri zvýšení produkcie z 200 jednotiek na 210 jednotiek je 190 p. j.

Príklad 2.4.3 Závislosť jednotkovej ceny p tovaru od množstva produkcie q, po ktorom je dopyt, je daná funkciou D: $p = 6 + 4e^{-\frac{q}{3}}$.

a) Nájdime závislosť dopytu q od jednotkovej ceny p.
b) Určme definičný obor a obor hodnôt obidvoch funkcií.
c) Určme, pri akej cene dopyt zaniká.
d) Graficky znázornime obidve funkcie.

Riešenie: a) Závislosť množstva q od ceny p určíme tak, že z funkcie dopytu $p = 6 + 4e^{-\frac{q}{3}}$ vyjadríme premennú q. Hľadáme teda predpis inverznej funkcie

$$\frac{p-6}{4} = e^{-\frac{q}{3}}$$

$$\ln\frac{p-6}{4} = \ln e^{-\frac{q}{3}}$$

$$\ln\frac{p-6}{4} = -\frac{q}{3}$$

Závislosť množstva q od ceny p vyjadruje funkcia dopytu v tvare

$$d\colon\ q = -3\ln\frac{p-6}{4}$$

Ak by sme v ekonomických aplikáciách preznačili premenné p a q, zmenil by sa ich ekonomický význam (*p – cena, q – množstvo*).

b) Určiť definičný obor a obor hodnôt oboch funkcií znamená nájsť množinu prípustných hodnôt pre cenu p a množstvo q.

Definičný obor funkcie D: $p = 6 + 4e^{-\frac{q}{3}}$ je interval $\langle 0; \infty)$, teda

$$q \in \langle 0; \infty).$$

Určiť obor hodnôt znamená dosadiť krajné body intervalu do predpisu funkcie. Keďže dopytová funkcia D je klesajúca, krajné body intervalu, ktorý bude určovať obor hodnôt funkcie, budú usporiadané v opačnom poradí.

Teda, ak $q=0$, potom $p=10$. Funkčnú hodnotu funkcie D v bode ∞ nemôžeme počítať, preto ju určíme na základe znalostí vlastností elementárnej funkcie $f: y=e^{-x}=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ a jej grafu.

Obor hodnôt funkcie D: $p=6+4e^{-\frac{q}{3}}$ bude

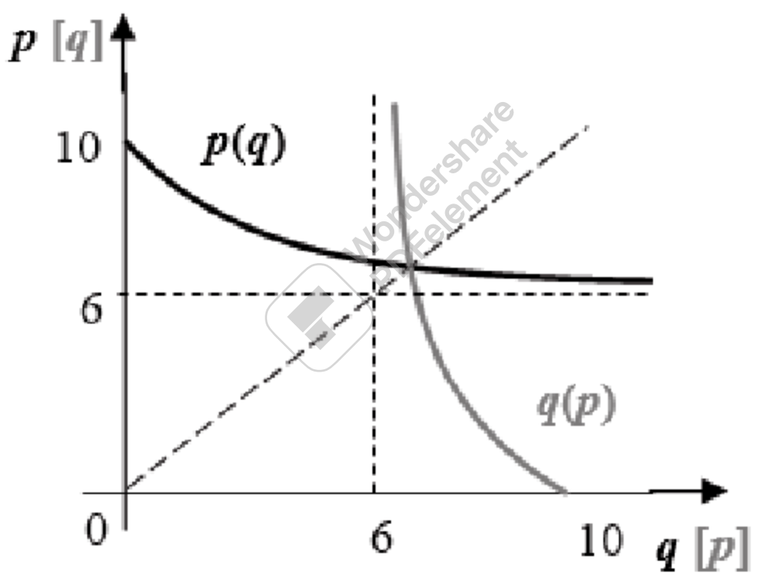
$$p\in\langle 6;10\rangle$$

Dopytová funkcia d je inverzná k funkcii D. Preto definičný obor funkcie d: $q=-3\ln\frac{p-6}{4}$ je množina $\langle 6;10\rangle$ a obor hodnôt je $\langle 0;\infty\rangle$.

c) Dopyt zaniká, ak požadované množstvo produkcie je nulové. Teda, ak $q=0$. Potom platí

$$p=6+4e^0=10 \text{ p. j.}$$

d) Na obr. 2.4.10 sú graficky znázornené funkcie dopytu $q(p)$ a $p(q)$.



Obr. 2.4.10 Grafy funkcií dopytu $q(p)$ a $p(q)$

Dopyt a ponuka na trhu sa navzájom ovplyvňujú. V prípade, že množstvo tovaru žiadaného spotrebiteľmi sa rovná množstvu tovaru, ktorý je na trhu k dispozícii, nastáva ***rovnovážny stav na trhu***. Platí

$$d(p)=s(p)$$

Z poslednej rovnice vypočítame tzv. ***rovnovážnu trhovú cenu***, ktorú budeme označovať p^*. Množstvo tovaru požadovaného spotrebiteľom pri rovnovážnej cene p^* označíme q^*.

Príklad 2.4.4 Dopyt a ponuku po istom tovare na konkurenčnom trhu určuje funkcia dopytu d: $q=\frac{4\,600-p}{25}$ a ponuky s: $q=\sqrt{p-200}$. Určme trhovú rovnovážnu cenu p^* a množstvo tovaru q^*, pri ktorých nastáva rovnovážny stav na trhu.

Riešenie: Trhovú rovnovážnu cenu p^*, pri ktorej nastáva rovnovážny stav na trhu, vypočítame z rovnice

$$\frac{4\,600-p}{25}=\sqrt{p-200}$$

$$(4\,600-p)^2=625(p-200)$$

$$p^2-9\,825p+21\,285\,000=0$$

Riešením kvadratickej rovnice sú dva korene $p_1=3\,225$ a $p_2=6\,600$.

Vzhľadom na definičné obory funkcie dopytu $p\in(0;4\,600\rangle$ a ponuky $p\in\langle 200;\infty)$ vyhovuje riešeniu rovnice len koreň $p_1=3\,225$.

Rovnovážny stav na trhu teda nastane pri rovnovážnej cene

$$p^*=3\,225 \text{ p. j.}$$

a pri objeme ponuky a dopytu

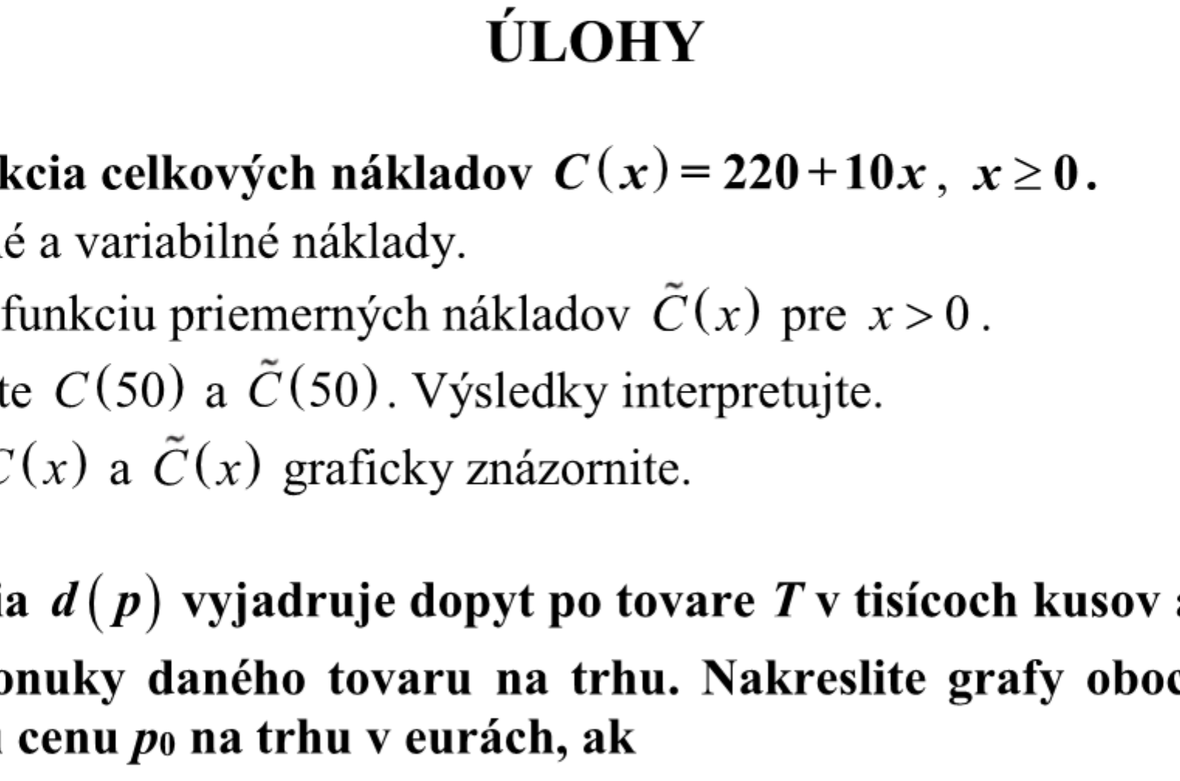
$$q^*=\sqrt{3\,225-200}=55$$

V ekonomickej literatúre sa funkcie dopytu a ponuky znázorňujú tak, že na x-ovej osi sa zobrazuje množstvo dopytu, resp. ponuky q a na y-ovej osi cena tovaru p. Preto z funkcie dopytu a ponuky vyjadríme závislosť ceny p od množstva produkcie q. Dostaneme

$$D\colon p=4\,600-25q$$

$$S\colon p=q^2+200$$

Rovnováha medzi dopytom a ponukou je znázornená na obr. 2.4.11.



Obr. 2.4.11 Rovnovážny stav na trhu

ÚLOHY

2.4.1 Daná je funkcia celkových nákladov $C(x)=220+10x$, $x\geq 0$.

1. Určte fixné a variabilné náklady.
2. Vyjadrite funkciu priemerných nákladov $\tilde{C}(x)$ pre $x>0$.
3. Vypočítajte $C(50)$ a $\tilde{C}(50)$. Výsledky interpretujte.
4. Funkcie $C(x)$ a $\tilde{C}(x)$ graficky znázornite.

2.4.2 Nech funkcia $d(p)$ vyjadruje dopyt po tovare T v tisícoch kusov a funkcia $s(p)$ je funkciou ponuky daného tovaru na trhu. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu p_0 na trhu v eurách, ak

a) $d: q = 128 - 3p$ a $s: q = 2p + 13$

b) $d: q = 100 - p^2$ a $s: q = 2p + 20$

c) $d: q = 7 + \frac{21}{p}$ a $s: q = p + 3$

2.4.3 Závislosť jednotkovej ceny *p* tovaru od množstva produkcie *q*, po ktorom je dopyt, je daná funkciou $p(q)$.

1. Nájdite závislosť dopytu q od jednotkovej ceny p.
2. Určte definičný obor a obor hodnôt obidvoch funkcií.
3. Určte, pri akej cene dopyt zaniká.
4. Graficky znázornite funkcie $p(q)$ a $q(p)$.

a) $p = 125 - 0,05q$

b) $p = \sqrt{400 - q}$

c) $p = 121 - q^2$

d) $p = \frac{50}{q+2} + 10$

e) $p = \frac{171}{q+3}$

f) $p = 4e^{-\frac{q}{3}} + 8$

2.4.4 Daná je dopytová funkcia $p(q)$ alebo $q(p)$. Určte:

1. funkciu celkových príjmov $R(q)$ a priemerných príjmov $\tilde{R}(q)$.
2. celkový a priemerný príjem pri danej produkcii q_0.
3. priemerný príjem pripadajúci na jednotku produkcie pri zvýšení produkcie z úrovne q_0 o hodnotu Δq.

a) $p(q) = 25 - \frac{q^2}{9}$; $q_0 = 3$; $\Delta q = 6$

b) $p(q) = \sqrt{8\,000 - q}$; $q_0 = 79$; $\Delta q = 21$

c) $q(p) = -2 \ln \frac{p-3}{5}$; $q_0 = 4$; $\Delta q = 10$

2.4.5 Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu *x* ton výrobku sú dané funkciou *C*(*x*), $x \geq 0$ a určená je aj predajná cena *p* za 1 tonu výrobku. Určte funkciu celkových príjmov *R*(*x*) a zistite, kedy je výroba zisková (rentabilná), ak

a) $C(x) = 2\,000 + 40x + x^2$; $p = 130$

b) $C(x) = 360 + 10x + 0,2x^2$; $p = 50 - 0,2x$

2.4.6 Daná je funkcia celkových nákladov $C(x)$, $x \geq 0$ a funkcia dopytu $p(x)$ alebo $x(p)$. Vyjadrite funkciu celkového zisku $P(x)$ a zistite, pri akej úrovni produkcie x_0 začína byť výroba rentabilná.

a) $C(x) = 150 + 6x$
$p(x) = 9$

e) $C(x) = 768 + 10x - 0,02x^2$
$p(x) = 22 - 0,05x$

b) $C(x)=200+3x-0,01x^2$

$p(x)=7$

c) $C(x)=0,1x^2+x+700$

$p(x)=38x$

d) $C(x)=210+17x-0,02x^2$

$x(p)=555-25p$

f) $C(x)=300+4x-0,01x^2$

$x(p)=1\,200-200p$

g) $C(x)=0,04x^2+140x+15\,000$

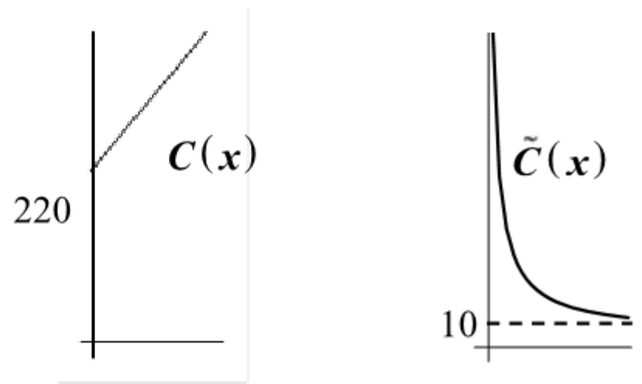
$p(x)=300-0,06x$

h) $C(x)=-0,1(x-500)^2+35\,000$

$p(x)=600-0,02x$

Výsledky

2.4.1 $VC=10x,\ FC=220,\ \tilde{C}(x)=\frac{220}{x}+10,\ C(50)=720,\ \tilde{C}(50)=14,4$.



2.4.2 a) $p_0=23$ €; **b)** $p_0=8$ €; **c)** $p_0=7$ €.

2.4.3 a) $q(p)=2\,500-20p,\ p\in(0;125\rangle,\ q\in\langle 0;2\,500),\ p=125$ p. j.,

b) $q(p)=400-p^2,\ p\in(0;20\rangle,\ q\in\langle 0;400),\ p=20$ p. j.;

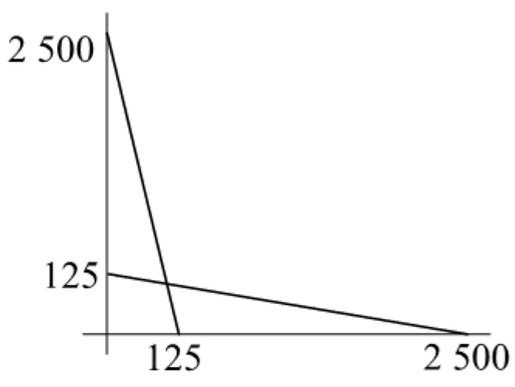
c) $q(p)=\sqrt{121-p},\ p\in(0;121\rangle,\ q\in\langle 0;11),\ p=121$ p. j.;

d) $q(p)=\frac{50}{p-10}-2,\ p\in(10;35\rangle,\ q\in\langle 0;\infty),\ p=35$ p. j.;

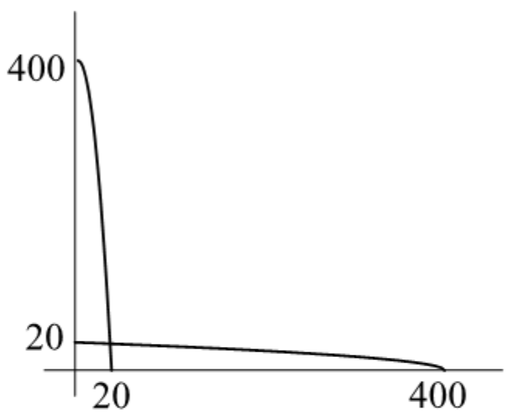
e) $q(p)=171\cdot p^{-1}-3,\ p\in(0;57\rangle,\ q\in\langle 0;\infty),\ p=57$ p. j.;

f) $q(p)=-3\ln\frac{p-8}{4},\ p\in(8;12\rangle,\ q\in\langle 0;\infty),\ p=12$ p. j..

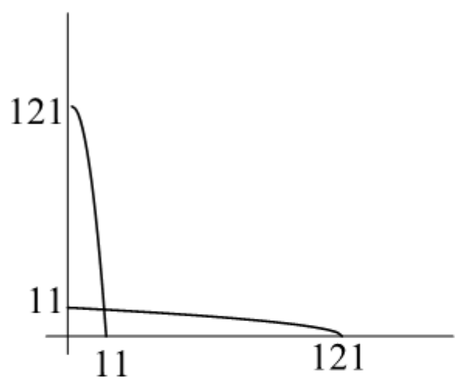
a)



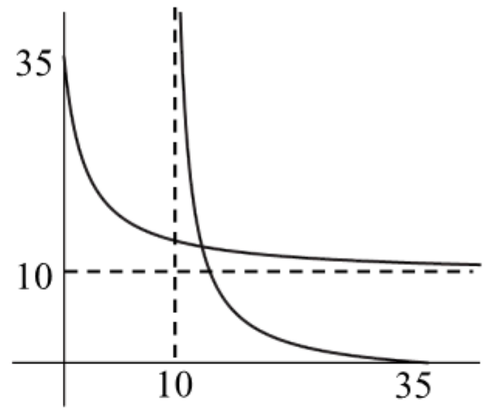
b)



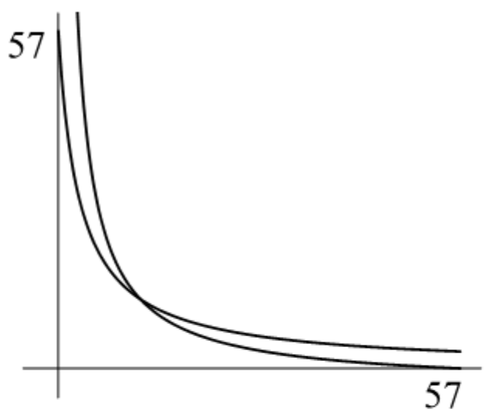
c)



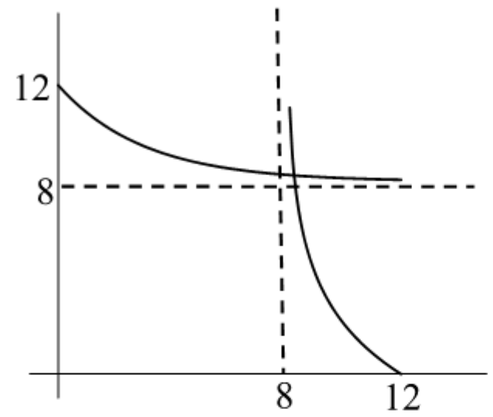
d)



e)



f)



2.4.4 a) $R(q)=25q-\frac{q^3}{9}$, $\tilde{R}(q)=25-\frac{q^2}{9}$, $R(3)=72$, $\tilde{R}(3)=24$, $\frac{\Delta R(3)}{\Delta q}=12$;

b) $R(q)=q\cdot\sqrt{8\,000-q}$, $\tilde{R}(q)=\sqrt{8\,000-q}$, $R(79)=7\,031$, $\tilde{R}(79)=89$,

$\frac{\Delta R(79)}{\Delta q}\doteq 88,44$;

c) $R(q)=q\cdot\left(3+5e^{-\frac{q}{2}}\right)$, $\tilde{R}(q)=3+5e^{-\frac{q}{2}}$, $R(4)\doteq 14,7$; $\tilde{R}(4)\doteq 3,68$; $\frac{\Delta R(4)}{\Delta q}\doteq 2,74$.

2.4.5 a) $R(x)=130x$, $x\in(40;50)$;

b) $R(x)=50x-0,2x^2$, $x\in(10;90)$.

2.4.6 a) $P(x)=3x-150$; $x_0=50$;

b) $P(x)=0,01x^2+4x-200$, $x_0=44,95$;

c) $P(x)=-0,1x^2+37x-700$, $x_0=20$

d) $P(x)=-0,02x^2+5,2x-210$, $x_0=50$;

e) $P(x)=-0,03x^2+12x-768$, $x_0=80$;

f) $P(x)=0,005x^2+2x-300$, $x_0=116,23$;

g) $P(x)=-0,1x^2+160x-15\,000$, $x_0=100$

h) $P(x)=0,08x^2+500x-10\,000$; $x_0=19,94$.

2.5 Limita funkcie

Pojem „limita funkcie“ je v matematike veľmi dôležitý hlavne z hľadiska vyšetrovania spojitosti funkcie, určovania asymptot grafu funkcie a jeho pochopenie je dôležitým predpokladom zvládnutia celého diferenciálneho počtu, ktorému sa budeme venovať v ďalšej kapitole.

Pojem limita je odvodený z latinského slova *limes*, čo v slovenčine znamená hranica, okraj. Aby sme mohli definovať pojem limita funkcie, zavedieme pojmy rozšírená množina reálnych čísel a okolie bodu.

Rozšírená množina reálnych čísel *je množina reálnych čísel R doplnená o dva navzájom rôzne prvky* $-\infty$ *(mínus nekonečno) a* $+\infty$ *(plus nekonečno), ktoré sú rôzne od každého reálneho čísla a, pričom pre každé* $a \in R$ *platí, že* $-\infty < a < \infty$.

Rozšírenú množinu reálnych čísel označujeme

$$R^* = R \cup \{-\infty;\ \infty\}$$

Okolím bodu a, $a \in R$, nazývame interval $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a označujeme ho $O_\varepsilon(a)$.

Poznáme nasledujúce druhy okolí:

$O_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ … ε-okolie bodu a

$\tilde{O}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon;\ a) \cup (a;\ a+\varepsilon)$ … neúplné ε-okolie bodu a

$O_{\varepsilon^-}(a) = (a-\varepsilon;\ a\rangle$ … ľavé ε-okolie bodu a

$O_{\varepsilon^+}(a) = \langle a;\ a+\varepsilon)$ … pravé ε-okolie bodu a

$\tilde{O}_{\varepsilon^-}(a) = (a-\varepsilon;\ a)$ … neúplné ľavé ε-okolie bodu a

$\tilde{O}_{\varepsilon^+}(a) = (a;\ a+\varepsilon)$ … neúplné pravé ε-okolie bodu a.

Okolím bodu ∞ $[-\infty]$ nazývame interval $\left(\frac{1}{\varepsilon};\ \infty\right)$ $\left[\left(-\infty;\ \frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$, kde $\varepsilon > 0$ a označujeme ho $O_\varepsilon(\infty)$ $[O_\varepsilon(-\infty)]$.

Pre neúplné ε-okolie bodu ∞ $[-\infty]$ platí:

$$\tilde{O}_\varepsilon(\infty) = O_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon};\ \infty\right)$$

$$\tilde{O}_\varepsilon(-\infty) = O_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty;\ \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Poznámka 2.5.1 Pretože $\varepsilon > 0$ a blízke nule (teda veľmi malé číslo), výraz $\frac{1}{\varepsilon}$ je pre dané ε veľmi veľké číslo. Preto interval $\left(\frac{1}{\varepsilon};\ \infty\right)$ vyjadruje ε-okolie nevlastného čísla ∞.

Definícia 2.5.1 Nech $A \subset R$ a $a \in R^*$. Bod a sa nazýva ***hromadný bod*** množiny A, ak každé jeho neúplné δ-okolie $\tilde{O}_\delta(a)$ obsahuje aspoň jeden bod z množiny A. Bod a, ktorý nie je hromadným bodom množiny A, sa nazýva ***izolovaný bod*** množiny A.

Poznámka 2.5.2 Hromadný bod nemusí byť prvkom množiny, pre ktorú je hromadným bodom. Napríklad číslo 2 a nevlastné číslo ∞ sú hromadné body množiny $\langle 2; \infty)$, ale aj $(2; \infty)$, bod a je hromadný bod neúplného δ-okolia $\tilde{O}_\delta(a) = (a-\delta;\ a) \cup (a;\ a+\delta)$. Jediným hromadným bodom množiny prirodzených čísel N je nevlastné číslo ∞.

Definícia 2.5.2 Hovoríme, že funkcia f má v hromadnom bode $a \in R^*$ definičného oboru $D(f)$ ***limitu*** $b \in R^*$ práve vtedy, ak pre každé ε-okolie bodu b existuje neúplné δ-okolie bodu a, že ak x patrí do prieniku neúplného δ-okolia bodu a a definičného oboru, potom $f(x)$ patrí do ε-okolia bodu b.
Definíciu symbolicky zapíšeme takto:

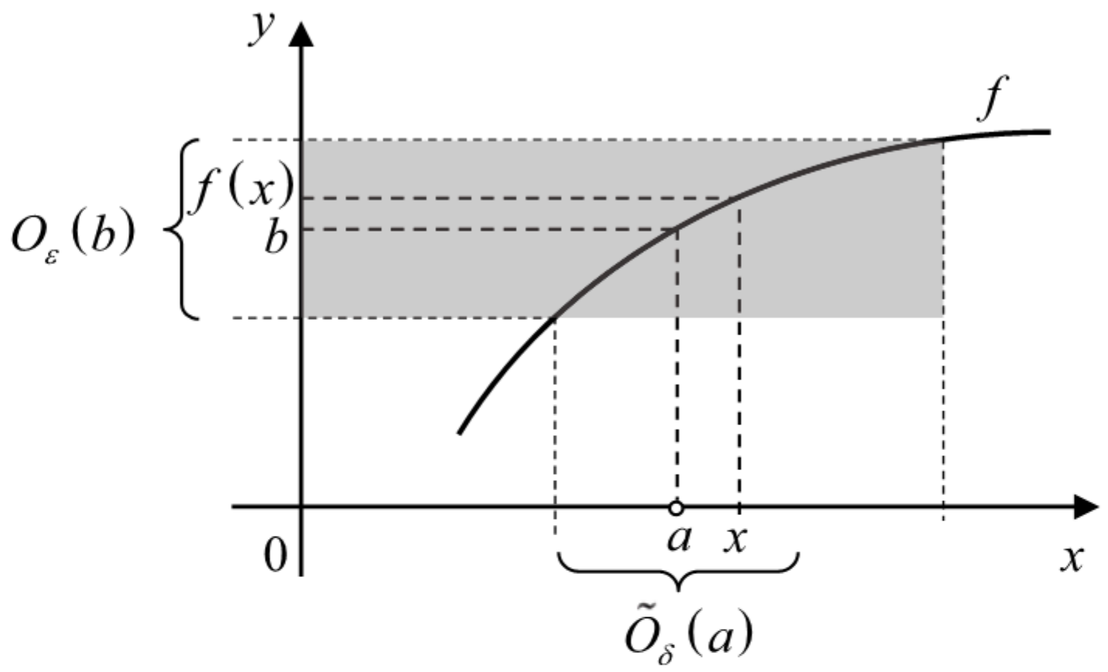
$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall O_\varepsilon(b)\ \exists \tilde{O}_\delta(a);\ x \in \tilde{O}_\delta(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b)$$

Môžu nastať tieto štyri prípady:

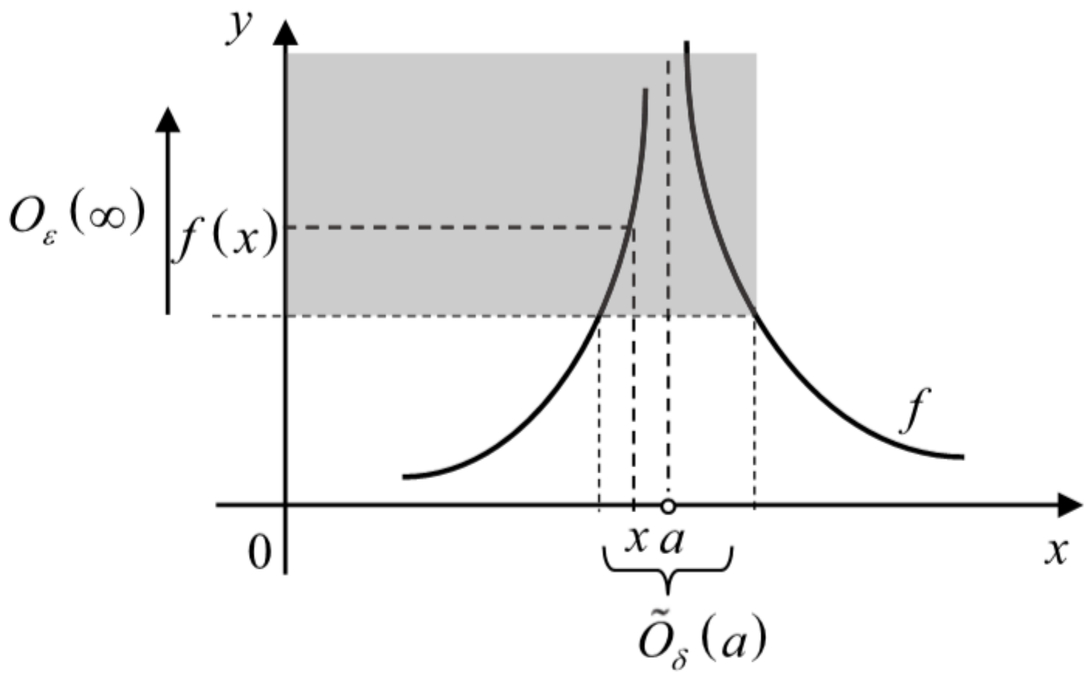
Ak $\lim_{x \to a} f(x) = b$ a

1. $a \in R,\ b \in R$, hovoríme o vlastnej limite vo vlastnom bode.
2. $a \in R,\ b = \pm\infty$, hovoríme o nevlastnej limite vo vlastnom bode.
3. $a = \pm\infty,\ b \in R$, hovoríme o vlastnej limite v nevlastnom bode.
4. $a = \pm\infty,\ b = \pm\infty$, hovoríme o nevlastnej limite v nevlastnom bode.

Prvé dva prípady graficky znázorníme na obr. 2.5.1 a obr. 2.5.2.



Obr. 2.5.1 Grafické znázornenie vlastnej limity funkcie vo vlastnom bode



Obr. 2.5.2 Grafické znázornenie nevlastnej limity funkcie vo vlastnom bode

Veta 2.5.1 (*jednoznačnosť limity funkcie*) Funkcia má v danom bode najviac jednu limitu.

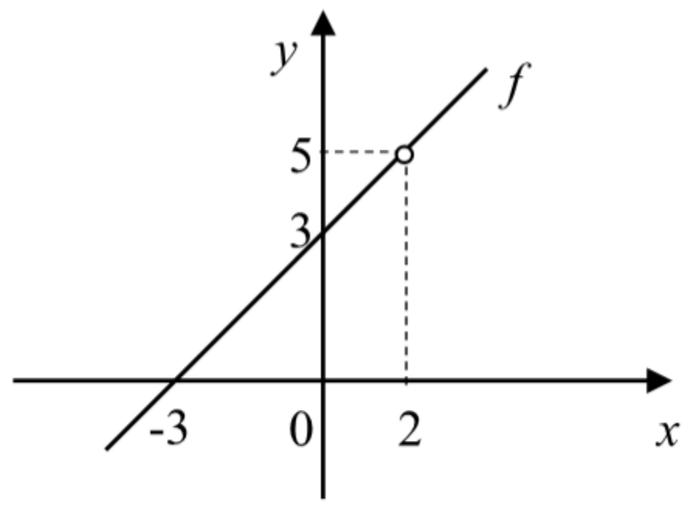
Príklad 2.5.1 Vyšetrime funkčné hodnoty funkcie $f: y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ v okolí bodu, v ktorom funkcia nie je definovaná.

Riešenie: Keďže $D(f) = R - \{2\}$, funkcia nie je definovaná v bode 2.

Vypočítané funkčné hodnoty v okolí bodu 2 zapíšeme do tabuľky:

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	2,5
$f(x)$	4,5	4,9	4,99	4,999	5,001	5,01	5,1	5,5

Z tabuľky vidíme, že ak sa hodnoty x len veľmi málo líšia od čísla 2 (hodnoty x sa „blížia“ k číslu 2), potom funkčné hodnoty $f(x)$ sa len veľmi málo líšia od čísla 5 (teda $f(x)$ sa „blížia“ k číslu 5). Matematicky túto vlastnosť funkcie zapíšeme: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$.



Obr. 2.5.3 Graf funkcie $f: y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

Príklad 2.5.2 Pomocou definície limity funkcie dokážme, že platí

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{x}=4 \qquad \text{b) } \lim_{x\to\infty} e^{x+2}=\infty.$$

Riešenie: a) Definičný obor funkcie je $D(f)=R-\{0\}$. Bod $a=0$ je hromadný bod definičného oboru. Podľa definície 2.5.2 platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{x}=4 \Leftrightarrow \forall O_\varepsilon(4)\,\exists\tilde{O}_\delta(0);\,\forall x\in\tilde{O}_\delta(0)\cap R-\{0\}:\ \frac{x^2+4x}{x}\in O_\varepsilon(4)$$

Teda treba ukázať, že existuje také $\tilde{O}_\delta(0)$, že pre všetky $x\in\tilde{O}_\delta(0)\cap R-\{0\}$ platí $\frac{x^2+4x}{x}\in O_\varepsilon(4)$.

Zvoľme ľubovoľné $O_\varepsilon(4)=(4-\varepsilon;\,4+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Z podmienky

$$\frac{x^2+4x}{x}\in O_\varepsilon(4)$$

po prepísaní dostaneme

$$4-\varepsilon<\frac{x^2+4x}{x}<4+\varepsilon$$

$$-\varepsilon<\frac{x^2+4x}{x}-4<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<x<\varepsilon$$

Keďže $-\varepsilon<x<\varepsilon \ \wedge\ x\neq 0 \Rightarrow x\in(-\varepsilon;\,0)\cup(0;\,\varepsilon)$.

Z toho vyplýva, že stačí zvoliť $\delta=\varepsilon$ a dokážeme, že platí

$$x\in\tilde{O}_\delta(0)\cap R-\{0\}:\ \frac{x^2+4x}{x}\in O_\varepsilon(4) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{x}=4$$

čo bolo treba dokázať.

Podľa toho, aké ε zvolíme, dostaneme príslušnú hodnotu δ, a teda aj hodnoty x z prieniku $\tilde{O}_\delta(0)$ a definičného oboru funkcie, pre ktoré všetky funkčné hodnoty funkcie budú z príslušného $O_\varepsilon(4)$.

Napríklad, ak $\varepsilon=0{,}01$, potom $\delta=0{,}01$, čo znamená, že ak hodnoty x ležia v $(-0{,}01;\,0)\cup(0;\,0{,}01)$, potom funkčné hodnoty sú z okolia $O_{0{,}01}(4)=$ $=(4-0{,}01;\,4+0{,}01)=(3{,}99;\,4{,}01)$.

b) Definičný obor funkcie je $D(f)=R$. Bod $a=\infty$ je hromadný bod definičného oboru. Podľa definície 2.5.2 platí

$$\lim_{x\to\infty} e^{x+2}=\infty \Leftrightarrow \forall O_\varepsilon(\infty)\ \exists\tilde{O}_\delta(\infty);\,\forall x\in\tilde{O}_\delta(\infty)\cap R:\ e^{x+2}\in O_\varepsilon(\infty)$$

Teda treba ukázať, že existuje také $\tilde{O}_\delta(\infty)$, že pre všetky $x\in\tilde{O}_\delta(\infty)\cap R$ platí $e^{x+2}\in O_\varepsilon(\infty)$.

Zvoľme ľubovoľné $O_\varepsilon(\infty)=\left(\frac{1}{\varepsilon};\,\infty\right)$, $\varepsilon>0$. Z podmienky

$$e^{x+2}\in O_\varepsilon(\infty)$$

po prepísaní dostaneme

$$e^{x+2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Riešime exponenciálnu nerovnicu

$$\ln e^{x+2} > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

odkiaľ

$$(x+2)\ln e > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

$$x > \ln \frac{1}{\varepsilon} - 2$$

Keďže $x > \ln \frac{1}{\varepsilon} - 2 \Rightarrow x \in \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} - 2; \infty \right)$.

Z toho vyplýva, že stačí zvoliť $\delta = \frac{1}{\ln \frac{1}{\varepsilon} - 2}$ a dokážeme platnosť

$$x \in \tilde{O}_\delta(\infty) \cap R: \; e^{x+2} \in O_\varepsilon(\infty) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} e^{x+2} = \infty$$

A to sme mali dokázať.

Podľa toho, aké ε zvolíme, dostaneme príslušnú hodnotu δ, a teda aj hodnoty x z prieniku $\tilde{O}_\delta(\infty)$ a definičného oboru funkcie, pre ktoré všetky funkčné hodnoty funkcie budú z príslušného $O_\varepsilon(\infty)$.

Napríklad, ak $\varepsilon = 0{,}01$, potom $\delta = \frac{1}{\ln 100 - 2} \doteq 0{,}38$, čo znamená, že ak hodnoty x ležia v intervale $\left(\frac{1}{0{,}38}; \infty \right) = (2{,}6; \infty)$, potom funkčné hodnoty sú z okolia $O_{0{,}01}(\infty) = (100; \infty)$.

Veta 2.5.2 (*základné operácie s limitami funkcií*)
Nech $\lim_{x \to a} f(x) = b$ a $\lim_{x \to a} g(x) = c$; $b, c \in R^*$. Potom platí:

a) $\lim_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x) \big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = b \pm c$

b) $\lim_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x) \big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = b \cdot c$

c) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{b}{c}$

d) $\lim_{x \to a} |f(x)| = \left| \lim_{x \to a} f(x) \right| = |b|$

ak majú príslušné výrazy $b \pm c$, $b \cdot c$, $\frac{b}{c}$ v množine R^* zmysel.

V množine R^* nedefinujeme tzv. *neurčité výrazy*: $\pm \frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, 1^∞, ∞^0, 0^∞. Limity neurčitých výrazov sa naučíme počítať neskôr pomocou L´Hospitalovho pravidla.

K operáciám sčítania, odčítania, násobenia a delenia v R^*, ktoré vieme vypočítať, patria (budeme používať symbolické zápisy):

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty, \qquad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=\infty$$

$$(\pm a)+(\pm\infty)=\pm\infty,\ a\in R, \qquad (\pm\infty)\cdot(\mp\infty)=-\infty$$

$$a\cdot\infty=\infty,\ a\in(0;\infty), \qquad \frac{a}{(\pm\infty)}=0,\ a\in R$$

$$a\cdot\infty=-\infty,\ a\in(-\infty;0),$$

Pri výpočte limít funkcií budeme okrem základných operácií (veta 2.5.2) využívať aj známe limity postupností, ktoré boli uvedené v predchádzajúcej kapitole pri postupnostiach. Vzťahy zovšeobecníme pre limity funkcií:

[1] *limita racionálnej funkcie* $f:\ y=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_m\cdot x^m+b_{m-1}\cdot x^{m-1}+\cdots+b_0}=\cdots=\frac{a_n}{b_m}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}x^{n-m}$$

pričom

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=\begin{cases}\infty, & n>m\\ 1, & n=m\\ 0, & n<m\end{cases}\quad\text{a}\quad\lim_{x\to-\infty}x^{n-m}=\begin{cases}(-1)^{n-m}\cdot\infty, & n>m\\ 1, & n=m\\ 0, & n<m\end{cases}$$

[2] *limita exponenciálnej funkcie* $f:\ y=a^x$

$$\lim_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}\infty & \text{pre } a>1\\ 0 & \text{pre } a\in(0;1)\end{cases}$$

[3] *Eulerovo číslo*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\Leftrightarrow\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

[4] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Príklad 2.5.3 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1,\ a\neq0$.

Riešenie: Zavedieme substitúciu $t=ax$. Ak x sa blíži k nule, tak aj výraz ax sa blíži k nule, a teda aj t sa blíži k nule. Potom podľa vzťahu [4] platí

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

Príklad 2.5.4 Vypočítajme:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x}{4x^2-2x+1} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{7x-2x^2}{x^3+2x} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{8x^4-2x^2+3}{2x^3+5x-1}$$

Riešenie: Funkcie, ktorých limity počítame, sú dané ako podiel polynómov rôzneho stupňa. Pretože limita čitateľa aj menovateľa sa rovná nevlastnému číslu, a to buď $+\infty$ alebo $-\infty$, ide o typ limity $\frac{"+\infty"}{"+\infty"}$ (v príkladoch a), c)) a typ limity $\frac{"-\infty"}{"+\infty"}$ (v príklade b)). Keďže neurčitý výraz $"\pm\frac{\infty}{\infty}"$ nie je v R^* definovaný, funkcie najskôr upravíme tak, že z čitateľa a menovateľa vyjmeme x s najvyššou mocninou a použijeme vetu 2.5.2c).

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x}{4x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\left(5+\frac{3}{x}\right)}{x^2\cdot\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x}}{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{3}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{5+0}{4-0+0}=\frac{5}{4}$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{7x-2x^2}{x^3+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\left(\frac{7}{x}-2\right)}{x^3\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}-2}{x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{x}-2\right)}{\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}=$$

$$=\frac{0-2}{\infty\cdot 1}=\frac{-2}{\infty}=0$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^4-2x^2+3}{2x^3+5x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\cdot\left(8-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}{x^3\cdot\left(2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(8-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}{2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(8-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{\infty\cdot(8-0+0)}{2+0-0}=\frac{\infty}{2}=\infty$$

Skúsenosti z predchádzajúcich troch príkladov môžeme zhrnúť do nasledujúceho vzťahu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_r\cdot x^r+a_{r-1}\cdot x^{r-1}+\cdots+a_0}{b_s\cdot x^s+b_{s-1}\cdot x^{s-1}+\cdots+b_0}=\frac{a_r}{b_s}\cdot\lim_{x\to\infty}x^{r-s}$$

kde $r, s\in N$ a $a_r, b_s\neq 0$.

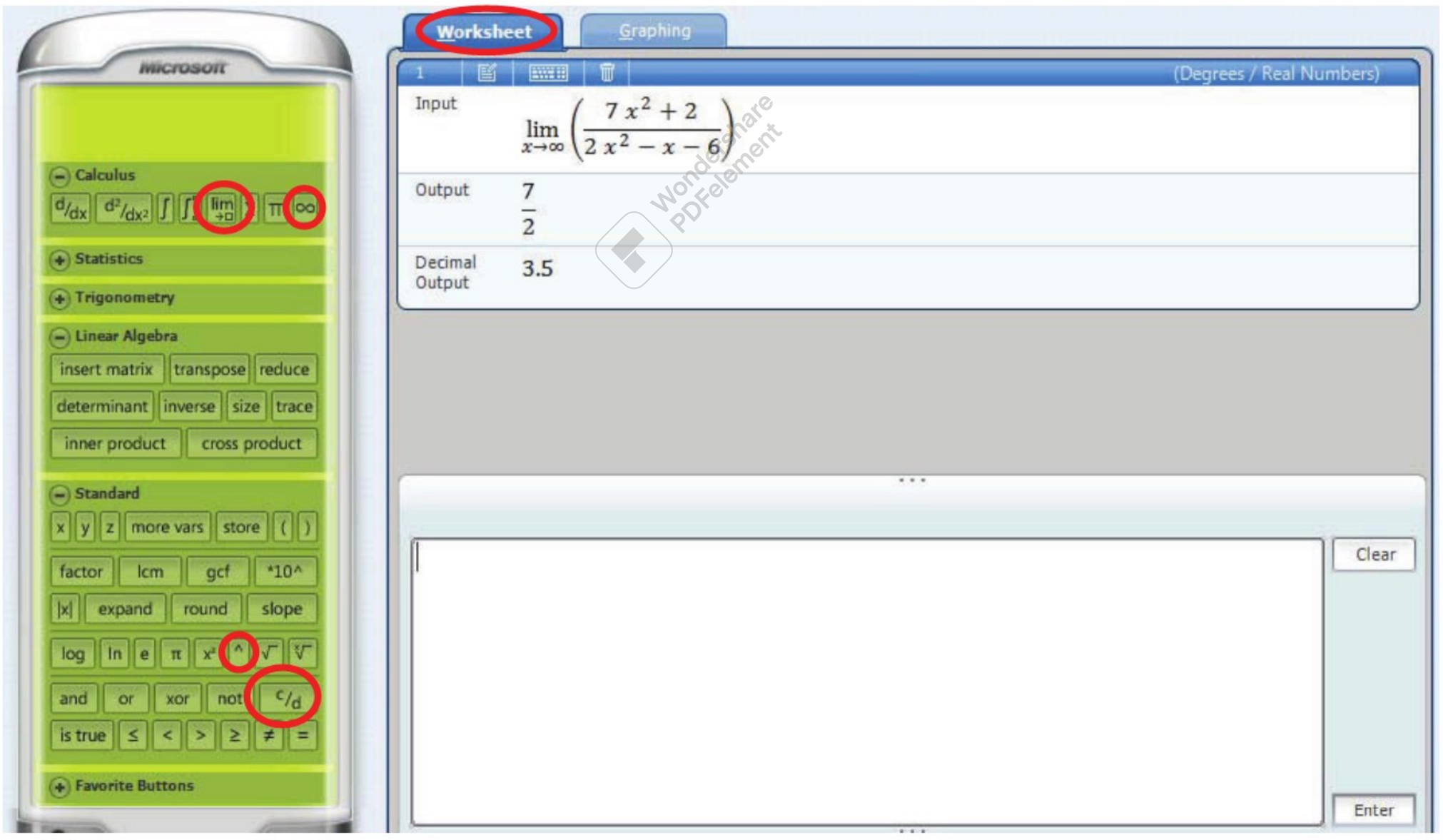
Dôsledkom predchádzajúceho vzťahu je vzťah

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_r\cdot x^r+a_{r-1}\cdot x^{r-1}+\cdots+a_0}{b_s\cdot x^s+b_{s-1}\cdot x^{s-1}+\cdots+b_0}=\cdots=\begin{cases}0, & \text{ak } r<s\\ \dfrac{a_r}{b_s}, & \text{ak } r=s\\ +\infty, & \text{ak } r>s\ \wedge\ a_r\cdot b_s>0\\ -\infty, & \text{ak } r>s\ \wedge\ a_r\cdot b_s<0\end{cases}$$

pomocou ktorého môžeme hneď zo zadania limity funkcie v tvare podielu dvoch polynómov daného stupňa určiť jej výsledok.

Poznámka 2.5.3 Výsledky príkladov môžeme zhrnúť do jednoduchého zovšeobecnenia, ktoré zodpovedá skôr uvedenému vzťahu:

1. Ak je stupeň polynómu v čitateli a v menovateli rovnaký, limita podielu sa rovná podielu koeficientov pri najvyšších mocninách.
2. Ak je stupeň polynómu v čitateli nižší ako v menovateli, limita podielu sa rovná nule.
3. Ak je stupeň polynómu v čitateli vyšší ako v menovateli, limita podielu sa rovná nevlastnému číslu, a to $+\infty$, alebo $-\infty$.



Obr. 2.5.4 Ukážka výpočtu limity $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+2}{2x^2-x-6}$ v MS MATHEMATICS 4.0

Veta 2.5.3 (*limita zloženej funkcie*) Nech sú dané funkcie f a g, pričom $H(g) \subset D(f)$, $\lim_{x \to a} g(x) = b$, $\lim_{u \to b} f(u) = c$ a nech je splnená aspoň jedna z podmienok

1. $\exists \tilde{O}_\delta(a)$, že $\forall x \in \tilde{O}_\delta(a) \cap D(g)$ je $g(x) \neq b$
2. $c = f(b)$

Potom

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = c$$

Definícia 2.5.3 Hovoríme, že funkcia f má v bode $a \in R$ ***limitu zľava*** rovnajúcu sa $b_1 \in R^*$, čo zapisujeme $\lim_{x \to a^-} f(x) = b_1$, ak

1. a je hromadným bodom množiny $D(f) \cap (-\infty; a)$,
2. pre každé ε-okolie bodu b_1 existuje neúplné ľavé δ-okolie bodu a, že platí

$$x \in \tilde{O}_{\delta -}(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b_1)$$

Teda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b_1 \Leftrightarrow \forall O_\varepsilon(b_1)\ \exists \tilde{O}_{\delta -}(a);\ \ x \in \tilde{O}_{\delta -}(a) \cap D(f):\ f(x) \in O_\varepsilon(b_1)$$

Definícia 2.5.4 Hovoríme, že funkcia f má v bode $a \in R$ ***limitu sprava*** rovnajúcu sa $b_2 \in R^*$, čo zapisujeme $\lim_{x \to a^+} f(x) = b_2$, ak

1. a je hromadným bodom množiny $D(f) \cap (a; \infty)$,
2. pre každé ε-okolie bodu b_2 existuje neúplné pravé δ-okolie bodu a, že platí

$$x \in \tilde{O}_{\delta +}(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b_2)$$

Teda

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b_2 \Leftrightarrow \forall O_\varepsilon(b_2)\ \exists \tilde{O}_{\delta +}(a);\ \ x \in \tilde{O}_{\delta +}(a) \cap D(f):\ f(x) \in O_\varepsilon(b_2)$$

Veta 2.5.4 Nech bod $a \in R$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap (-\infty; a)$, a nie je hromadný bod množiny $D(f) \cap (a; \infty)$. Potom

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_1 \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = b_1$$

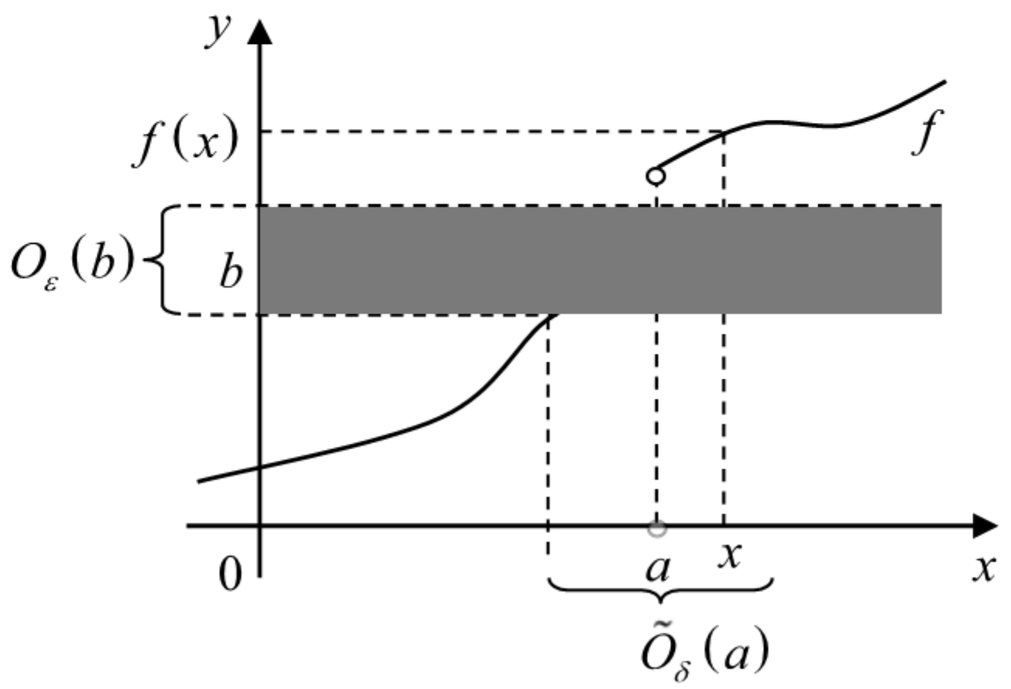
Nech bod $a \in R$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap (a; \infty)$ a nie je hromadný bod množiny $D(f) \cap (-\infty; a)$. Potom

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_2 \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = b_2$$

Veta 2.5.5 Nech bod $a \in R$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap (-\infty; a)$ a aj hromadný bod množiny $D(f) \cap (a; \infty)$. Potom

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

Poznámka 2.5.4 Ak $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, potom $\lim_{x \to a} f(x)$ neexistuje. Tento prípad je znázornený na obr. 2.5.4.



Obr. 2.5.4 Grafická interpretácia neexistencie limity funkcie vo vlastnom bode

Nakoniec uvedieme dôležitú vetu, ktorú budeme používať pri výpočte špeciálnych jednostranných limít typu $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ a $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, v ktorých limita čitateľa bude nenulová a limita menovateľa sa rovná nule.

Veta 2.5.6 Nech $\lim_{x \to a^+} f(x) = b \neq 0$ a $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$. Nech existuje neúplné okolie $\tilde{O}_{\delta^-}(a)$, že

$$\forall x \in \tilde{O}_{\delta^-}(a): \; g(x) > 0 \text{. Potom } \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & b > 0 \\ -\infty & b < 0 \end{cases} \text{ ak}$$

$$\forall x \in \tilde{O}_{\delta^+}(a): \; g(x) < 0 \text{. Potom } \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & b > 0 \\ +\infty & b < 0 \end{cases} \text{ ak}$$

Poznámka 2.5.5 Vetu 2.5.6 môžeme za rovnakých predpokladov a po prepísaní použiť aj na výpočet jednostrannej limity zľava, $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Príklad 2.5.5 Vypočítajme limity funkcie $h: y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$, ak existujú, vo vlastných bodoch $a = 0; 3$ a v nevlastnom bode $a = +\infty$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(h)=R-\{-3;\ 3\}$. Všetky body, v ktorých máme počítať limity, sú hromadné body definičného oboru funkcie. Dosadíme ich a zistíme typ limity.

Výpočet limity funkcie v bode $a=0$:

Bod $a=0\in D(h)$. Počítame limitu podielu dvoch polynomických funkcií $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, pričom $f(x)=x^2-2x-3$ a $g(x)=x^2-9$.

Pri výpočte limity použijeme vetu 2.5.2c). Limitu funkcie *h* vypočítame len dosadením bodu $a=0$, pretože funkcia je v. Platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x-3)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-9)}=\frac{0^2-2\cdot 0-3}{0^2-9}=\frac{-3}{-9}=\frac{1}{3}$$

Po dosadení bodu $a=0$ dostaneme výsledok limity, a to číslo $\frac{1}{3}$. Funkcia je v bode $a=0$ definovaná, a teda limita funkcie sa rovná funkčnej hodnote $f(0)=\frac{1}{3}$.

Výpočet limity funkcie v bode $a=3$:

Bod $a=3\notin D(h)$. Počítame limitu podielu dvoch polynomických funkcií $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, pričom $f(x)=x^2-2x-3$ a $g(x)=x^2-9$. Pretože $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2x-3)=0$ a $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$, čiže ide o typ limity $\dfrac{0}{0}$, ktorý nie je v R^* definovaný, nemôžeme použiť predchádzajúci postup. Funkciu, ktorej limitu počítame, rozložíme na súčin lineárnych výrazov a zjednodušíme. Úprava je možná, pretože na $\tilde{O}_\delta(3)$ je $x-3\neq 0$. Po tejto úprave môžeme použiť vetu 2.5.2c)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Funkcia, ktorú po úprave dostaneme, sa na $\tilde{O}_\delta(3)$ rovná pôvodnej funkcii, a preto sa limity pôvodnej a upravenej funkcie *h* rovnajú. Je zrejmé, že aj keď funkcia nie je v bode $a=3$ definovaná, jej limita existuje.

Výpočet limity funkcie v bode $a=\infty$:

Pretože $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2x-3)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\quad=\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-9)=\infty$, pri výpočte limity funkcie *h* v nevlastnom bode $a=\infty$ počítame limitu typu $\dfrac{\infty}{"\infty"}$. Teda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}=\frac{1-0-0}{1-0}=1.$$

Príklad 2.5.6 Daná je funkcia $h: y = \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x}$. Vypočítajme limity funkcie, ak existujú, v bodoch $a = -1; 0; 1$ a v nevlastných bodoch $a = -\infty; +\infty$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(h) = R - \{-1;\ 0\}$. Všetky body, v ktorých máme počítať limity, sú hromadné body definičného oboru funkcie. Dosadíme bod *a* a zistíme typ limity.

Výpočet limity funkcie v bode $a = 1$:

Bod $a = 1 \in D(h)$. Počítame limitu podielu dvoch polynomických funkcií $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, pričom $f(x) = 3x^2 + x - 2$ a $g(x) = x^2 + x$.

Pri výpočte limity použijeme vetu 2.5.2c)

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 + x - 2)}{\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + x)} = \frac{3 \cdot 1^2 + 1 - 2}{1^2 + 1} = 1$$

Po dosadení bodu $a = 1$ dostaneme výsledok limity, a to číslo 1. Funkcia je v bode $a = 1$ definovaná, a teda limita funkcie sa rovná funkčnej hodnote $f(1) = 1$.

Výpočet limity funkcie v bode $a = -1$:

Bod $a = -1 \notin D(h)$. Počítame limitu podielu dvoch polynomických funkcií $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, pričom $f(x) = 3x^2 + x - 2$ a $g(x) = x^2 + x$.

Pretože $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1}(3x^2 + x - 2) = 0$ a $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = \ = \lim\limits_{x \to -1}(x^2 + x) = 0$, čiže ide o typ limity $\dfrac{0}{0}$, ktorý nie je v R^* definovaný, nemôžeme použiť predchádzajúci postup. Funkciu, ktorej limitu počítame, rozložíme na súčin lineárnych výrazov a zjednodušíme. Úprava je možná, pretože na $\tilde{O}_\delta(-1)$ je $x + 1 \neq 0$. Po tejto úprave môžeme použiť vetu 2.5.2c)

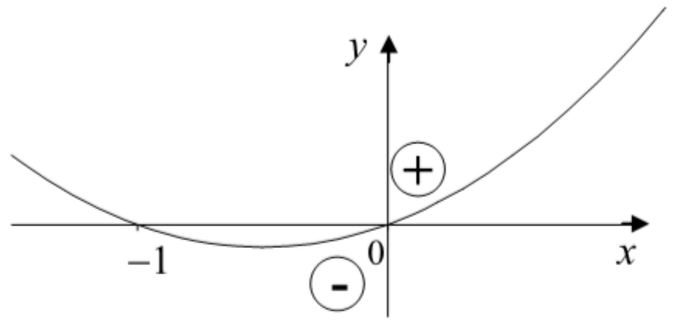
$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x} = \lim_{x \to -1} \frac{(3x - 2)(x + 1)}{x(x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{3x - 2}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to -1}(3x - 2)}{\lim\limits_{x \to -1} x} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Funkcia, ktorú po úprave dostaneme, sa na $\tilde{O}_\delta(-1)$ rovná pôvodnej funkcii, a preto sa limity pôvodnej a upravenej funkcie *h* rovnajú. Na obr. 2.5.6 vidíme, že aj keď funkcia nie je v bode $a = -1$ definovaná, jej limita existuje.

Výpočet limity funkcie v bode $a = 0$:

Bod $a = 0 \notin D(h)$. Po jeho dosadení dostaneme nulu len v menovateli (typ limity $\dfrac{-2}{0}$).

V takýchto prípadoch vyšetríme jednostranné limity funkcie (veta 3.1.5). Na výpočet jednostranných limít použijeme vetu 2.5.6 a zistíme znamienko funkčnej hodnoty $g(x) = x^2 + x$ v neúplnom pravom okolí $\tilde{O}_\delta^+(0)$ a v neúplnom ľavom okolí $\tilde{O}_\delta^-(0)$ bodu nula (obr. 2.5.5).



Obr. 2.5.5 Graf funkcie g: $y = x^2 + x$

Ak dosadíme ľubovoľné reálne číslo z neúplného pravého okolia $\tilde{O}_\delta^+(0)$ do $g(x)$, zistíme, že výraz $x^2 + x$ nadobúda kladné hodnoty. Ak dosadíme ľubovoľné reálne číslo z neúplného ľavého okolia $\tilde{O}_\delta^-(0)$ do $g(x)$, zistíme, že výraz $x^2 + x$ nadobúda záporné hodnoty.

Platí

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(3x^2 + x - 2\right) = -2 \neq 0 \text{ a } \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2 + x\right) = 0 \text{ a}$$

$$\forall x \in \tilde{O}_{\delta^+}(0): g(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x} = -\infty$$

$$\forall x \in \tilde{O}_{\delta^-}(0): g(x) < 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x} = +\infty$$

Podľa vety 2.5.5 $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x}$ *neexistuje* (jednostranné limity sa nerovnajú), čo vidieť aj na obr. 2.5.6.

Výpočet limity funkcie v bode $a = \infty$:

Pretože $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(3x^2 + x - 2\right) = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} g(x) = \quad = \lim_{x\to\infty}\left(x^2 + x\right) = \infty$, pri výpočte limity funkcie v nevlastnom bode $a = \infty$ postupujeme tak ako v príklade 2.5.4 pri výpočte limity typu $\frac{\infty}{\infty}$, teda

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{1} = 3$$

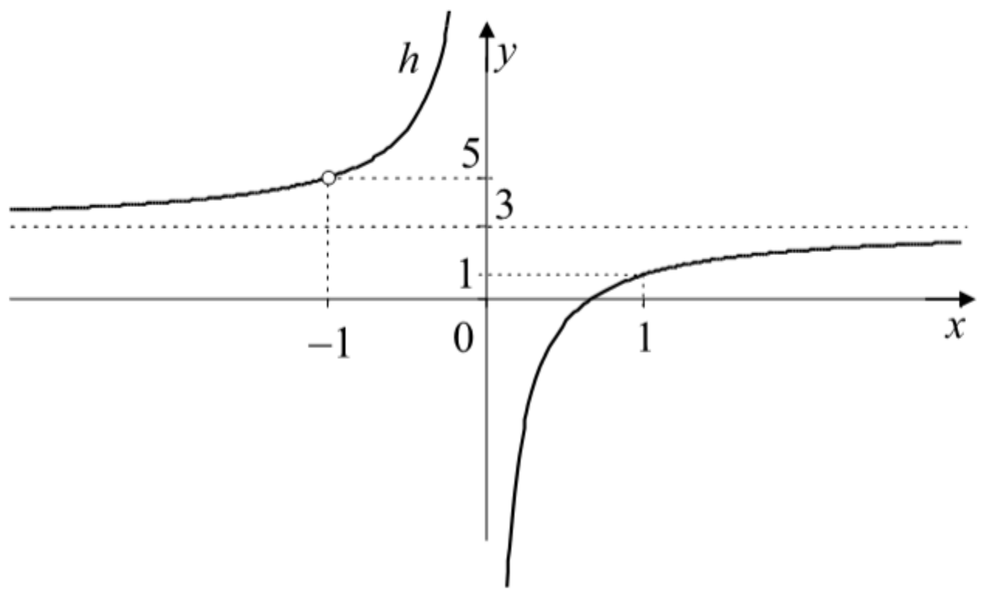
Výpočet limity funkcie v bode $a = -\infty$:

Pretože $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2 + x - 2\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 + x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty$, limitu funkcie budeme počítať tak ako v predchádzajúcom prípade. Pri výpočte limity v nevlastnom bode $a = -\infty$ využijeme aj to, že $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Teda

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x-2}{x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=3$$

Vyšetrením priebehu funkcie (kapitola 3) by sme vedeli funkciu h graficky znázorniť. Na pochopenie a porovnanie numerického výpočtu limity funkcie v jednotlivých bodoch je na obr. 2.5.6 graf funkcie h.



Obr. 2.5.6 Graf funkcie h: $y=\dfrac{3x^2+x-2}{x^2+x}$

Príklad 2.5.7 Vypočítajme limity funkcie h: $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-6$, ak existujú, v bode $a=-2$ a v nevlastných bodoch $a=-\infty;+\infty$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(h)=R$. Všetky body, v ktorých budeme počítať limitu, sú hromadné body definičného oboru funkcie. Pri výpočte limít funkcie použijeme vetu 2.5.2a), pretože počítame limitu rozdielu dvoch funkcií, $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]$, pričom $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ a $g(x)=6$.

Výpočet limity funkcie v bode $a=-2$:

Pretože $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{4}\right)^x=16$ a $\lim\limits_{x\to-2}6=6$, platí

$$\lim_{x\to-2}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x-6\right]=\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{4}\right)^x-\lim_{x\to-2}6=10$$

Výpočet limity funkcie v bode $a=\infty$:

Pretože podľa vzťahu [2] na str. 93 platí $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x=0$ a $\lim\limits_{x\to\infty}6=6$, dostaneme

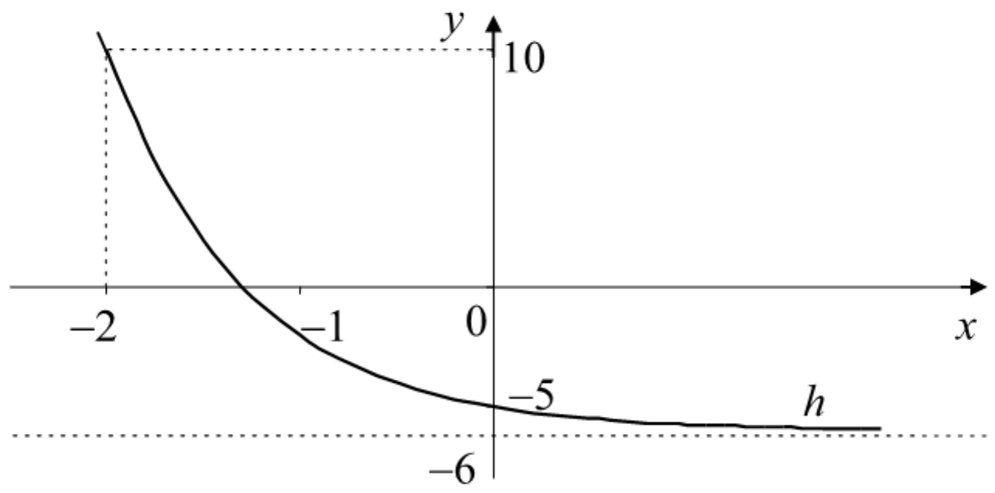
$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x-6\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x-\lim_{x\to\infty}6=-6$$

Výpočet limity funkcie v bode $a=-\infty$:

Pretože podľa vzťahu [2] na str. 93 platí $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x=\infty$ a $\lim\limits_{x\to-\infty}6=6$, dostaneme

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x-6\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x-\lim_{x\to-\infty}6=\infty$$

Na pochopenie a porovnanie numerického výpočtu limity funkcie v jednotlivých bodoch je na obr. 2.5.7 znázornený graf funkcie *h*.



Obr. 2.5.7 Graf funkcie $h\colon y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-6$

Príklad 2.5.8 Vypočítajme limity funkcie $h\colon y=\frac{x+1}{\sqrt{10+x}-3}$, ak existujú, vo vlastnom bode $a=-1$ a v nevlastných bodoch $a=-\infty;+\infty$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(h)=\langle-10;-1)\cup(-1;\infty)$. Všetky body, v ktorých budeme počítať limitu, sú hromadné body definičného oboru funkcie.

Výpočet limity funkcie v bode $a=-1$:

Bod $a=-1\notin D(h)$, ale je hromadný bod definičného oboru. V limite sa nachádza výraz s odmocninou typu $\sqrt{10+x}-3$, pričom $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{10+x}=3$ a $\lim\limits_{x\to-1}3=3$. Dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, ktorý nie je v R^* definovaný, preto funkciu rozšírime výrazom $\frac{\sqrt{10+x}+3}{\sqrt{10+x}+3}$, aby sme mohli použiť vzorec $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$. V ďalších úpravách funkcie za limitou používame väčšinou vynímanie tak, aby sme mohli použiť vzťahy z vety 2.5.2.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{10+x}-3}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{10+x}-3}\cdot\frac{\sqrt{10+x}+3}{\sqrt{10+x}+3}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{10+x}+3\right)}{10+x-9}=\lim_{x\to-1}\left(\sqrt{10+x}+3\right)=6$$

Výpočet limity funkcie v bode $a=\infty$:

Bod $a=\infty$ je hromadný bod definičného oboru, preto limitu v tomto bude môžeme počítať. Limita čitateľa je $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)=\infty$. V menovateli sa nachádza výraz typu $\sqrt{10+x}-3$,

pričom $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{10+x}=\infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty}3=3$, a teda platí: $"\infty-3=\infty"$. Dostaneme neurčitý výraz $\frac{"\infty}{\infty"}$, ktorý nie je v R^* definovaný, preto použijeme rovnakú úpravu ako pri počítaní limity v bode $a=-1$.

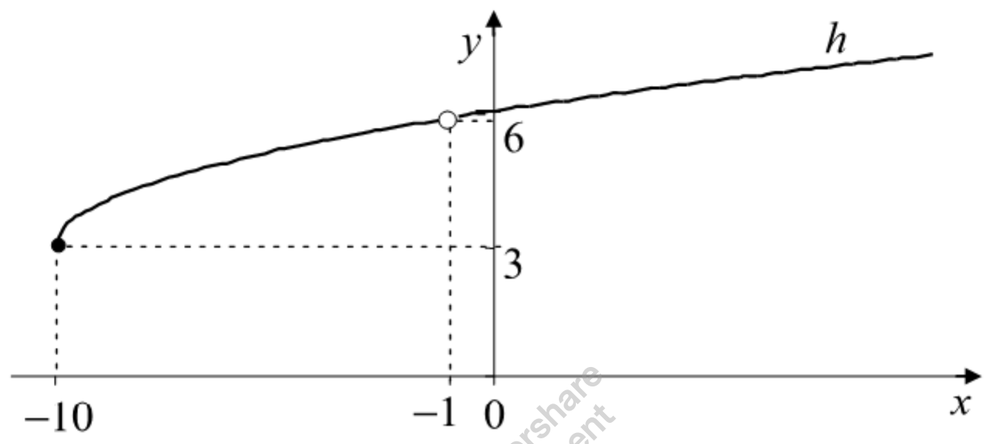
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{10+x}-3}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{10+x}+3\right)=\infty+3=\infty$$

Výpočet limity funkcie v bode $a=-\infty$:

Bod $a=-\infty$ nie je hromadný bod definičného oboru, a preto

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{10+x}-3}\quad \textit{nemá zmysel počítať.}$$

Na pochopenie a porovnanie numerického výpočtu limity funkcie v jednotlivých bodoch je na obr. 2.5.8 znázornený graf funkcie.



Obr. 2.5.8 Graf funkcie h: $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{10+x}-3}$

Príklad 2.5.9 Vypočítajme limity: a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\,4x}{\sin\,3x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x-2}$.

Riešenie: a) Počítame limitu neurčitého výrazu $\frac{"0}{0"}$, ktorý nie je v R^* definovaný. Funkciu za limitou upravíme a použijeme výsledok z príkladu 2.5.3:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\,4x}{\sin\,3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin\,4x}{4x}\cdot4x}{\frac{\sin\,3x}{3x}\cdot3x}=\frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin\,4x}{4x}}{\frac{\sin\,3x}{3x}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\,4x}{4x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\,3x}{3x}}=\frac{4}{3}$$

b) Pretože $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)=1$ a $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2)=-\infty$, ide o typ limity $„1^{-\infty}"$. Zvolíme vhodnú substitúciu, aby sme mohli použiť vzťah [3] zo str. 93:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x-2}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{3x+1}\right)^{2x-2}=\left|\begin{array}{r}-\dfrac{3}{3x+1}=\dfrac{1}{t}\\ x=-t-\dfrac{1}{3}\end{array}\right|=$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-\frac{8}{3}} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-2} \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{8}{3}} = e^{-2}\cdot 1 = e^{-2}$$

pretože, ak $x \to -\infty \Rightarrow \left(-t-\frac{1}{3}\right) \to -\infty \Rightarrow t \to \infty$.

Príklad 2.5.10 Vypočítajme: a) $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$ b) $\lim_{x\to 0}\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$.

Riešenie: a) Definičný obor zloženej funkcie $F: y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, kde vonkajšia zložka je funkcia $f: y = \operatorname{arctg} u$ a vnútorná zložka je funkcia $g: u = \frac{1}{x}$, je $D(F) = R - \{0\}$. Bod $a = 0$ je hromadným bodom definičného oboru.

Na výpočet limity funkcie použijeme vetu 3.1.3 o limite zloženej funkcie. Platí $H(g) = R - \{0\} \subset D(f) = R$. Vypočítame limitu vnútornej zložky v bode $a = 0$:

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \Rightarrow$ podľa vety 2.5.6 vypočítame jednostranné limity g.

Pretože lineárna funkcia v menovateli mení v $\tilde{O}_\delta(0)$ znamienko, dostaneme

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} &= \infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} &= -\infty\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \text{ } \textit{neexistuje} \text{ (veta 2.5.5)}$$

Keďže nie je splnený predpoklad vety 2.5.3 o limite zloženej funkcie, a to $\lim_{x\to a} g(x) = b$, neexistuje ani $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$.

b) Definičný obor zloženej funkcie $F: y = \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$, kde vonkajšia zložka je funkcia $f: y = \ln u$ a vnútorná zložka je funkcia $g: u = -\frac{1}{x}$, je $D(F) = (-\infty; 0)$. Podľa vety 2.5.4, ak bod $a = 0$ je hromadným bodom množiny $D(F) \cap (-\infty; 0)$ a nie je hromadným bodom $D(F) \cap (0; \infty)$, potom

$$\lim_{x\to 0^-}\ln\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Pri výpočte jednostrannej limity vnútornej zložky použijeme vetu 2.5.6:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right) = \infty \Rightarrow u = g(x) \to \infty$$

Potom

$$\lim_{u\to\infty} f(u) = \lim_{u\to\infty}\ln u = \infty$$

Pretože je splnená 1. podmienka vety 2.5.3, platí

$$\lim_{x\to 0^-} \ln\left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$$

Podľa vety 2.5.3

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \ln\left(-\frac{1}{x}\right) = \infty .$$

Príklad 2.5.11 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(1+10x\right)}{x}$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $F: y = \dfrac{\ln\left(1+10x\right)}{x}$ je

$$D(F) = \left(-\frac{1}{10}; 0\right) \cup (0; \infty)$$

Bod $a = 0$ je hromadným bodom $D(F)$. Pri výpočte limity použijeme vetu 2.5.3 o limite zloženej funkcie a známy vzťah $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Predpis funkcie F najskôr upravíme:

$$F: y = \frac{\ln\left(1+10x\right)}{x} = \frac{1}{x}\cdot \ln\left(1+10x\right) = \ln\left(1+10x\right)^{\frac{1}{x}}$$

Označme $g: u = \left(1+10x\right)^{\frac{1}{x}}$ vnútornú zložku funkcie a $f: y = \ln u$ vonkajšiu zložku funkcie.

Keďže platí $H(g) = (0;\infty) \subset D(f) = (0;\infty)$ a

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+10x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left[\left(1+10x\right)^{\frac{1}{10x}}\right]^{10} = e^{10}$$

$$\lim_{u\to e^{10}} \left(\ln u\right) = \ln e^{10} = 10$$

potom podľa vety 2.5.3 plat

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+10x\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left[\ln\left(1+10x\right)^{\frac{1}{x}}\right] = 10 .$$

Poznámka 2.5.6 Pri počítaní limity funkcie v bode a, $a \in R^*$ bez použitia derivácií (bez použitia L´Hospitalovho pravidla uvedeného v podkapitole 3.7) v prípade, ak je to možné, postupujeme takto:

- zistíme typ neurčitosti (typ limity),
- vhodnou úpravou odstránime neurčitosť,
- dosadením hodnoty $x = a$ limitu vypočítame.

ÚLOHY

2.5.1 Pomocou definície limity dokážte, že

a) $\lim\limits_{x\to 2}(4x+1) = 9$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3}{x-1} = -1$

d) $\lim\limits_{x\to \infty}(\ln x) = \infty$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2+4\right) = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=0$

2.5.2 Vypočítajte limity funkcií v daných bodoch.

a) $f_1: y=x^2-25$

$a=-1;\ 0;\ -\infty;\ \infty$

b) $f_2: y=\dfrac{1}{(x-5)^2}$

$a=-5;\ 5;\ -\infty;\ \infty$

c) $f_3: y=\dfrac{x+3}{x^2+3x}$

$a=-3;\ 0;\ -\infty;\ \infty$

d) $f_4: y=\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$

$a=-2;\ 4;\ -\infty;\ \infty$

e) $f_5: y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

$a=2;\ 10;\ -\infty;\ \infty$

f) $f_6: y=e^x+1$

$a=0;\ 1;-\infty;\ \infty$

g) $f_7: y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x+1}$

$a=-1;\ 1;-\infty;\ \infty$

h) $f_8: y=\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

$a=0;\ 6;-\infty;\ \infty$

i) $f_9: y=\dfrac{5\cdot 2^{x+1}}{4^x}$

$a=-2;\ 0;-\infty;\ \infty$

j) $f_{10}: y=\operatorname{arccotg}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$a=-1;\ 0;-\infty$

2.5.3 Vypočítajte limity funkcií.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x(x-2)}$

d) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2-10x}{x-10}$

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+6x+5}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x-12}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x(x+1)^2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x^2}{2x^2+3x}$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

j) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3+x^2-12x}$

k) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3+1}$

l) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

2.5.4 Rozhodnite o existencii limity funkcie. V prípade, že limita funkcie existuje, vypočítajte ju.

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x-5}$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt[3]{2-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{1}{x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{(x-5)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{2-x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2-x}$

g) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x(x-1)}{x^2-1}$

h) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x(x-1)}{x^2-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{10}{\log x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10}{\log x}$

V úlohách 2.5.5 až 2.5.7 vypočítajte limity funkcií:

2.5.5 a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+4x}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{10+x}-3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{3x+22}-\sqrt{x+24}}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

2.5.6 a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2x}{\sin x}\right)^2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 9x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x(1-\sin^2 x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}\right)^3$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{2x}$

2.5.7 a) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\dfrac{3}{x+7}\right)^{8-3x}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{4x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{2+2x}{2x-3}\right)^{4x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x-5}{2x+2}\right)^{2x-4}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+6}{3x+4}\right)^{2+5x}$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x-5}{4x+2}\right)^{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[x]{1+8x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+7x)}{3x}$

V úlohách 2.5.8 – 2.5.15 vypočítajte limity.

2.5.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

2.5.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{4x+2}\right)^{x+1}$

2.5.10 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

2.5.11 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-2\cdot 3^{-\frac{1}{x}}}{3^{2+\frac{1}{x}}}$

2.5.12 $\lim\limits_{x\to -1^+}\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

2.5.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$

2.5.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+x)-\ln 2}{x}$

2.5.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$

Výsledky

2.5.2 **a)** $-24;\ -25;\ \infty;\ \infty$; **b)** $\dfrac{1}{100};\ \infty;\ 0;\ 0$; **c)** $-\dfrac{1}{3}$; neexistuje, lebo

$\left[\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+3)}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x+3)}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty\right];\ 0;\ 0;$

d) $0;\ 6;\ -\infty;\ \infty$; **e)** $\dfrac{1}{8}$; neexistuje; $1;\ 1$; **f)** $2;\ e+1;\ 1;\ \infty$; **g)** $\dfrac{1}{9};\ 1;\ 0;\ \infty;$

h) $\dfrac{\sqrt{2}}{4};\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}$; nemá zmysel, pretože $D(f)=\langle -2;0)\cup(0;\infty)$; 0; **i)** $40;\ 10;\ \infty;\ 0;$

j) $\dfrac{3}{4}\pi;\ \pi;\ \dfrac{\pi}{2};$

2.5.3 **a)** 3; **b)** 10; **c)** $\dfrac{3}{2}$; **d)** 10; **e)** $-\dfrac{1}{2}$; **f)** $\dfrac{3}{4}$; **g)** 3; **h)** 0; **i)** 0; **j)** $\dfrac{2}{7}$; **k)** 0; **l)** $\dfrac{1}{4}$.

2.5.4 **a)** Neexistuje; **b)** ∞; **c)** ∞; **d)** neexistuje; **e)** 0; **f)** 0; **g)** ∞; **h)** $-\infty$; **i)** neexistuje; **j)** 0.

2.5.5 **a)** $\dfrac{1}{4}$; **b)** $\dfrac{1}{2}$; **c)** -12; **d)** ∞; **e)** 0; **f)** -5; **g)** $\dfrac{1}{2}$; **h)** ∞.

2.5.6 **a)** 4; **b)** $\dfrac{1}{3}$; **c)** 0; **d)** 2; **e)** 8; **f)** 0;

2.5.7 **a)** e^2; **b)** e; **c)** e^{-9}; **d)** e^4; **e)** e^{10}; **f)** ∞; **g)** 0; **h)** 0; **i)** e^8; **j)** $\dfrac{7}{3}$.

2.5.8 $8\sqrt{2}$

2.5.9 0

2.5.10 2

2.5.11 $\dfrac{1}{9}$

2.5.12 0

2.5.13 e^2

2.5.14 $\dfrac{1}{2}$

2.5.15 0

2.6 Spojitosť funkcie

Intuitívne si pod pojmom „funkcia spojitá v bode“ predstavujeme funkciu, ktorej graf je v okolí bodu súvislá krivka. Z uvedeného vyplýva, že ak by sme vedeli nakresliť graf ľubovoľnej funkcie, vedeli by sme vždy rozhodnúť o jej spojitosti, resp. nespojitosti. To je však nereálne, lebo väčšinu funkcií nevieme bez vyšetrenia vlastností alebo použitia softvéru nakresliť. Preto využijeme definíciu limity funkcie a postupy jej výpočtu na vysvetlenie a definovanie pojmu spojitosť funkcie.

Definícia 2.6.1 Hovoríme, že funkcia f je ***spojitá v bode a***, $a \in D(f)$, práve vtedy, ak pre každé ε-okolie bodu $f(a)$ existuje δ-okolie bodu a, že ak x patrí do prieniku δ okolia bodu a a definičného oboru, potom $f(x)$ patrí do ε-okolia bodu $f(a)$.

Teda platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall O_\varepsilon(f(a))\ \exists O_\delta(a)\colon x \in O_\delta(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(f(a))$$

Poznámka 2.6.1 V definícii sme nepredpokladali, že bod a je hromadným bodom $D(f)$, pretože môžu nastať dva prípady:

1. Bod $a \in D(f)$ je ***hromadným bodom*** $D(f) \Rightarrow$ funkcia je spojitá v hromadnom bode $a \in D(f) \Leftrightarrow$ ak $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. Bod $a \in D(f)$ je ***izolovaným bodom*** $D(f) \Rightarrow$ hovoríme o „degenerovanom“ prípade spojitosti funkcie v bode a (funkcia je spojitá v bode a).

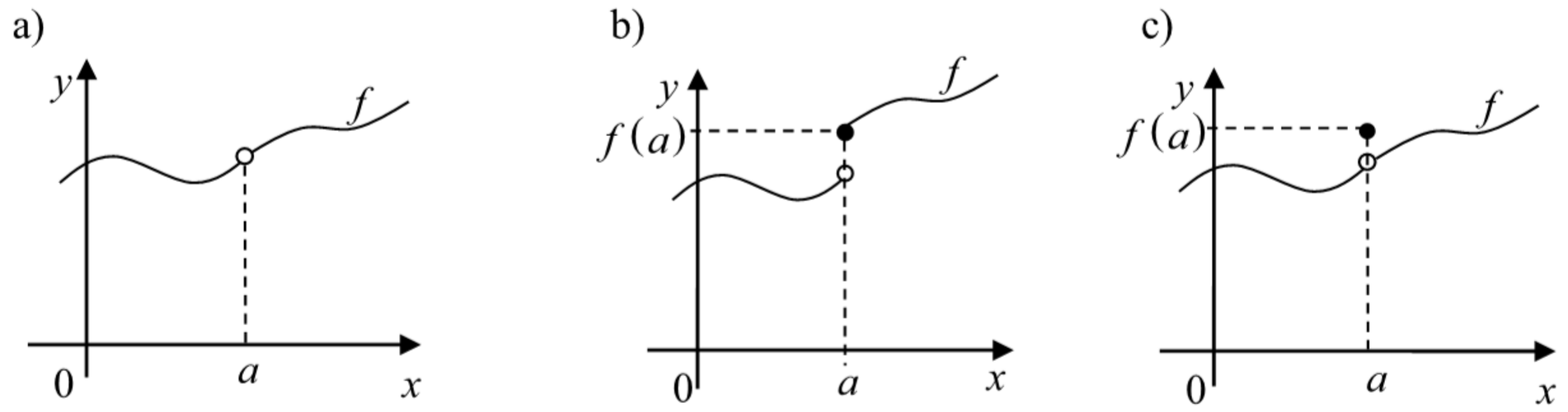
Poznámka 2.6.2 Ak je funkcia f spojitá v bode a, tak má v bode a limitu rovnajúcu sa $f(a)$. Naopak, ak má funkcia v bode a vlastnú limitu, neznamená to, že je v bode a spojitá.

Definícia 2.6.2 (*spojitosť na množine*) Nech funkcia f je spojitá v každom bode množiny $A \subset D(f)$. Potom hovoríme, že funkcia je ***spojitá na množine*** A. Ak $A = D(f)$, hovoríme, že funkcia je spojitá.

Definícia 2.6.3 Hovoríme, že funkcia f má v bode a ***bod nespojitosti***, ak

a) funkcia f nie je definovaná v bode a, ale bod a je hromadným bodom $D(f)$,
b) funkcia f nemá limitu v bode a,
c) funkcia f má limitu v bode a, je v tomto bode aj definovaná, ale $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Všetky tri prípady a), b), c) z definície 2.6.3 sú graficky znázornené na obr. 2.6.1.



Obr. 2.6.1 Grafické znázornenie bodov nespojitosti grafu funkcie f

Poznámka 2.6.3 Ak funkciu vieme dodefinovať v bode a (nájsť takú funkčnú hodnotu $f(a)$), že platí $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, bod nespojitosti a z definície 2.6.3 nazývame ***odstrániteľný bod nespojitosti***. V opačnom prípade hovoríme o ***neodstrániteľnom bode nespojitosti***.

Príklad 2.6.1 Daná je funkcia $f: y = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1}$.

a) Zistime, či funkcia je spojitá na R.
b) Ak funkcia nie je spojitá, doplňme funkčný predpis tak, aby bola spojitá.

Riešenie: a) Funkcia f nie je definovaná v bode $a = -\dfrac{1}{2}$. Tento bod je bodom nespojitosti danej funkcie a je hromadným bodom definičného oboru $D(f) = R - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. Funkcia f nie je na množine R spojitá.

b) Podľa poznámky 2.6.1 funkcia f je spojitá v hromadnom bode definičného oboru $a = -\dfrac{1}{2}$ práve vtedy, ak

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Preto vypočítame limitu funkcie v bode nespojitosti $a = -\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(2x-1)}{2x+1} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} (2x - 1) = -2$$

Ak položíme funkčnú hodnotu v bode $a = -\dfrac{1}{2}$ za rovnajúcu sa limite funkcie v bode $a = -\dfrac{1}{2}$, dostaneme predpis funkcie f^*:

$$f^*: y = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1}, & x \neq -\dfrac{1}{2} \\ -2, & x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Takto definovaná funkcia f^* je *spojitá v bode* $a=-\frac{1}{2}$ a podľa definície 2.6.2 spojitá.

Príklad 2.6.2 Zistime, či funkcia $f: y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{10}{(x-1)^2}, & x\neq 1\\ \pi, & x=1\end{cases}$ je spojitá.

Riešenie: Funkcia f je v neúplnom okolí bodu $a=1$ definovaná inou funkčnou hodnotou ako v bode $a=1$. Preto bodom nespojitosti by mohol byť bod $a=1$, ktorý je aj hromadným bodom definičného oboru $D(f)=R$. Podľa poznámky 2.6.1 musí platiť

$$\lim_{x\to 1}\left[\operatorname{arctg}\frac{10}{(x-1)^2}\right]=f(1)$$

Pretože

$$\lim_{x\to 1}\left[\operatorname{arctg}\frac{10}{(x-1)^2}\right]=\frac{\pi}{2}\neq\pi=f(1)$$

funkcia f nie je spojitá v bode $a=1$, a teda podľa definície 2.6.2 *nie je spojitá*.

Definícia 2.6.4 Nech je daná funkcia f a nech bod a je hromadným bodom množiny $D(f)\cap(-\infty;a)$ $\left[D(f)\cap(a;\infty)\right]$. Hovoríme, že funkcia f je ***spojitá v bode a zľava*** [***sprava***] práve vtedy, ak

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)\qquad\left[\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)\right]$$

Poznámka 2.6.4 Funkcia f je spojitá v hromadnom bode a definičného oboru práve vtedy, ak sa jednostranné limity v bode a rovnajú práve hodnote funkcie v bode a.

Príklad 2.6.3 Daná je funkcia $f: y=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{2x}, & x<0\\ 2^x, & 0<x<3\\ 5-(x-3)^2, & x>3\end{cases}$

a) Určme body nespojitosti funkcie a vypočítajme v nich jednostranné limity.
b) Zistime, či body nespojitosti sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné.

Riešenie:
a) Funkcia f je daná tromi funkciami definovanými na troch rôznych intervaloch. Definičný obor funkcie $D(f)=R-\{0;3\}$, teda funkcia má dva body nespojitosti, a to $a_1=0$ a $a_2=3$.
Podľa poznámky 2.6.3 zistíme, či funkciu f vieme dodefinovať v bodoch $a_1=0$ a $a_2=3$ tak, aby v týchto bodoch bola spojitá.

Vyšetríme jednostranné limity v bode $a_1=0$:

Bod $a_1=0$ je hromadným bodom množiny $D(f)\cap(-\infty;0)$ a množiny $D(f)\cap(0;3)$.
Platí

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^-}\cos x=1\cdot 1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2^x = 2^0 = 1$$

Podľa vety 2.5.5 platí

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Ak položíme $f(0) = 1$ (poznámka 2.6.4), dostaneme novú funkciu, ktorá bude v bode $a_1 = 0$ spojitá. Bod $a_1 = 0$ je *odstraniteľný bod nespojitosti*.

Vyšetríme jednostranné limity v bode $a_2 = 3$:

Bod $a_2 = 3$ je hromadným bodom množín $D(f) \cap (0;3)$ a $D(f) \cap (3;\infty)$. Platí

$$\lim_{x\to 3^-} 2^x = 2^3 = 8$$

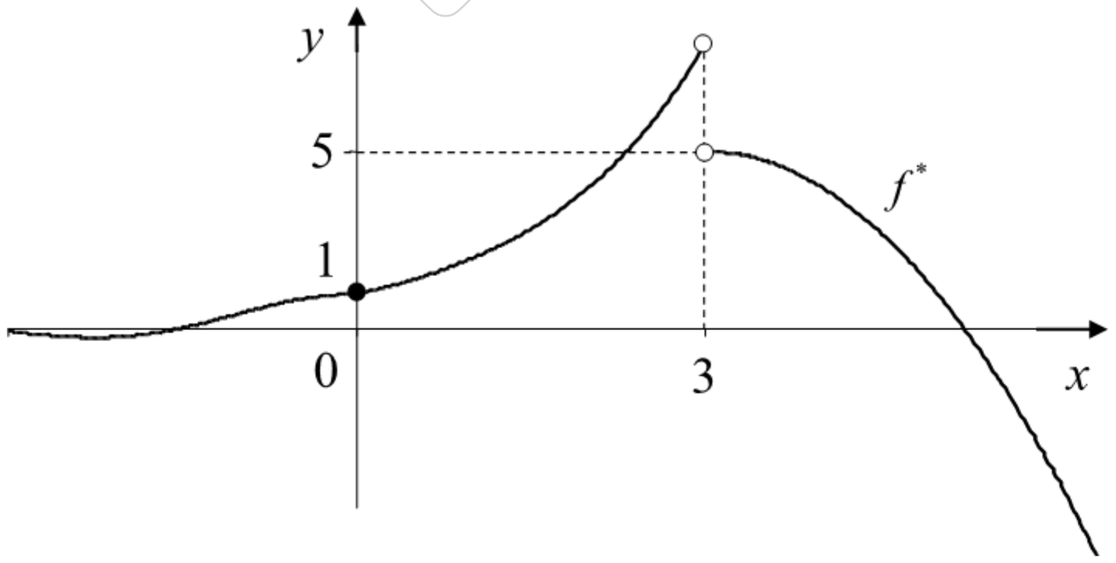
$$\lim_{x\to 3^+} \left[5 - (x-3)^2\right] = 5 - (3-3)^2 = 5$$

Pretože jednostranné limity funkcie v bode $a_2 = 3$ sú rôzne, podľa poznámky 2.5.2 limita funkcie v bode $a_2 = 3$ neexistuje. Bod $a_2 = 3$ je *neodstraniteľný bod nespojitosti*.

Predpis funkcie f^*, ktorá je spojitá v bode $a_1 = 0$ a nespojitá v $a_2 = 3$, je

$$f^*: y = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{2x}, & x < 0 \\ 2^x, & 0 \le x < 3 \\ 5 - (x-3)^2, & x > 3 \end{cases}$$

Ak by sme vyšetrili priebeh funkcie, graficky by sme funkciu f^* znázornili ako na obr. 2.6.2.



Obr. 2.6.2 Graf funkcie f^*

Príklad 2.6.4 Určte parameter $a \in R$ tak, aby funkcia f bola spojitá.

$$f: y = \begin{cases} e^x + 9, & x > 0 \\ ax + a, & x \le 0 \end{cases}$$

Riešenie: Podľa poznámky 2.6.4 je funkcia spojitá v hromadnom bode a definičného oboru práve vtedy, ak

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Funkcia f je definovaná na R dvomi funkciami na dvoch rôznych intervaloch. Bod, v ktorom by funkcia mohla byť nespojitá, je $a = 0$. Preto vypočítame a porovnáme jednostranné limity v hromadnom bode definičného oboru $a = 0$.
Počítame limitu sprava

$$\lim_{x \to 0^+} \left(e^x + 9\right) = 10$$

a limitu zľava

$$\lim_{x \to 0^-} \left(ax + a\right) = a \cdot 0 + a = a$$

Aby funkcia bola spojitá v bode $a = 0$, podľa poznámky 2.6.4 musí platiť

$$\lim_{x \to 0^+} \left(e^x + 9\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(ax + a\right)$$

$$10 = a$$

Našli sme hodnotu parametra $a = 10$, pre ktorú je funkcia f spojitá. Jej predpis je takýto:

$$f: y = \begin{cases} \left(e^x + 9\right), & x > 0 \\ 10x + 10, & x \le 0 \end{cases}$$

ÚLOHY

2.6.1 Dokážte, že daná funkcia je spojitá v bode *a*. (Výsledok porovnajte s grafickým riešením.)

a) $f_1: y = 3x + 7, \qquad a = 1$

b) $f_2: y = (x-1)^2, \qquad a = -5$

c) $f_3: y = \sqrt{8 - x}, \qquad a = -8$

d) $f_4: y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1, \qquad a = 0$

e) $f_5: y = \frac{1}{5} \log_{0,5} x, \qquad a = 2$

f) $f_6: y = \frac{|x+4|}{x+4}, \qquad a = 4$

2.6.2 Zistite, ktorá z daných funkcií je spojitá.

a) $f_1: y = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x+3}, & x \ne -3 \\ 6, & x = -3 \end{cases}$

b) $f_2: y = \begin{cases} \frac{3x - x^2}{x-3}, & x \ne 3 \\ -3, & x = 3 \end{cases}$

c) $f_3: y = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x}{x-2}, & x \ne 2 \\ 8, & x = 2 \end{cases}$

d) $f_4: y = \begin{cases} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}}, & x \in \langle -4; 0) \cup (0; \infty) \\ -2, & x = 0 \end{cases}$

e) $f_5: y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

f) $f_6: y = \begin{cases} (0,5)^{\frac{1}{x^2}}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

g) $f_7: y = \begin{cases} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

h) $f_8: y = \begin{cases} \operatorname{arccotg} \frac{\pi}{(x-1)^4}, & x \ne 1 \\ \pi, & x = 1 \end{cases}$

2.6.3 Dodefinujte funkciu v bode nespojitosti tak, aby bola spojitá.

a) $f_1: y = \dfrac{x^2 + 3x}{x}$

b) $f_2: y = \dfrac{x^2 - 5x - 14}{x - 7}$

c) $f_3: y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^4 + x^2}$

d) $f_4: y = \dfrac{\sqrt{6+x} - 3}{x - 3}$

e) $f_5: y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$

f) $f_6: y = \dfrac{\sin 2x}{x}$

g) $f_7: y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{(2-x)^2}$

h) $f_8: y = \dfrac{\ln(1+7x)}{x}$

2.6.4 Určte body nespojitosti daných funkcií a určte v nich jednostranné limity. Zistite, či bod nespojitosti je odstrániteľný alebo neodstrániteľný.

a) $f_1: y = \dfrac{3}{x+3}$

b) $f_2: y = \dfrac{x-2}{x^3 - 4x}$

c) $f_3: y = e^{-\frac{1}{x^3}}$

d) $f_4: y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x < 0 \\ 4^{-x}, & 0 < x < 2 \\ x^3, & x > 2 \end{cases}$

e) $f_5: y = \dfrac{|x-2|}{2-x}$

f) $f_6: y = \dfrac{10 - \sqrt{x+100}}{x}$

g) $f_7: y = \operatorname{arctg} \dfrac{4x}{(x-1)^2}$

h) $f_8: y = \begin{cases} \dfrac{-2}{x}, & x < -1 \\ 3 - x, & -1 < x < 2 \\ \log_2 x, & x > 2 \end{cases}$

2.6.5 Určte parameter $a \in R$ tak, aby funkcia bola spojitá.

a) $f_1: y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 18}{x+3}, & x \neq -3 \\ x - a^2, & x = -3 \end{cases}$

b) $f_2: y = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2 + a}, & x < 0 \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & x \geq 0 \end{cases}$

c) $f_3: y = \begin{cases} \sqrt{x-4} + a, & x \geq 4 \\ 2 - (x-4)^2, & x < 4 \end{cases}$

d) $f_4: y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \leq -1 \\ x^2 + ax, & x \geq -1 \end{cases}$

e) $f_5: y = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x \neq 0 \\ 9, & x = 0 \end{cases}$

f) $f_6: y = \begin{cases} \ln(x-e), & x > e+1 \\ ax - 1, & x \leq e+1 \end{cases}$

Wondershare PDFelement

Výsledky

2.6.2 a) Nespojitá; **b)** spojitá; **c)** spojitá; **d)** nespojitá; **e)** spojitá ; **f)** nespojitá; **g)** spojitá; **h)** spojitá.

2.6.3 a) $f_1: y = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$; **b)** $f_2: y = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x-14}{x-7}, & x \neq 7 \\ 9, & x = 7 \end{cases}$;

c) $f_3: y = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2}{x^4+x^2}, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases}$; **d)** $f_4: y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}, & x \in \langle -6;3) \cup (3;\infty) \\ \dfrac{1}{6}, & x = 3 \end{cases}$;

e) $f_5: y = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; **f)** $f_6: y = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$;

g) $f_7: y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{(2-x)^2}, & x \neq 2 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 2 \end{cases}$; **h)** $f_8: y = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+7x)}{x}, & x \in \left(-\dfrac{1}{7};0\right) \cup (0;\infty) \\ 7, & x = 0 \end{cases}$.

2.6.4 a) $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{3}{x+3} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{3}{x+3} = \infty$;

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-2}{x^3-4x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-2}{x^3-4x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{x^3-4x} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-2}{x^3-4x} = \dfrac{1}{8}$,

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x-2}{x^3-4x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x-2}{x^3-4x} = -\infty$;

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x^3}} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x^3}} = 0$;

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} (x+1) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} 4^{-x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 2^-} 4^{-x} = \dfrac{1}{16}$, $\lim\limits_{x \to 2^+} x^3 = 8$;

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2-x}{2-x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{2-x} = -1$;

f) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{10-\sqrt{x+100}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{10-\sqrt{x+100}}{x} = -\dfrac{1}{20}$;

g) $\lim\limits_{x \to 1^-} \operatorname{arctg} \dfrac{4x}{(x-1)^2} = \; = \lim\limits_{x \to 1^+} \operatorname{arctg} \dfrac{4x}{(x-1)^2} = \dfrac{\pi}{2}$;

h) $\lim\limits_{x \to -1^-} \left(-\dfrac{2}{x}\right) = 2$, $\lim\limits_{x \to -1^+} (3-x) = 4$, $\lim\limits_{x \to 2^-} \log_2 x = 1$, $\lim\limits_{x \to 2^+} (3-x) = 1$.

2.6.5 a) $a = \pm\sqrt{6}$; **b)** $a = -1$; **c)** $a = 2$; **d)** $a = 1-e$; **e)** $a = 9$; **f)** $a = \dfrac{1}{e+1}$.

2.7 Asymptoty grafu funkcie

Asymptotou grafu funkcie nazývame priamku, ku ktorej sa graf funkcie približuje. Asymptoty nám umožňujú zistiť ako sa graf funkcie správa v okolí bodov nespojitosti a pre $x \to \infty$ a $x \to -\infty$. Na základe existencie smernice priamky poznáme asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou. Ich hľadanie je súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie, výsledkom čoho je nakreslenie grafu funkcie.

Definícia 2.7.1 Nech funkcia je definovaná aspoň v jednom okolí $\tilde{O}_{\delta_+}(a)$, $\tilde{O}_{\delta_-}(a)$, $a \in R$. Priamka $x = a$ sa nazýva ***asymptota bez smernice*** grafu funkcie f práve vtedy, ak nastane aspoň jeden z nasledujúcich prípadov:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \quad \vee \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Poznámka 2.7.1 Ak je a bod nespojitosti funkcie, stačí, aby aspoň jedna z jednostranných limít v bode a bola nevlastné číslo ∞ alebo $-\infty$ a priamka $x = a$ bude asymptota bez smernice grafu funkcie.

Definícia 2.7.2 Nech funkcia je definovaná aspoň v jednom okolí $\tilde{O}_{\delta}(\infty)$, $\tilde{O}_{\delta}(-\infty)$. Potom priamka daná rovnicou $y = kx + q$ sa nazýva ***asymptota so smernicou*** grafu funkcie f práve vtedy, ak

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \quad \text{alebo} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$$

Veta 2.7.2 (*asymptota so smernicou*) Priamka $y = kx + q$ je asymptota so smernicou grafu funkcie f práve vtedy, ak platí

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \wedge \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = q$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \wedge \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = q$$

Príklad 2.7.1 Určme asymptoty grafu funkcie $f: y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$.

Riešenie:

Asymptoty bez smernice (ABS):

Pretože definičný obor funkcie je $D(f) = R$ (menovateľ sa nikdy nerovná nule), nemôže mať asymptoty bez smernice.

ABS neexistujú.

Asymptoty so smernicou (ASS):

Keďže funkcia f je definovaná v obidvoch neúplných okoliach bodov $+\infty$ a $-\infty$, má zmysel hľadať ASS v tvare $y = kx + q$.

Podľa vety 2.7.2 priamka $y = kx + q$ je ASS práve vtedy, ak

$$k_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-k_1x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}-2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2+1} \overset{"\frac{-\infty}{\infty}"}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x+\frac{1}{x}} = \frac{-2}{\infty+0} = "\frac{-2}{\infty}" = 0$$

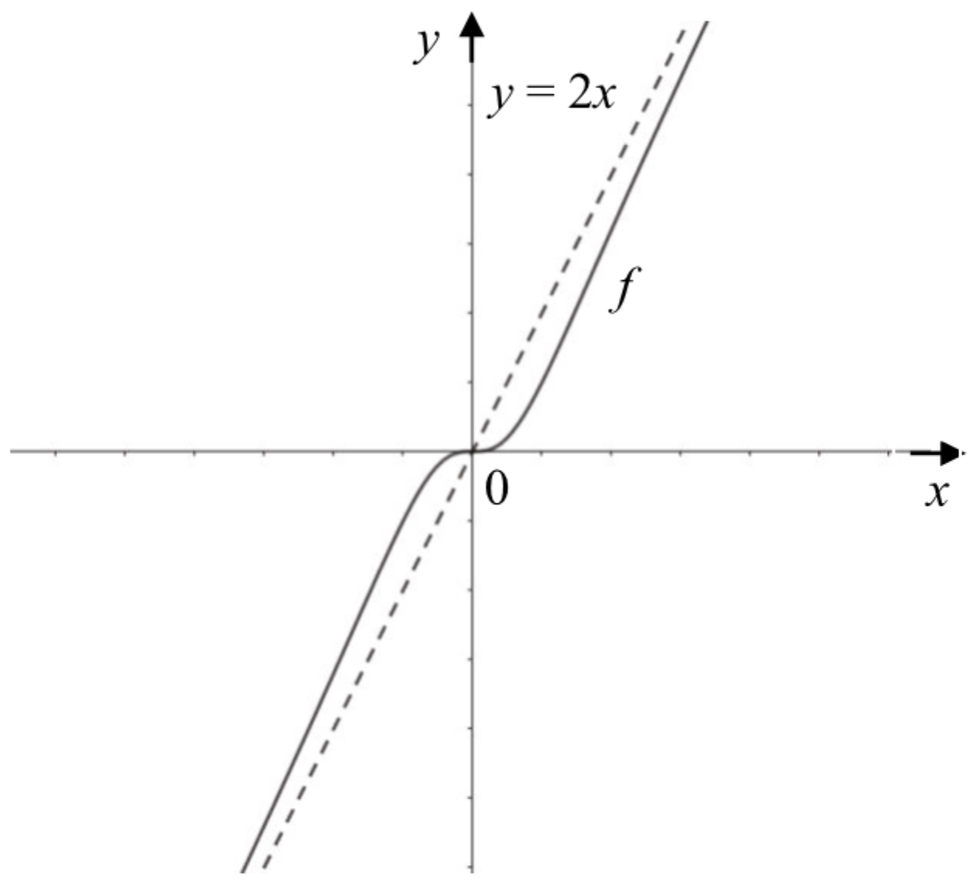
Potom priamka $y = 2x$ *je asymptotou* so smernicou grafu funkcie *f*.
Keďže platí

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2+1} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}-2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-2x\left(x^2+1\right)}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2+1} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x+\frac{1}{x}} = \frac{-2}{(-\infty)+0} = "\frac{-2}{-\infty}" = 0$$

Vypočítali sme hodnoty k_2 a q_2, ktoré sú rovnaké ako hodnoty k_1 a q_1, preto priamka $y = 2x$ je jedinou *asymptotou so smernicou* grafu funkcie *f*. Ak by sme vyšetrili priebeh funkcie *f*, graficky by sme ju a jej asymptotu so smernicou znázornili obr. 2.7.1. Všimnime si, že asymptota grafu funkcie $y = 2x$ má s funkciou *f* práve jeden spoločný bod, a to začiatok súradnicovej sústavy.



Obr. 2.7.1 Graf funkcie $f: y = \frac{2x^3}{x^2+1}$

Príklad 2.7.2 Určme asymptoty grafu funkcie $f: y = \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x}$.

Riešenie:

Asymptoty bez smernice (ABS):

Pretože definičný obor funkcie je $D(f) = R - \{0; 2\}$, a teda funkcia nie je definovaná v bodoch $a = 0$ a $a = 2$, môže mať dve asymptoty bez smernice, a to priamky $x = 0$ a $x = 2$.

Podľa definície 2.7.1 je priamka $x = 0$ asymptotou bez smernice práve vtedy, ak aspoň jedna z jednostranných limít funkcie v bode $a = 0$ je nevlastná.
Keďže platí

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x}{x-2} = 0$$

priamka $x = 0$ *nie je asymptotou* bez smernice grafu funkcie *f*.

Podľa definície 2.7.1 priamka $x = 2$ je asymptotou bez smernice práve vtedy, ak aspoň jedna z jednostranných limít funkcie v bode $a = 2$ je nevlastná.
Pretože podľa vety 2.5.6

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2^-} \frac{3x}{x-2} = -\infty$$

priamka $x = 2$ *je asymptotou* bez smernice grafu funkcie *f*.
Z výsledku limity vieme, že ak sa po *x*-ovej osi budeme blížiť k číslu 2 zľava, funkčné hodnoty sa budú blížiť k mínus nekonečnu.

Keďže asymptoty hľadáme kvôli nakresleniu grafu funkcie, vypočítame aj druhú jednostrannú limitu použitím vety 2.5.6. Teda

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2^+} \frac{3x}{x-2} = \infty$$

Z výsledku limity vieme, že ak sa po *x*-ovej osi budeme blížiť k číslu 2 sprava, potom funkčné hodnoty sa budú blížiť k plus nekonečnu.

Asymptoty so smernicou (ASS):

Keďže funkcia f je definovaná v obidvoch neúplných okoliach bodov $+\infty$ a $-\infty$, má zmysel hľadať ASS v tvare $y = kx + q$.
Podľa vety 2.7.2 priamka $y = kx + q$ je ASS práve vtedy, ak

$$k_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2(x-2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x-2} = 0$$

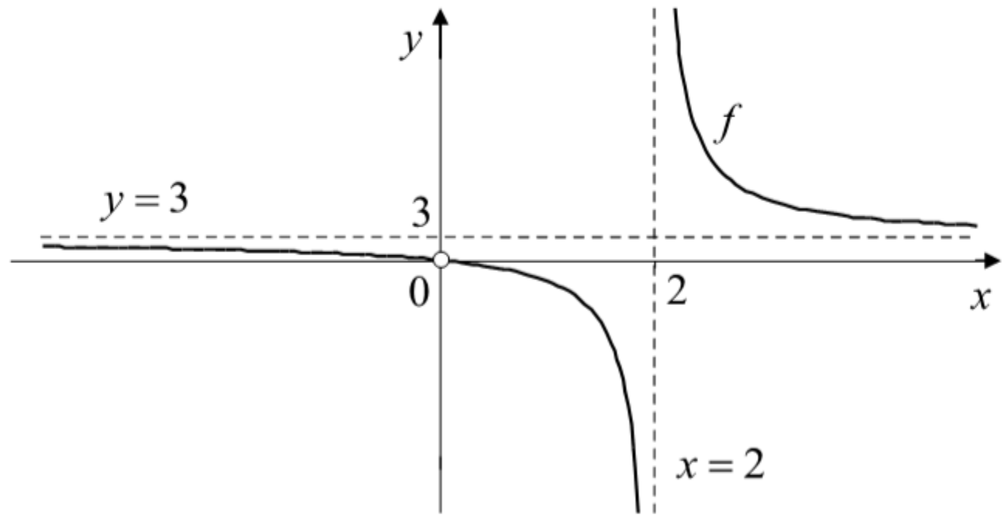
$$q_1 = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - k_1 x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{3}{1} = 3$$

Potom priamka $y = 3$ *je asymptotou* so smernicou grafu funkcie *f*.
Keďže platí

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2(x-2)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x-2} = 0$$

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{1-\frac{2}{x}} = 3$$

priamka $y=3$ je jedinou asymptotou so smernicou grafu funkcie f, čo znamená, že ak sa po x-ovej osi budeme blížiť k $+\infty$ a $-\infty$, potom funkčné hodnoty sa budú blížiť k číslu 3.
Ak by sme vyšetrili priebeh funkcie, graficky by sme funkciu f znázornili ako na obr. 2.7.2.



Obr. 2.7.2 Graf funkcie $f: y = \dfrac{3x^2}{x^2-2x}$

Poznámka 2.7.2 Ak $k = \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ je nevlastná limita, tak nemá zmysel počítať q. Asymptoty so smernicou neexistujú.

Príklad 2.7.3 Určme asymptoty grafu funkcie $f: y = \ln\left(9-x^2\right)$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(f) = (-3;3)$.

Asymptoty bez smernice:

Z definičného oboru je zrejmé, že funkcia môže mať dve asymptoty bez smernice, a to priamky $x=-3$ a $x=3$.
Vzhľadom na definičný obor funkcie zistíme, či limita v bode $a=-3$ sprava a limita v bode $a=3$ zľava sú nevlastné.

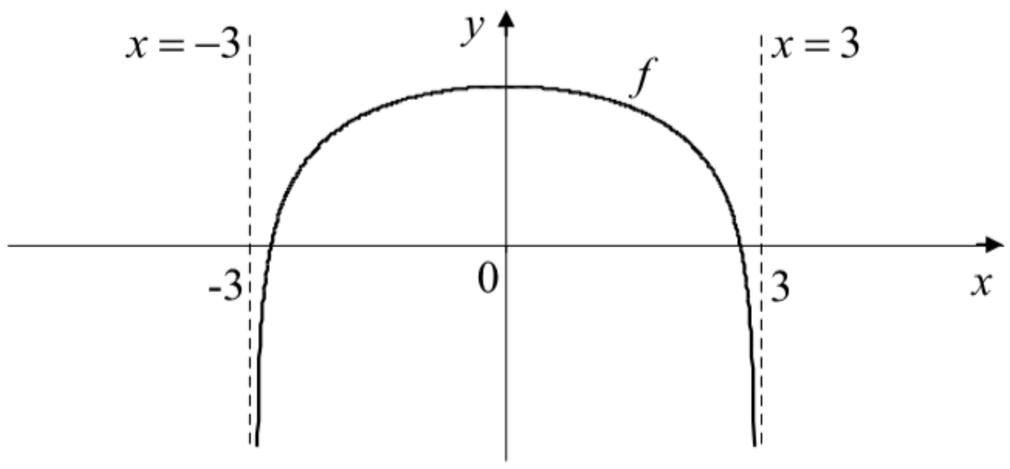
Keďže $\lim_{x\to-3^+}\ln\left(9-x^2\right) = -\infty$ a $\lim_{x\to3^-}\ln\left(9-x^2\right) = -\infty$, priamky $x=-3$ a $x=3$ *sú asymptotami* bez smernice grafu funkcie f.

Z výsledkov limít vieme, že ak sa po x-ovej osi budeme blížiť k číslu -3 sprava a k číslu 3 zľava, potom funkčné hodnoty funkcie sa budú blížiť do mínus nekonečna.

Asymptoty so smernicou:

ASS nebudeme hľadať, pretože $D(f) = (-3;3)$, a teda funkcia f nie je definovaná ani v jednom z neúplných okolí bodov $+\infty$ a $-\infty$.

Ak by sme vyšetrili priebeh funkcie, graficky by sme funkciu f znázornili ako na obr. 2.7.3.



Obr. 2.7.3 Graf funkcie $f: y = \ln\left(9 - x^2\right)$

ÚLOHY

V úlohách 2.7.1 až 2.7.5 nájdite asymptoty grafu funkcie.

2.7.1

a) $f_1: y = \dfrac{x}{x+4}$

b) $f_2: y = x - \dfrac{1}{x}$

c) $f_4: y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$

d) $f_5: y = \dfrac{x^2+1}{x+3}$

e) $f_5: y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

f) $f_6: y = \dfrac{2x^2}{2x-1}$

g) $f_6: y = \dfrac{2x^2}{2x^2+1}$

h) $f_6: y = \dfrac{3x^3}{x^2+10}$

i) $f_7: y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

j) $f_{10}: y = 3x + \dfrac{3}{x-2}$

k) $f_{11}: y = \dfrac{x^3+2}{x^2-4}$

l) $f_{12}: y = \dfrac{x^4}{(x-1)^2}$

2.7.2

a) $f_1: y = x + e^{-x}$

b) $f_2: y = 2x^2 e^x$

c) $f_3: y = xe^{\frac{1}{x^2}}$

d) $f_5: y = e^{\frac{x}{x+2}}$

e) $f_6: y = 4xe^{-x^2}$

f) $f_7: y = \dfrac{e^x - 10}{\ln x}$

2.7.3

a) $f_1: y = \ln(x+7)$

b) $f_2: y = \ln\left(x^2+1\right)$

c) $f_3: y = 1\mathrm{n}\left(x^2-1\right)$

d) $f_5: y = x + \dfrac{\ln x}{x}$

e) $f_6: y = 2x - \ln(x-1)$

f) $f_7: y = \dfrac{\ln\left(x^2+3\right)}{x+3}$

2.7.4

a) $f_1: y = x \cdot \operatorname{arccotg} x$

b) $f_2: y = \dfrac{1}{2}x + \operatorname{arctg} x$

d) $f_5: y = -x - \operatorname{arctg} 2x$

e) $f_6: y = \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{x^2}$

c) $f_3: y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x-1}$

f) $f_7: y = \dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x+3}$

2.7.5 a) $f_1: y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{(x+3)(x-1)}$

c) $f_3: y = \sqrt[3]{x^3+4x^2}$

b) $f_2: y = \sqrt{x^2+7x}$

d) $f_4: y = \sqrt{x^2-9x}$

Poznámka 2.7.3 Pri hľadaní asymptot grafov funkcií v niektorých príkladoch v úlohách 2.7.2 a 2.7.3 je potrebné použiť pri výpočte limít L´Hospitalovo pravidlo, ktoré bude uvedené v tretej kapitole.

Výsledky

2.7.1 a) $x=-4;\ y=1$; **b)** $x=0;\ y=x$; **c)** $x=2;\ y=-x-2$; **d)** $x=-3;\ y=x-3$;

e) ABS neexistuje; $y=1$; **f)** $x=\dfrac{1}{2};\ y=x+\dfrac{1}{2}$; **g)** ABS neexistuje; $y=1$;

h) ABS neexistuje; $y=3x$; **i)** $x=-1;\ y=\dfrac{1}{2}x-1$; **j)** $x=2;\ y=3x$;

k) $x=-2;\ x=2;\ y=x$; **l)** $x=1$.

2.7.2 a) $y=x$; **b)** $y=0$; **c)** $x=0;\ y=x$; **d)** $y=e$; **e)** $y=0$; **f)** $x=1$.

2.7.3 a) $x=-7$; **b)** nemá; **c)** $x=-1;\ x=1$; **d)** $x=0;\ y=x$; **e)** $x=1$;

f) $x=-3;\ y=0$.

2.7.4 a) $y=1;\ y=\pi\cdot x+1$; **b)** $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{2};\ y=\dfrac{1}{2}\cdot x-\dfrac{\pi}{2}$; **c)** $y=\dfrac{\pi}{4}$;

d) $y=-x-\dfrac{\pi}{2};\ y=-x+\dfrac{\pi}{2}$; **e)** $y=\dfrac{\pi}{2}$; **f)** $x=-3;\ y=0$.

2.7.5 a) $x=1;\ y=0$; **b)** $y=x+\dfrac{7}{2};\ y=-x-\dfrac{7}{2}$; **c)** $y=x+\dfrac{4}{3}$;

d) $y=x-\dfrac{9}{2};\ y=-x+\dfrac{9}{2}$.

3 Diferenciálny počet funkcií jednej premennej

Diferenciálny počet je jedna zo základných disciplín matematiky a stala sa základom matematickej analýzy. Za priekopníkov v tejto oblasti matematiky sa považujú anglický fyzik a matematik Newton a nemecký filozof a matematik Leibniz, ktorí objavili diferenciálny počet na konci 17. storočia. Prínos týchto dvoch osobností síce nie je spochybniteľný, však najnovšie poznatky dokazujú, že už 250 rokov pred nimi sa o rozvoj diferenciálneho počtu sa zaslúžili indickí matematici Madhava a Nilakhata.

Význam diferenciálneho počtu vo všetkých oblastiach vzdelávania je nepopierateľný. Je dôležité, že jeho využitie v ekonomickej teórii je veľmi široké. Pomocou neho vieme popísať a kvantifikovať mnohé ekonomické procesy a javy.

3.1 Derivácia funkcie

Definícia 3.1.1 Ak existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{pre } x_0 \in R \tag{1}$$

tak túto limitu nazývame ***deriváciou funkcie f v bode*** x_0 a označujeme ju $f'(x_0)$.

Ďalšie používané označenia:

$$\left[f'(x)\right]_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_0} = y'(x_0) = \left[y'(x)\right] = \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_0}$$

Poznámka 3.1.1 Z definície 3.1.1 platí, že

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

Poznámka 3.1.2 Ak do vzťahu (1) v definícii 3.1.1 zavedieme substitúciu $h = x - x_0$, resp. $\Delta x = x - x_0$, môžeme deriváciu funkcie f v bode x_0 vyjadriť nasledujúcimi vzťahmi:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \text{resp. } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3}$$

Poznámka 3.1.3 Pri určovaní $f'(x_0)$ budeme vždy predpokladať, že funkcia f je definovaná aspoň v jednom z okolí $O_{\delta^-}(x_0)$, $O_{\delta^+}(x_0)$. Preto bod x_0 bude hromadným bodom definičného oboru funkcie f.

Ak $f'(x_0) \in R$, hovoríme, že funkcia f v bode x_0 vlastnú deriváciu. Ak limita (1) je rovná $+\infty$ alebo $-\infty$, hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 nevlastnú limitu.

Pod pojmom derivácia, pokiaľ nebude uvedené ináč, budeme ďalej vždy rozumieť vlastnú deriváciu.

Príklad 3.1.1 Na základe definície derivácie vypočítajme deriváciu funkcie $f: y = 3x - 4$ v bode $x_0 = -1$.

Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine R. Keďže existuje limita (1)

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

tak podľa (2) a podľa vzťahov pre výpočet limít vo vete 2.5.2 podkapitoly 2.5 dostávame

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{3x-4-(-7)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{3x+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{3(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}3=3$$

Funkcia f má v bode $x_0=-1$ deriváciu $f'(-1)=3$.

Teraz ukážeme, že táto derivácia sa dá vypočítať aj podľa prvého zo vzťahov (3), a to nasledovne

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(-1+h)-4-(-7)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3+3h+3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=\lim_{h\to 0}3=3$$

Funkcia f má v bode $x_0=-1$ deriváciu $f'(-1)=3$.

Príklad 3.1.2 Na základe definície derivácie vypočítajme deriváciu funkcie $f: y=x^2+1$ v bode $x_0=2$.

Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine *R*. Budeme postupovať rovnako ako v príklade 3.1.1. Vzhľadom na to, že existuje limita (1) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, podľa (2) dostávame

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1-5}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Funkcia f má v bode $x_0=2$ deriváciu $f'(2)=4$.

Podobne podľa prvého zo vzťahov (3) máme

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+1-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

Funkcia f má v bode $x_0=2$ deriváciu $f'(2)=4$.

Príklad 3.1.3 Vypočítajme deriváciu funkcie $f: y=\sqrt[3]{x}$ v bode $x_0=0$.

Riešenie: Funkcia f je definovaná na *R*. Pretože existuje limita (1), platí (2) :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=\infty$$

Funkcia f má v bode $x_0=0$ nevlastnú deriváciu $f'(0)=\infty$.

Definícia 3.1.2 Nech funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O_{\delta^-}(x_0)$, resp. $O_{\delta^+}(x_0)$ a nech existuje jednostranná limita

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ , \qquad \text{resp. } \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4}$$

tak túto limitu nazývame ***deriváciou funkcie f v bode*** x_0 **zľava**, resp. **sprava** a označujeme $f'_-(x_0)$, resp. $f'_+(x_0)$.

Poznámka 3.1.4 Podobne ako pri predchádzajúcich vzťahoch platí

$$\text{a) } f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad \text{resp. } f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{5}$$

$$\text{b) } f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad \text{resp. } f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{6}$$

$$\text{c) } f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \qquad \text{resp. } f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{7}$$

Veta 3.1.1 Nech funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O_\delta(x_0)$. Potom funkcia f má v bode x_0 deriváciu práve vtedy, ak má v tomto bode deriváciu sprava a zľava a rovnajú sa.

Príklad 3.1.4 Vypočítajme deriváciu funkcie $f: y=|3-x|$ v bode $x_0=3$.

Riešenie: Funkcia f je definovaná na R. V zmysle definície 3.1.1 zistíme, či pre danú funkciu existuje derivácia v bode x_0, teda či existuje limita (1):

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{|3-x|-|0|}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{|3-x|}{x-3}$$

Po dosadení bodu $x_0=3$ do danej limity dostávame neurčitý výraz. A teda, aby sme mohli vypočítať túto limitu, musíme vypočítať limity zľava a sprava v bode $x_0=3$. To znamená zistiť, či v bode $x_0=3$ existujú derivácie zľava a sprava.

Zo vzťahov (6) dostávame

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{|3-x|-|0|}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{3-x}{x-3}=-1$$

a

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{|3-x|-|0|}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-(3-x)}{x-3}=1$$

Derivácie zľava a sprava v danom bode existujú, ale $f'_-(3)\neq f'_+(3)$. Preto $f'(3)$ neexistuje.

Veta 3.1.2 Ak má funkcia f v bode x_0 deriváciu, tak je v tomto bode spojitá.

Poznámka 3.1.5 Je dôležité si uvedomiť, že opačne táto veta neplatí. Funkcia z príkladu 3.1.4 je síce spojitá v bode $x_0=3$, ale ako sme si ukázali, derivácia v tomto bode neexistuje.

Definícia 3.1.3 Nech funkcia f má vlastnú deriváciu v každom bode $x \in M$, $M \subset D(f)$. Potom funkcia ***f má na množine M deriváciu f'***. Označujeme ju $\boldsymbol{f'(x)}$ a pre všetky $x \in M$ platí

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad \text{resp. } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Príklad 3.1.5 Daná je funkcia $f : y = \dfrac{1}{x+1}$. Vypočítajme

a) deriváciu funkcie f,

b) deriváciu funkcie f v bode $x_0 = 0$.

Riešenie: a) Funkcia f je definovaná na množine $R - \{-1\}$. Potom pre každé $x \in R - \{-1\}$ vzhľadom na definíciu 3.1.3 platí

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h+1} - \dfrac{1}{x+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-h}{(x+h+1)\cdot(x+1)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h \cdot (x+h+1)\cdot(x+1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h+1)\cdot(x+1)} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

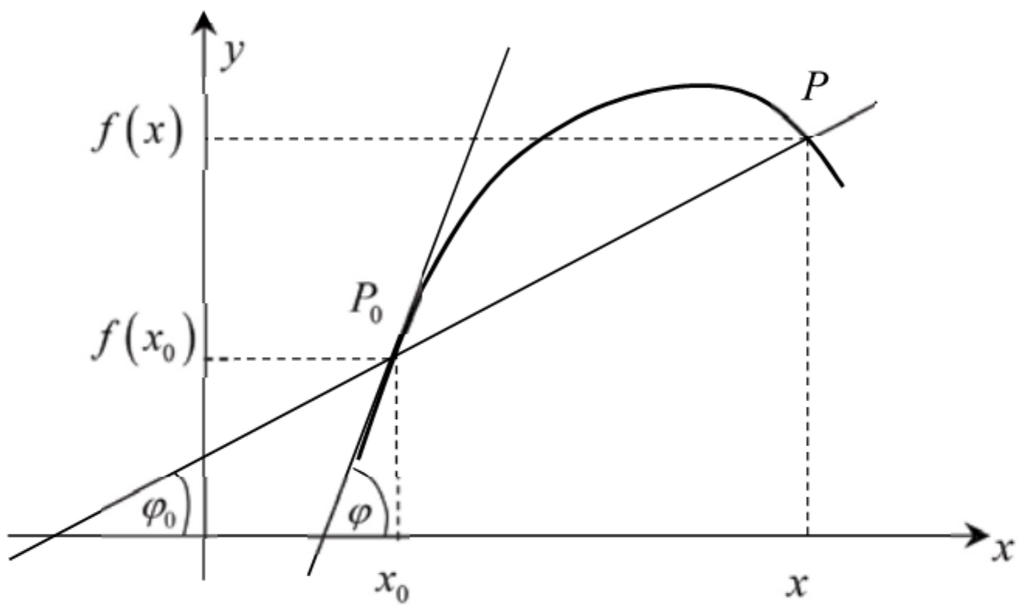
Teda $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ pre $x \in R - \{-1\}$.

b) $f'(0) = [f'(x)]_{x=0} = \left[-\dfrac{1}{(x+1)^2} \right]_{x=0} = -1$

Wondershare PDFelement

Geometrický význam derivácie

Geometrická interpretácia derivácie nám umožňuje nájsť rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie v bode, v ktorom je funkcia definovaná. Ukážeme to na obr. 3.1.1.



Obr. 3.1.1 Geometrická interpretácia derivácie

Nech je funkcia f definovaná v nejakom δ-okolí bodu x_0, t. j. $O_\delta(x_0)$. Zvoľme na grafe pevný bod P_0 so súradnicami $[x_0; f(x_0)]$ a pohyblivý bod P so súradnicami $[x; f(x)]$. Potom pre smernicu $k = \operatorname{tg}\varphi_0$ sečnice grafu funkcie f, ktorá prechádza bodmi P_0 a P, platí

$$k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ak sa bude x blížiť k x_0, tak bod P sa bude blížiť k bodu P_0 po grafe funkcie f a dostaneme dotyčnicu ku grafu funkcie f, ktorej smernica $k = \mathrm{tg}\varphi$ je deriváciou funkcie f v bode x_0, pre ktorú platí. A teda

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{8}$$

Definícia 3.1.4 Ak existuje vlastná derivácia $f'(x_0)$, tak priamku prechádzajúcu bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $k = f'(x_0)$ nazývame ***dotyčnicou ku grafu funkcie f v bode*** $[x_0; f(x_0)]$. Jej rovnica je

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{9}$$

Poznámka 3.1.6 Ak je derivácia $f'(x_0)$ nevlastná a f je v bode x_0 spojitá, tak ***dotyčnica ku grafu funkcie f v bode*** $[x_0; f(x_0)]$ je priamka rovnobežná s osou y a jej rovnica je

$$x = x_0 \tag{10}$$

Ak derivácia $f'(x_0)$ neexistuje alebo je nevlastná a súčasne f nie je v bode x_0 spojitá, tak v bode $[x_0; f(x_0)]$ neexistuje dotyčnica ku grafu funkcie f.

Definícia 3.1.5 Ak existuje vlastná derivácia $f'(x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$, tak priamku prechádzajúcu bodom $[x_0; f(x_0)]$ kolmú na dotyčnicu v tomto bode nazývame ***normálou grafu funkcie f v bode*** $[x_0; f(x_0)]$. Jej rovnica je

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \tag{11}$$

Poznámka 3.1.7 Ak je derivácia $f'(x_0)$ nevlastná a f je v bode x_0 spojitá, tak ***normála ku grafu funkcie f v bode*** $[x_0; f(x_0)]$ je priamka rovnobežná s osou x a jej rovnica je

$$y = f(x_0) \tag{12}$$

Príklad 3.1.6 Nájdime a graficky znázornime dotyčnicu t a normálu n ku grafu funkcie

a) $f : y = x^2 + 1$ v bode $T[2;?]$,

b) $f : y = \sqrt[3]{x}$ v bode $T[0;?]$.

Riešenie: a) Najskôr vypočítame druhú súradnicu bodu T:

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = 5$$

Deriváciu v bode $x_0 = 2$ sme vypočítali v príklade 3.1.2, a teda $f'(2) = 4$.

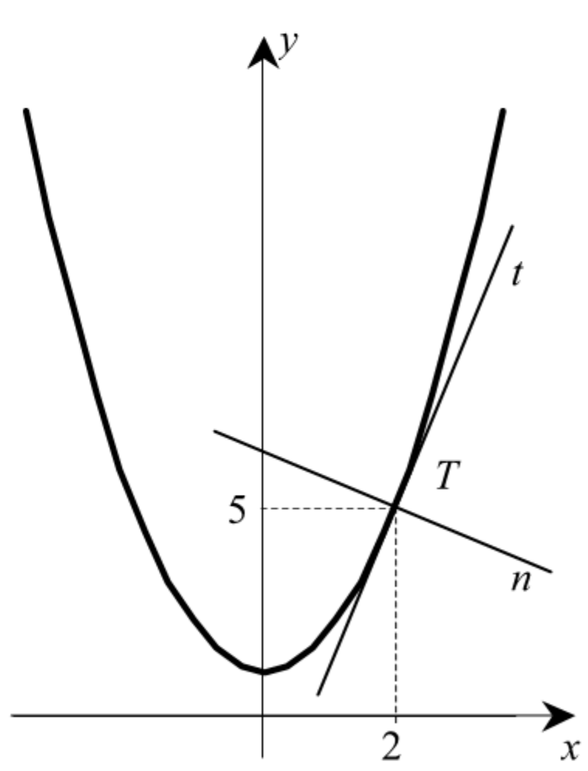
Podľa (9) je rovnicou dotyčnice t ku grafu funkcie f v bode $[2; 5]$

$$y-5=4(x-2), \qquad \text{resp. po úprave} \qquad 4x-y-3=0$$

Podľa (11) je rovnicou normály n ku grafu funkcie f v bode $[2;5]$

$$y-5=-\frac{1}{4}(x-2) \qquad \text{resp. po úprave} \qquad x+4y-22=0$$

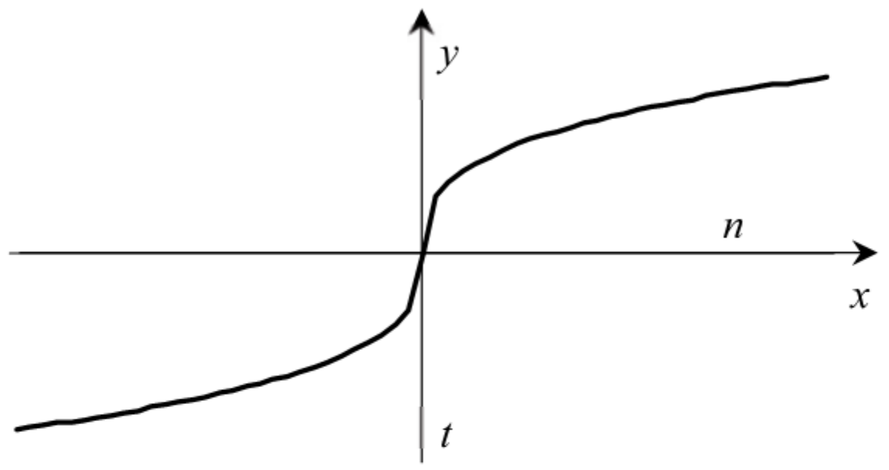
Nami vypočítaná dotyčnica t a normála n sú znázornené na obr. 3.1.2.



Obr. 3.1.2 Graf funkcie $f: y=x^2+1$, jej dotyčnica a normála v bode $T[2;5]$

b) $y_0=f(x_0)=f(0)=0$. Podľa príkladu 3.1.2 je $f'(0)=\infty$ a funkcia je spojitá v bode $x_0=0$.

Podľa (10) je rovnicou dotyčnice t ku grafu funkcie f v bode $[0;0]$ priamka $x=0$, čiže os y, a podľa (12) je rovnicou normály n ku grafu funkcie f v bode $[0;0]$ priamka $y=0$, čiže os x.



Obr. 3.1.3 Graf funkcie $f: y=\sqrt[3]{x}$, jej dotyčnica a normála v bode $T[0;0]$

ÚLOHY

3.1.1 Na základe definície vypočítajte deriváciu funkcie f v bode x_0.

a) $f: y=x+3$ $\quad x_0=4$

b) $f: y=5-2x$ $\quad x_0=-2$

c) $f: y=x^4,$ $\quad x_0=2$

g) $f: y=\sqrt[3]{x-1},$ $\quad x_0=1$

h) $f: y=\sqrt[3]{x^2},$ $\quad x_0=0$

i) $f: y=\sqrt[5]{x^3-27},$ $\quad x_0=3$

d) $f: y = x^2 - 3x$, $x_0 = 1$

e) $f: y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$

f) $f: y = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$

j) $f: y = |3x + 6|$, $x_0 = -2$

k) $f: y = \sin x$, $x_0 = 0$

l) $f: y = \operatorname{tg}(x - 1)$, $x_0 = 1$

3.1.2 Na základe definície vypočítajte deriváciu funkcie f.

a) $f: y = 4 - x$

b) $f: y = x^2 + 2x - 3$

c) $f: y = -\frac{2}{3x}$

d) $f: y = \sqrt{2 - x}$

e) $f: y = \frac{x - 1}{x}$

f) $f: y = \frac{1 - x}{1 + x}$

3.1.3 Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie f v bode T. Graficky znázornite.

a) $f: y = x^2 - 2x + 2$, $T = [0; ?]$

b) $f: y = 2x - x^2$, $T = [1; ?]$

c) $f: y = 1 - \frac{1}{x + 1}$, $T = [0; ?]$

d) $f: y = \sqrt[3]{x + 4}$, $T = [-4; ?]$

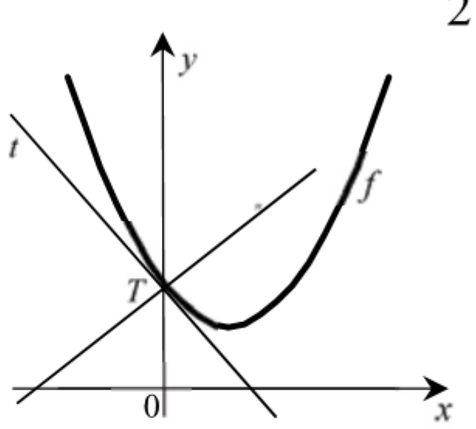
Výsledky

3.1.1 a) 1; **b)** -2; **c)** 32; **d)** -1; **e)** -1; **f)** ∞; **g)** ∞; **h)** neexistuje, **i)** ∞; **j)** neexistuje; **k)** 1; **l)** 1

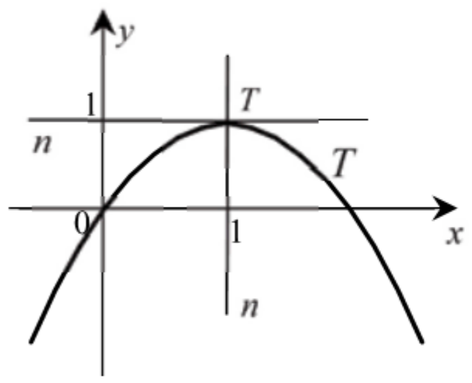
3.1.2 a) $f'(x) = -1$, $x \in R$; **b)** $f'(x) = 2x + 2$, $x \in R$; **c)** $f'(x) = \frac{2}{3x^2}$, $x \in R - \{0\}$;

d) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2 - x}}$, $x \in (-\infty; 2)$; **e)** $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$; **f)** $f'(x) = -\frac{2}{(1 + x)^2}$, $x \in R - \{-1\}$

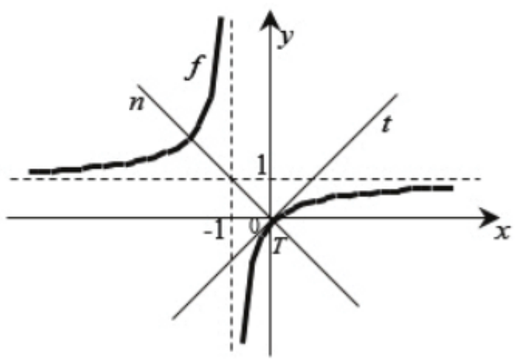
3.1.3 a) $t: y = -2x + 2$, $n: y = \frac{1}{2}x + 2$;



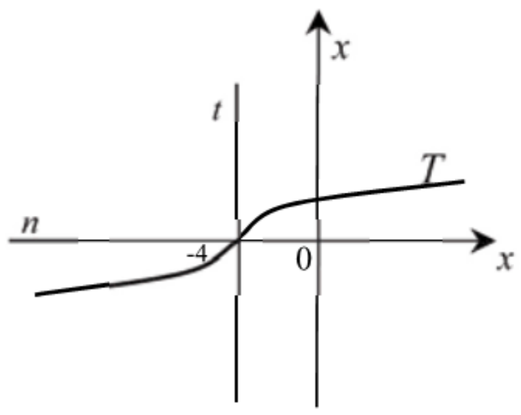
b) $t: x = 1$, $n: y = 1$;



c) $t: y = x$, $n: y = -x$;



d) $t: x = -4$, $n: y = 0$



AKTUÁRSTVO

ŠTUDIJNÝ PROGRAM II. STUPŇA

MATEMATIKA BIG DATA EKONÓMIA ŠTATISTIKA

REŠPEKTOVANÁ PROFESIA

ZARUČENÁ UPLATNITEĽNOSŤ V PRAXI

ŠTÚDIUM PREPOJENÉ S PRAXOU

FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY EU v BRATISLAVE

aktuarstvo.fhi.euba

aktuarstvo.fhi.euba@gmail.com

KATEDRA MATEMATIKY A AKTUÁRSTVA

AKTUÁRSTVO / ACTUARIAL SCIENCE

študijný program II. stupňa
Fakulta hospodárskej informatiky
Ekonomická univerzita v Bratislave

- je jedinečný študijný program korešpondujúci s výučbou aktuárstva vo Veľkej Británii, Holandsku, USA a inde

- obsahuje poznatky z matematiky a teórie pravdepodobnosti, štatistiky, ekonómie, práva, účtovníctva, informačných technológií a iné

- výučba prebieha v spolupráci s praxou (ZURICH INSURANCE, UNIQA 4WARD, PWC, GENERALI, UNION, ČSOB, SSA)

- potreby praxe sa odrážajú v priebežnej aktualizácii obsahu výučby tak, aby zodpovedali požiadavkám medzinárodných aktuárskych asociácií

- študenti pracujú so štatistickým a aktuárskym softvérom (Prophet, jazyk R, jazyk VBA, Python, SAS, SQL, Maxima)

- absolventi získavajú množstvo potrebných teoretických informácií a praktických zručností pre vykonávanie aktuárskej funkcie, riadenia rizík a interného auditu, a to na predmetoch akými sú napríklad Aktuárska demografia, Aktuárska matematika, Softvérové aplikácie pre aktuárov, Regresná a korelačná analýza, Neživotné poistenie, Životné poistenie, Teória rizika v poistení, Enterprise risk management, Účtovníctvo a finančné výkazníctvo poisťovní, Poistné právo

- aktuár je profesionál, ktorý je kvalifikovaný v oblasti aktuárstva prostredníctvom špecifického vzdelania a skúseností

- aktuárske zručnosti zahŕňajú podrobnú predstavu o trhových, kreditných, operačných a poistných rizikách, ktoré aktuári využívajú pre tvorbu štatistických modelov, stanovenie primeranosti poistného, zaistenia, investičnú politiku

- aktuári majú uplatnenie predovšetkým ako vrcholoví finanční manažéri a risk manažéri v poisťovniach, bankách, maklérskych spoločnostiach, penzijných fondoch a v zdravotníckych organizáciách

Actuary making financial sense of the future.

INSURANCE – RISK – TECHNOLOGY – COMMUNICATION – EDUCATION – OPPORTUNITIES

3.2 Vety o derivovaní funkcií

Jednu z možností ako derivovať funkciu f v bode alebo na množine, ktorá je podmnožinou definičného oboru funkcie f, sme ukázali v predchádzajúcej podkapitole. Bolo by však zdĺhavé a náročné, ak by sa na výpočet derivácie vždy používala definícia derivácie. Preto v nasledujúcej časti uvedieme vety o derivovaní, ako i základné vzorce na derivovanie elementárnych funkcií, ktoré nám derivovanie značne uľahčia.

Veta 3.2.1 (*vzorce na derivovanie súčtu, rozdielu, súčinu a podielu funkcií*) Nech funkcie u a v majú deriváciu na množine M. Potom

a) funkcie $u+v$, $u-v$, $u\cdot v$ majú deriváciu na množine M,

b) nech $v(x)\neq 0$, funkcia $\frac{u}{v}$ má deriváciu na M a platí

$$(u+v)' = u'+v' \qquad (1)$$

$$(u-v)' = u'-v' \qquad (2)$$

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \qquad (3)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2} \qquad (4)$$

$$(k\cdot v)' = k\cdot v' \text{, kde } k \text{ je konštanta, } k\in R \qquad (5)$$

Veta 3.1.2 (*vzorce na derivovanie elementárnych funkcií*). Platí

$(k)' = 0$	k je konštanta, $k\in R$	(6)
$(x^a)' = a\cdot x^{a-1}$	$a\in R,\ x\in(0;\infty)$ $a\in N,\ x\in R$ $a\in Z^-,\ x\in R-\{0\}$	(7)
$(e^x)' = e^x$	$x\in R$	(8)
$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$	$x\in R$	(9)
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x>0$	(10)
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$	$x>0$	(11)
$(\sin x)' = \cos x$	$x\in R$	(12)
$(\cos x)' = -\sin x$	$x\in R$	(13)
$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x\in R-\left\{x\,;\,x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,k\in Z\right\}$	(14)
$(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x\in R-\{x\,;\,x=k\pi\,,\,k\in Z\}$	(15)
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\in(-1;1)$	(16)

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in \left(-1;1\right) \qquad (17)$$

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{x^2+1} \qquad x \in R \qquad (18)$$

$$\left(\operatorname{arccotg} x\right)' = -\frac{1}{x^2+1} \qquad x \in R \qquad (19)$$

Príklad 3.2.1 Derivujme funkciu

$$f: y = 3x^5 - x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + 7\,.$$

Riešenie: Použijeme vzťahy pre deriváciu súčtu (1), resp. rozdielu funkcií (2). Funkciu f, ktorej $D(f) = R - \{0\}$, upravíme tak, aby sme mohli použiť vzorce (5), (7) a (6).

$$f: y = 3x^5 - x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2x^{-2} - x^{-1} + 7$$

Použijeme vzorce (5), (7) a (6). Dostaneme

$$f'(x) = 15x^4 - 4x^3 + x - 4x^{-3} + x^{-2}$$

a po úprave

$$f'(x) = 15x^4 - 4x^3 + x - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2}\ ,\ x \in R - \{0\}$$

Príklad 3.2.2 Derivujme funkciu

$$f: y = 3\sqrt[4]{x^3} - x^3 \cdot \sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} + \sqrt{5}\,.$$

Riešenie: Funkciu f, ktorej $D(f) = (0;\infty)$, upravíme podobne ako v príklade 3.2.1 tak, aby sme mohli opäť použiť vzťahy na deriváciu súčtu a rozdielu (1), (2) a vzorce (5), (7) a (6). Všimnime si, že posledný výraz neobsahuje premennú x, a teda úprava tejto odmocniny (je to konštanta) na tvar mocniny nie je potrebný.

$$f: y = 3x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{5}$$

Použijeme vzorce (5), (7) a (6). Dostaneme

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

a po úprave

$$f'(x) = \frac{9}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{7}{2}x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\ x \in (0;\infty)$$

Príklad 3.2.3 Derivujme funkciu

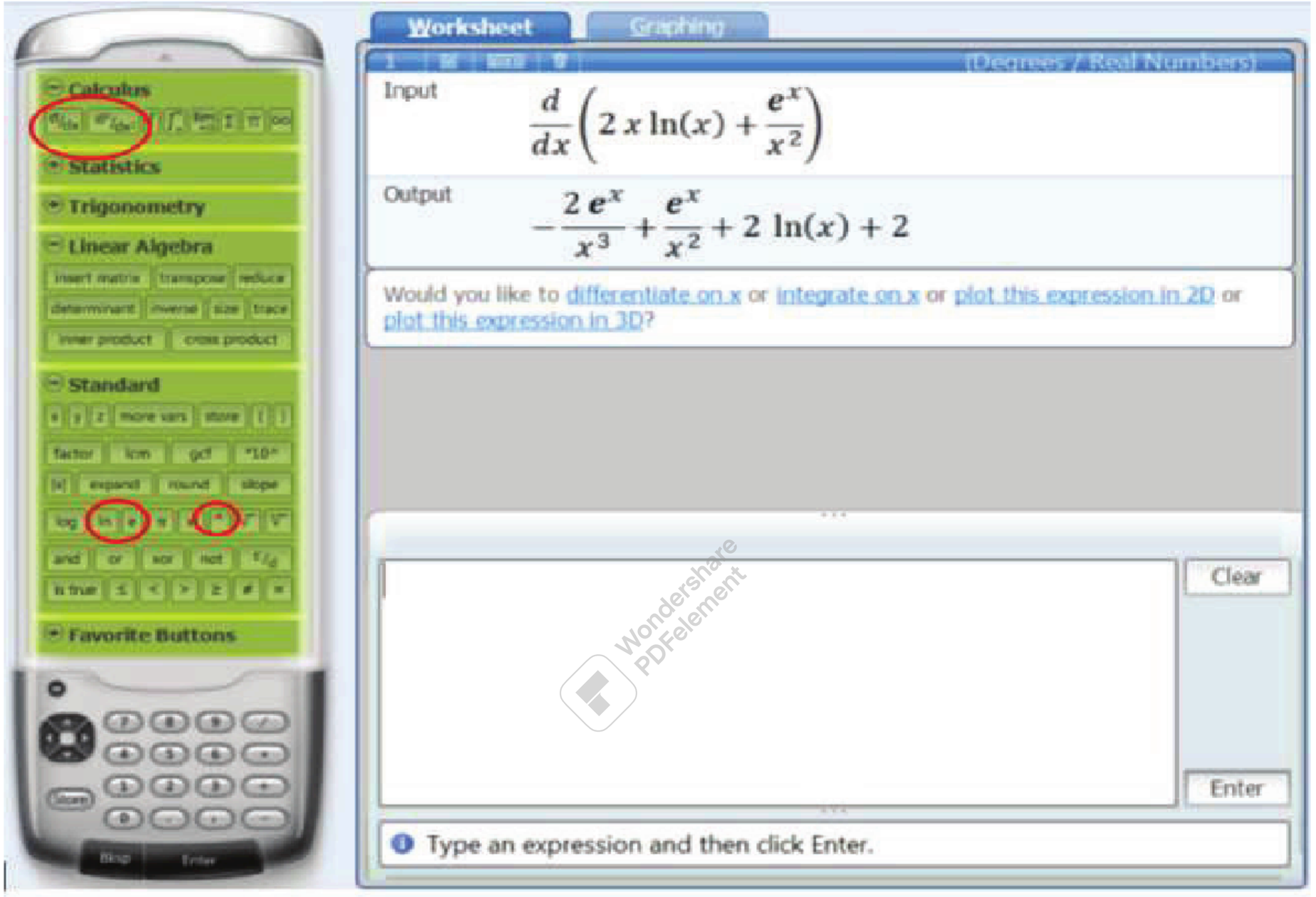
$$f: y = 2x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x^2}\,.$$

Riešenie: $D(f) = (0;\infty)$. Použijeme vzťahy pre deriváciu súčtu (1), súčinu (3) a podielu (4) dvoch funkcií a vzorce na derivovanie elementárnych funkcií a dostaneme

$$f'(x)=\left(2x\cdot\ln x\right)'+\left(\frac{e^x}{x^2}\right)'=\left(2x\right)'\cdot\ln x+2x\cdot\left(\ln x\right)'+\frac{\left(e^x\right)'\cdot x^2-e^x\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=$$

$$=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=2\ln x+2+\frac{e^x\cdot\left(x-2\right)}{x^3},\quad x\in(0;\infty)$$

Na derivovanie elementárnych a neskôr aj zložených funkcií môžeme použiť softvér MS MATHEMATICS 4.0, ako je vidno na obrázku 3.2.1.



Obr. 3.2.1 Ukážka derivácie funkcie z príkladu 3.2.3 v MS MATHEMATICS 4.0

Veta 3.2.3 (*derivácia zloženej funkcie*) Nech funkcia g má deriváciu v bode x_0 a funkcia f má deriváciu v bode $u_0=g\left(x_0\right)$. Potom zložená funkcia $f\left(g\right)$ má v bode x_0 deriváciu a platí

$$\left[f\left(g(x_0)\right)\right]'=f'(u_0)\cdot g'(x_0) \tag{20}$$

Poznámka 3.2.1 Z vety 3.2.3 vyplýva: Ak zložená funkcia $F: y=f\left[g(x)\right]$ má deriváciu v každom bode $x\in M$, tak pre deriváciu funkcie F na M platí

$$F'(x)=\left[f\left(g(x)\right)\right]'=f'(u)\cdot g'(x),\quad \text{kde } u=g(x) \tag{21}$$

resp.

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\quad \text{kde } y=f\left(u\right),\ u=g\left(x\right) \tag{22}$$

Príklad 3.2.4 Derivujme funkcie

a) $F: y=\left(x^2+x\right)^3$, b) $F: y=\dfrac{5}{\left(x^2+x\right)^3}$, c) $F: y=\sqrt{x^2+x}$.

Riešenie: a) $D(f)=R$. Označme $u=x^2+x$ a $y=u^3$. Potom podľa (22)

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}\,u^3}{\mathrm{d}\,u}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(x^2+x\right)}{\mathrm{d}\,x}=3u^2\cdot\left(2x+1\right)=3\left(x^2+x\right)^2\cdot\left(2x+1\right),\ x\in R$$

resp. podľa (21)

$$F'(x)=\left[\left(x^2+x\right)^3\right]'=3\left(x^2+x\right)^2\cdot\left(x^2+x\right)'=3\left(x^2+x\right)^2\cdot\left(2x+1\right),\ x\in R$$

b) $D(f)=R-\{-1;0\}$, $u=x^2+x$, $y=\dfrac{5}{u^3}$

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}\frac{5}{u^3}}{\mathrm{d}\,u}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(x^2+x\right)}{\mathrm{d}\,x}=-\frac{15}{u^4}\cdot\left(2x+1\right)=-\frac{15}{\left(x^2+x\right)^4}\cdot\left(2x+1\right)=-\frac{15\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x\right)^4},\ x\in R-\{-1;0\}$$

resp.

$$F'(x)=\left[\frac{5}{\left(x^2+x\right)^3}\right]'=-\frac{15}{\left(x^2+x\right)^4}\cdot\left(x^2+x\right)'=-\frac{15}{\left(x^2+x\right)^4}\cdot\left(2x+1\right)=$$

$$=-\frac{15\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x\right)^4},\ x\in R-\{-1;0\}$$

c) $D(f)=\left(-\infty;-1\right\rangle\cup\left\langle 0;\infty\right)$, $u=x^2+x$, $y=\sqrt{u}$

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}\sqrt{u}}{\mathrm{d}\,u}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(x^2+x\right)}{\mathrm{d}\,x}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\left(2x+1\right)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot\left(2x+1\right)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;\infty\right)$$

resp.

$$f'(x)=\left[\sqrt{x^2+x}\right]'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot\left(x^2+x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot\left(2x+1\right)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;\infty\right)$$

Príklad 3.2.5 Vypočítajme deriváciu funkcie f, ak

a) $f: y=e^{5x-x^3}$, b) $f: y=\ln\left(x^2+1\right)$, c) $f: y=\operatorname{arctg}\left(1-x^2\right)$.

Riešenie: V tomto príklade budeme derivovať funkciu opäť podľa vzťahov (22) a (21) v tomto poradí, avšak na označenie funkcie už budeme používať malé písmeno.

a) $D(f)=R$, $u=5x-x^3$, $y=e^u$

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}\,e^{u}}{\mathrm{d}\,u}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(5x-x^{3}\right)}{\mathrm{d}\,x}=e^{u}\cdot\left(5-3x^{2}\right)=e^{5x-x^{3}}\cdot\left(5-3x^{2}\right),\quad x\in R$$

resp.

$$f'(x)=\left(e^{5x-x^{3}}\right)'=e^{5x-x^{3}}\cdot\left(5x-x^{3}\right)'=e^{5x-x^{3}}\cdot(5-3x^{2}),\quad x\in R$$

b) $D(f)=R,\qquad u=x^{2}+1,\qquad y=\ln u$

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}\ln u}{\mathrm{d}\,u}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(x^{2}+1\right)}{\mathrm{d}\,x}=\frac{1}{u}\cdot 2x=\frac{1}{x^{2}+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^{2}+1},\quad x\in R$$

resp.

$$f'(x)=\left[\ln\left(x^{2}+1\right)\right]'=\frac{1}{x^{2}+1}\cdot\left(x^{2}+1\right)'=\frac{1}{x^{2}+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^{2}+1},\quad x\in R$$

c) $D(f)=R,\qquad u=1-x^{2},\qquad y=\operatorname{arctg}u$

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}\operatorname{arctg}u}{\mathrm{d}\,u}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(1-x^{2}\right)}{\mathrm{d}\,x}=\frac{1}{u^{2}+1}\cdot(-2x)=\frac{1}{\left(1-x^{2}\right)^{2}+1}\cdot(-2x)=$$

$$=\frac{-2x}{\left(1-x^{2}\right)^{2}+1},\quad x\in R$$

resp.

$$f'(x)=\left[\operatorname{arctg}\left(1-x^{2}\right)\right]'=\frac{1}{\left(1-x^{2}\right)^{2}+1}\cdot\left(1-x^{2}\right)'=\frac{1}{\left(1-x^{2}\right)^{2}+1}\cdot(-2x)=$$

$$=\frac{-2x}{\left(1-x^{2}\right)^{2}+1},\quad x\in R$$

Príklad 3.2.6 Zderivujme funkcie

a) $f:y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, b) $f:y=\arcsin\dfrac{1}{x}$, c) $f:y=5^{\cos x\cdot\sin x}$.

Riešenie: Derivovanie týchto mierne zložitejších funkcií uvádzame pre náročnejšieho čitateľa.

a) $D(f)=(-1;1),\qquad u=\dfrac{1+x}{1-x},\qquad y=\ln u$

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}\ln u}{\mathrm{d}\,u}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\mathrm{d}\,x}=\frac{1}{u}\cdot\frac{(1+x)'\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(1-x)'}{(1-x)^{2}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^{2}}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^{2}}=\frac{2}{1-x^{2}},\quad x\in(-1;1)$$

resp.

$$f'(x)=\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1+x)'\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{2}{1-x^2},\quad x\in(-1;1)$$

b) $D(f)\in(-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;\infty)$, $u=\frac{1}{x}$, $y=\arcsin u$

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}\arcsin u}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$$

resp.

$$f'(x)=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$$

Poznámka 3.2.2 Vzťah (21), pre deriváciu zloženej funkcie, môžeme prepísať na funkciu zloženú z konečného počtu funkcií. Majme napríklad funkciu

$$F(x)=f(g(h(x)))$$

Potom

$$F'(x)=\left[f(g(h(x)))\right]'=f'(u)\cdot g'(v)\cdot h'(x)$$

resp.

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},\quad \text{kde } y=f(u),\ u=g(v),\ v=g(x)$$

Príklad 3.2.7 Derivujme funkcie

a) $f: y=\sqrt{\ln(x^2+1)}$, b) $f: y=\ln\sqrt{x^2+1}$.

Riešenie: a) $D(f)=R$, $v=x^2+1$, $u=\ln v$, $y=\sqrt{u}$

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}\sqrt{u}}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}\ln v}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{v}\cdot 2x=\frac{1}{2\sqrt{\ln v}}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{\ln(x^2+1)}},\quad x\in R$$

resp.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}}\cdot\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]'=\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}},\quad x\in R$$

$x\in R$

b) $D(f)=R,\qquad v=x^2+1,\qquad u=\sqrt{v},\qquad y=\ln u$

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}\ln u}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}\sqrt{v}}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot 2x=\frac{1}{\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{x}{x^2+1},\quad x\in R$$

resp.

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\left[\sqrt{x^2+1}\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x^2+1\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{x}{x^2+1},\quad x\in R$$

Derivácia funkcie typu f^g

Funkciu $h: y=f(x)^{g(x)}$, pričom ani jedna z funkcií f, g nie je konštanta, za predpokladu, že $f(x)>0$, upravíme na tvar zloženej funkcie

$$h: y=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

Potom $$h'\left(x\right)=f\left(x\right)^{g(x)}\cdot\left(g'\left(x\right)\cdot\ln f\left(x\right)+g\left(x\right)\cdot\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right)$$

Príklad 3.2.8 Derivujme funkciu $h: y=\left(x^2+1\right)^{x^3}$.

Riešenie: Funkcia h je definovaná na R a pre každé $x\in R$ je $x^2+1>0$. Preto môžeme funkciu h zapísať v tvare zloženej funkcie

$$h: y=e^{x^3\cdot\ln\left(x^2+1\right)},\quad x\in R$$

Použijeme vzorce (21), (3) a vzorce pre derivovanie elementárnych funkcií. Potom

$$h'(x)=\left(e^{x^3\cdot\ln\left(x^2+1\right)}\right)'=e^{x^3\cdot\ln\left(x^2+1\right)}\cdot\left(x^3\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right)'=$$

$$=e^{x^3\cdot\ln\left(x^2+1\right)}\cdot\left(3x^2\cdot\ln\left(x^2+1\right)+x^3\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)=$$

$$=\left(x^2+1\right)^{x^3}\cdot\left(3x^2\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^4}{x^2+1}\right),\quad x\in R$$

ÚLOHY

V nasledujúcich úlohách vypočítajte deriváciu funkcie f .

3.2.1 a) $f: y = x^2 - 4x + 3$

b) $f: y = 5x^5 - \frac{4x^3}{3} + \sqrt{2}$

c) $f: y = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{x^3} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f: y = x^2 \cdot \sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{4}$

e) $f: y = x \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$

f) $f: y = x^4 + 4^x - \ln 4$

g) $f: y = \left(x^2 + 1\right) \cdot e^x$

h) $f: y = \frac{x^3}{2^x}$

i) $f: y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

j) $f: y = \frac{6 + 4x}{9 - 4x^2}$

k) $f: y = \frac{x \cdot e^x}{x - e^x}$

l) $f: y = e^x \cdot \ln x + \frac{x \cdot \ln x}{1 + \ln x}$

3.2.2 a) $f: y = \sin x \cdot \cos x$

b) $f: y = x \cdot \operatorname{tg} x$

c) $f: y = \left(x^2 - 3x\right) \cdot \operatorname{cotg} x$

d) $f: y = 5^x \cdot \operatorname{arctg} x$

e) $f: y = \log x \cdot \arcsin x$

f) $f: y = \frac{\cos x}{x^2}$

3.2.3 a) $f: y = \left(4x^2 + x\right)^3$

b) $f: y = \sqrt{1 - x^2}$

c) $f: y = \sqrt[3]{1 + x^2}$

d) $f: y = \ln\left(1 + x^2\right)$

e) $f: y = e^{x^2 - 5x}$

f) $f: y = 3^{x^2}$

g) $f: y = e^{\frac{x}{1+x}}$

h) $f: y = \ln \sqrt{x}$

i) $f: y = \sqrt{\ln x}$

j) $f: y = e^x \cdot \sqrt{x^3}$

3.2.4 a) $f: y = \sin 3x$

b) $f: y = \cos^4\left(1 - x\right)$

c) $f: y = \arccos \frac{1}{x}$

d) $f: y = \operatorname{arctg} \sqrt{1 - x^2}$

3.2.5 a) $f: y = \ln(e^x \cdot \ln x)$

b) $f: y = \sqrt{\ln\left(1 + x^2\right)}$

c) $f: y = \log_3\left(x^2 - 5\right) + \frac{3}{\ln x}$

d) $f: y = x \cdot \ln \frac{x - 1}{x + 1}$

3.2.6 a) $f: y = x^2 \cdot e^{-x^2} + 4 \operatorname{tg}^3 x$

b) $f: y = x \cdot e^x \cdot \cos^3 x$

c) $f: y = \sin^2\left(\cos 3x\right) + 2^{\operatorname{tg} x}$

d) $f: y = 2^{x \cdot \sin x} + \arcsin 2x$

3.2.7 a) $f: y = x^x$

f) $f: y = x^{2^x}$

b) $f: y = x^{x^2}$

c) $f: y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$

d) $f: y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

e) $f: y = x^{\sqrt{x}}$

g) $f: y = (\ln x)^x$

h) $f: y = x^{\cos x}$

i) $f: y = (\cos x)^{\sin x}$

j) $f: y = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}$

3.2.8 Vypočítajte deriváciu funkcie, v ktorých derivácia existuje a derivácie funkcie f zľava a sprava v bodoch, v ktorých derivácia neexistuje.

a) $f: y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$

b) $f: y = x - \sqrt[3]{(4-x)^2}$

c) $f: y = |x-2|$

d) $f: y = |x^2 - 5x - 6|$

3.2.9 Vypočítajte deriváciu funkcie f, v ktorých derivácia existuje a derivácie funkcie f zľava a sprava v bodoch, v ktorých derivácia neexistuje.

a) $f: y = \begin{cases} 3\sin 2x, & x < 0 \\ e^{3x} - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

b) $f: y = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} 3x, & x > 0 \end{cases}$

3.2.10 Napíšte rovnice dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie f v bode T.

a) $f: y = x^7 - 3$, $T[1;?]$

b) $f: y = \frac{2}{x}$, $T[2;?]$

c) $f: y = \frac{2x}{x+1}$, $T[0;?]$

d) $f: y = x + \sqrt{4-x}$, $T[3;?]$

e) $f: y = (x-1)\cdot e^x$, $T[1;?]$

f) $f: y = e^{1-x^2}$, $T[1;?]$

g) $f: y = \ln x + \frac{1}{x}$, $T[1;?]$

h) $f: y = \ln(2 - e^x)$, $T[0;?]$

3.2.11 Napíšte rovnice dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie f v bode T.

a) $f: y = e^{\sin x}$, $T[\pi;?]$

b) $f: y = \ln \sin x$, $T\left[\frac{\pi}{2};?\right]$

3.2.12 Vypočítajte, v ktorom bode dotyčnica ku grafu danej funkcie f je rovnobežná s osou x.

a) $f: y = \frac{x^3}{3} - x^2$

b) $f: y = x \cdot e^x$

3.2.13 Vypočítajte, v ktorom bode dotyčnica ku grafu danej funkcie f zviera s osou x uhol 45°.

a) $f: y = 2\sqrt{3+x^2}$

b) $f: y = \ln \frac{x}{2}$

3.2.14 Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie f, ak dotyčnica t je rovnobežná s danou priamkou p.

a) $f: y = \ln(x+1)$, $p: x - y + 2 = 0$

b) $f: y = 3 - 2e^{\frac{x}{2}}$, $p: 2x + 2y - 3 = 0$

c) $f: y = x^3 - x$, $p: 2x - y = 0$;

d) $f: y = \dfrac{2x-1}{2-x}$, $p: 3x - y = 0$

Výsledky

3.2.1 a) $f'(x) = 2x - 4$, $x \in R$; **b)** $f'(x) = 25x^4 - 4x^2$, $x \in R$;

c) $f'(x) = x^3 + \dfrac{9}{x^4} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x \cdot \sqrt{x}}$, $x \in (0;\infty)$; **d)** $f'(x) = \dfrac{5}{2}\sqrt{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $x \in (0;\infty)$

e) $f'(x) = \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{3x \cdot \sqrt[3]{x^2}}$, $x \in (0;\infty)$; **f)** $f'(x) = 4x^3 + 4^x \cdot \ln 4$, $x \in R$;

g) $f'(x) = e^x \cdot (x+1)^2$, $x \in R$; **h)** $f'(x) = \dfrac{x^2(3 - \ln 2 \cdot x)}{2^x}$, $x \in R$; **i)** $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$,

$x \in R$; **j)** $f'(x) = \dfrac{4}{(3-2x)^2}$, $x \in R - \left\{\pm\dfrac{3}{2}\right\}$; **k)** $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot (x^2 - e^x)}{(x - e^x)^2}$, $x \in R$;

l) $f'(x) = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{\ln^2 x + \ln x + 1}{(1+\ln x)^2}$, $x \in (0;\infty) - \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$

3.2.2 a) $f'(x) = \cos 2x$, $x \in R$; **b)** $f'(x) = \operatorname{tg} x + \dfrac{x}{\cos^2 x}$, $x \in R - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in Z$;

c), $f'(x) = (2x-3)\operatorname{cotg} x - \dfrac{x^2 - 3x}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$; **d)** $f'(x) = 5^x \ln 5 \cdot \operatorname{arctg} x + \dfrac{5^x}{x^2+1}$,

$x \in R$; **e)** $f'(x) = \dfrac{\arcsin x}{\ln 10 \cdot x} + \dfrac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (0;1)$; **f)** $f'(x) = -\dfrac{x \cdot \sin x + 2\cos x}{x^3}$,

$x \in R - \{0\}$

3.2.3 a) $f'(x) = 3(4x^2 + x)^2 \cdot (8x+1)$, $x \in R$; **b)** $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$;

c) $f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$, $x \in R$; **d)** $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $x \in R$; **e)** $f'(x) = e^{x^2-5x} \cdot (2x-5)$,

$x \in R$; **f)** $f'(x) = 3^{x^2} \cdot x \cdot \ln 9$, $x \in R$; **g)** $f'(x) = e^{\frac{x}{1+x}} \cdot \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $x \neq -1$; **h)** $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$,

$x \in (0;\infty)$; **i)** $f'(x) = \dfrac{1}{2x \cdot \sqrt{\ln x}}$, $x \in (1;\infty)$; **j)** $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot e^x \cdot (2x+3)}{2\sqrt{x^3}}$, $x \in (0;\infty)$

3.2.4 a) $f'(x) = 3\cos 3x$, $x \in R$; **b)** $f'(x) = 4\cos^3(1-x) \cdot \sin(1-x)$, $x \in R$;

c) $f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$; **d)** $f'(x)=\dfrac{x}{(x^2-2)\cdot\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1;1)$

3.2.5 a) $f'(x)=1+\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$, $x\in(1;\infty)$; **b)** $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{\ln(1+x^2)}\cdot(1+x^2)}$, $x\neq 0$;

c) $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2-5)\cdot\ln 3}+\dfrac{3}{x\cdot\ln^2 x}$, $x\in(\sqrt{5};\infty)$; **d)** $f'(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2-1}$,
$x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$

3.2.6 a) $f'(x)=2x\cdot e^{-x^2}\cdot(1-x^2)+\dfrac{12\sin^2 x}{\cos^4 x}$, $x\in R-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, $k\in Z$;

b) $f'(x)=e^x\cdot\cos^2 x\cdot\left[(x+1)\cdot\cos x-3x\cdot\sin x\right]$, $x\in R$;

c) $f'(x)=-6\sin(\cos 3x)\cdot\sin 3x+\dfrac{2^{\operatorname{tg}x}\cdot\ln 2}{\cos^2 x}$, $x\in R-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, $k\in Z$;

d) $f'(x)=2^{x\cdot\sin x}\cdot\ln 2\cdot\left[x\cdot\cos x+\sin x\right]+\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$, $x\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

3.2.7 a) $f'(x)=x^x\cdot(\ln x+1)$, $x>0$; **b)** $f'(x)=x^{x^2+1}\cdot(2\ln x+1)$, $x>0$;

c) $f'(x)=2(x+1)^{\frac{2}{x}}\left[\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$, $x\in(-1;0)\cup(0;\infty)$;

d) $f'(x)=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left[\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right]$, $x\in(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$; **e)** $f'(x)=x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\ln x}{2}+1\right)$,
$x>0$; f) $f'(x)=2^x x^{2^x}\left(\ln 2\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$; **g)** $f'(x)=(\ln x)^x\left(\dfrac{1}{\ln x}+\ln(\ln x)\right)$, $x>1$;

h) $f'(x)=x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\cdot\ln x\right)$, $x>0$;

i) $f'(x)=(\cos x)^{\sin x}\cdot(\cos x\cdot\ln\cos x-\operatorname{tg}x\cdot\sin x)$, $x\in\cup\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$,

$k\in Z$; **j)** $f'(x)=(x^2+1)^{\operatorname{arctg}x}\cdot\dfrac{\ln(x^2+1)+2x\cdot\operatorname{arctg}x}{1+x^2}$, $x\in R$

3.2.8 a) $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$ pre $x\neq -1$, $f'_-(-1)=-\infty$, $f'_+(-1)=\infty$; **b)** $f'(x)=1+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{4-x}}$ pre
$x\neq 4$, $f'_-(4)=\infty$, $f'_+(4)=-\infty$; **c)** $f'(x)=\begin{cases}-1 & x<2\\ 1 & x>2\end{cases}$, $f'_-(2)=-1$, $f'_+(2)=1$;

d) $f'(x)=\begin{cases}5-2x & x\in(-1;6)\\ 2x-5 & x\notin\langle -1;6\rangle\end{cases}$, $f'_-(-1)=-7$, $f'_+(-1)=7$, $f'_-(6)=-7$, $f'_+(6)=7$

3.2.9 a) $f: y=\begin{cases}6\cos 2x, & x<0\\ 3e^{3x}, & x>0\end{cases}$, $f'_-(0)=6$, $f'_+(0)=3$; **b)** $f'(x)=\begin{cases}2x-3, & x<0\\ \dfrac{3}{9x^2+1}, & x>0\end{cases}$, $f'_-(0)=-3$,
$f'_+(0)=3$

Wondershare PDFelement

3.2.10 **a)** $t: 7x-y-9=0$, $n: x+7y+13=0$; **b)** $t: x+y-3=0$, $n: x-y-1=0$;
c) $t: 2x-y=0$, $n: x+2y=0$; **d)** $t: x-2y+5=0$, $n: 2x+y-10=0$;
e) $t: ex-y-e=0$, $n: x+ey-1=0$; **f)** $t: 2x+y-3=0$, $n: x-2y+1=0$; **g)** $t: y=1$, $n: x=1$; **h)** $t: x+y=0$, $n: x-y=0$

3.2.11 **a)** $t: x+y-1+\pi=0$, $n: x-y+1-\pi=0$; **b)** ; $t: y=0$, $n: x=\frac{\pi}{2}$

3.2.12 **a)** $T_1=[0;0]$, $T_2=\left[2;-\frac{4}{3}\right]$; **b)** $T=\left[-1;-\frac{1}{e}\right]$

3.2.13 **a)** $T=[1;4]$; **b)** $T=[1;-\ln 2]$

3.2.14 **a)** $t: x-y=0$, $n: x+y=0$; **b)** $t: x+y-1=0$, $n: x-y+1=0$; **c)** $t_1: 2x-y+2=0$, $t_2: 2x-y-2=0$, $n_1: x+2y+1=0$, $n_2: x+2y-1=0$; **d)** $t_1: 3x-y-2=0$, $t_2: 3x-y-14=0$, $n_1: x+3y-4=0$, $n_2: x+3y+12=0$

Wondershare PDFelement

3.3 Diferenciál funkcie

Definícia 3.3.1 Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu x_0. Hovoríme, že ***funkcia f je v bode x_0 diferencovateľná (má v bode x_0 diferenciál)*** práve vtedy, ak prírastok funkcie $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$ môžeme vyjadriť v tvare

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + h\cdot\tau(h) \qquad (1)$$

kde A je konštanta a τ funkcia, pre ktorú platí

$$\lim_{h\to 0}\tau(h) = \tau(0) = 0$$

Výraz Ah nazývame ***diferenciál funkcie f v bode x_0*** a označujeme ho $\mathbf{d}f(x_0)$.

Veta 3.3.1 Funkcia f je v bode x_0 diferencovateľná (má v bode x_0 diferenciál) práve vtedy, ak má v bode x_0 deriváciu, pričom

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\cdot h \qquad (2)$$

Namiesto prírastku h niekedy píšeme Δx. Potom (2) prepíšeme na

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x\,.$$

Poznámka 3.3.1 Ak má funkcia f deriváciu v každom bode intervalu, tak diferenciál

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\cdot h \qquad (3)$$

závisí od dvoch veličín x a h. Z tohto dôvodu (3) píšeme tiež v tvare

$$\mathrm{d}f(x;h) = f'(x)\cdot h$$

Príklad 3.3.1 Daná je funkcia $f: y = (x^2-1)^3$. Vypočítajme

a) diferenciál funkcie f,
b) diferenciál funkcie f v bode $x_0 = 2$,
c) diferenciál funkcie f v bode $x_0 = 2$ pre prírastok $h = 0,02$.

Riešenie: a) Funkcia f je definovaná na R a má deriváciu v každom bode svojho definičného oboru. Potom podľa poznámky 3.3.1 platí

$$\mathrm{d}f(x;h) = \mathrm{d}f(x) = \left[(x^2-1)^3\right]'\cdot h = 3(x^2-1)^2\cdot 2x\cdot h = 6x\cdot(x^2-1)^2\cdot h$$

b) Funkcia f má deriváciu v bode x_0. Potom podľa vety 4.3.1 platí

$$\mathrm{d}f(3;h) = \mathrm{d}f(3) = \left[(x^2-1)^3\right]'_{x=2}\cdot h = \left[6x\cdot(x^2-1)^2\right]_{x=2}\cdot h = 36h$$

c) Pre konkrétne hodnoty x_0 a h využijeme výpočet v prípade a)

$$\mathrm{d}f(3;0,3) = \left[\frac{1}{6}\cdot h\right]_{h=0,02} = 0,72$$

Príklad 3.3.2 Daná je funkcia $f : y = x^2 - x$. Vypočítajme diferenciu a diferenciál funkcie f v bode $x_0 = 2$ a porovnajme ich pre

a) $h = 0{,}1$, b) $h = 0{,}01$, c) $h = 0{,}001$.

Riešenie: a) Použijeme vzťah pre výpočet diferencie z definície 3.3.1 a vetu 3.3.1 vzťah (2) pre výpočet diferenciálu funkcie.

$$\Delta f(2) = f(2+0{,}1) - f(2) = f(2{,}1) - f(2) = 2{,}31 - 2 = 0{,}31$$

$$\mathrm{d}f(2) = \left[x^2 - x\right]'_{x=2} \cdot h = \left[2x - 1\right]_{x=2} \cdot h = 3 \cdot h$$

pre $h = 0{,}1$ je

$$\mathrm{d}f(2) = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$$

b) $\Delta f(2) = f(2+0{,}01) - f(2) = f(2{,}01) - f(2) = 2{,}0301 - 2 = 0{,}0301$

V prípade a) sme vypočítali $\mathrm{d}f(2)$ pre prírastok h, a teda pre $h = 0{,}01$ je

$$\mathrm{d}f(2) = 3 \cdot 0{,}01 = 0{,}03$$

c) $\Delta f(2) = f(2+0{,}001) - f(2) = f(2{,}001) - f(2) = 2{,}003001 - 2 = 0{,}003001$

a pre $h = 0{,}001$ je

$$\mathrm{d}f(2) = 3 \cdot 0{,}001 = 0{,}003$$

Čím viac sa prírastok h blíži k číslu nula, tým menej sa líšia hodnoty $\Delta f(x_0)$ a diferenciálu $\mathrm{d}f(x_0)$.

Wondershare PDFelement

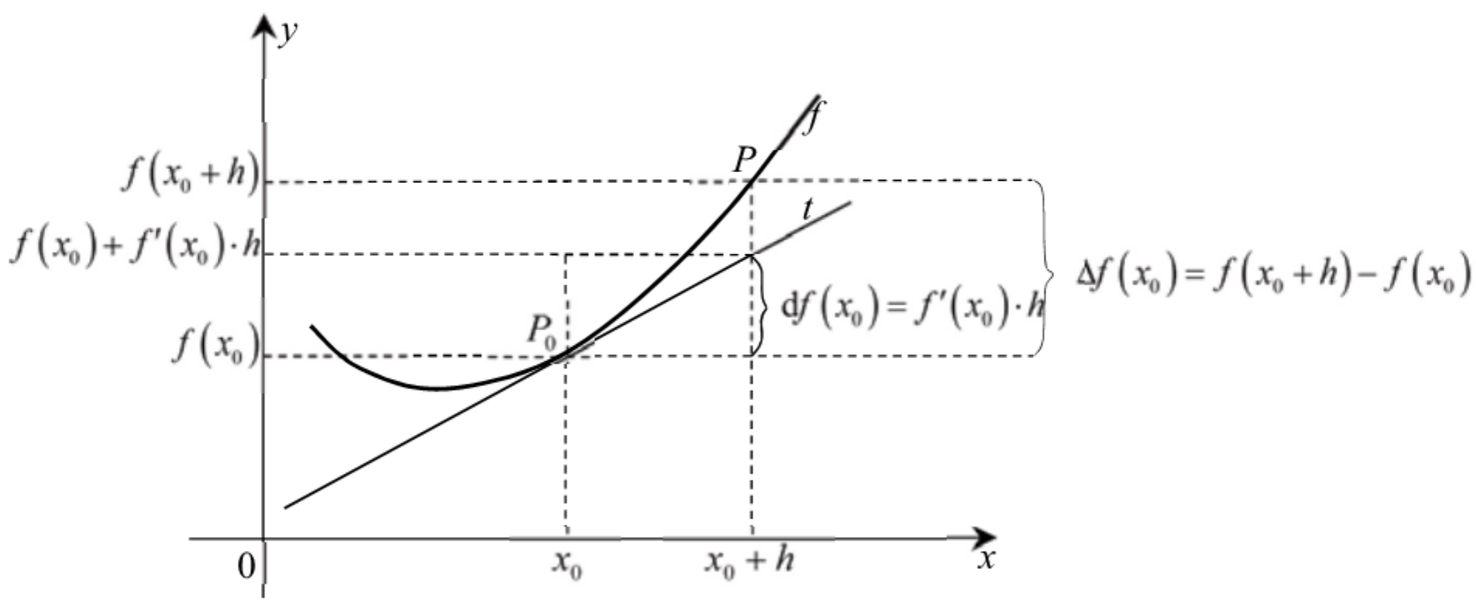
Geometrický význam diferenciálu

Nech funkcia f je diferencovateľná v bode x_0. Potom podľa vety 3.3.1 platí (1). Pretože $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$ pre argument $|h|$ blízky nule, môžeme člen $h\tau(h)$ zanedbať a dostávame

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq f'(x) \cdot h \qquad (4)$$

Potom tento vzťah môžeme využiť na výpočet približnej hodnoty funkčnej hodnoty funkcie v bode x_0

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x) \cdot h \qquad (5)$$



Obr. 3.3.1 Geometrická interpretácia diferenciálu

Zmenou argumentu x z x_0 na x_0+h sa zmení funkčná hodnota funkcie f o $\Delta f(x_0)$, ale funkčná hodnota lineárnej funkcie, ktorej graf je dotyčnica t funkcie f v bode P_0, sa zmení len o $\mathrm{d}f(x_0)$. Pre $|h|$ blízke nule je potom nahradenie prírastku funkcie f v bode x_0 diferenciálom v bode x_0 nahradením grafu funkcie f v okolí bodu x_0 dotyčnicou t. Preto sa vzťah (5) používa na výpočet približných hodnôt funkcie f v okolí bodu x_0.

Príklad 3.3.3 Vypočítajme približnú hodnotu

a) $\sqrt{3,98}$, b) $\ln 1,1$.

Riešenie: a) Na výpočet približných hodnôt použijeme vzťah (5). Číslo $\sqrt{3,98}$ je funkčná hodnota v čísle $3,98$. Teda $f(3,98)=\sqrt{3,98}$. Je zrejmé, že $f(x)=\sqrt{x}$. Potom funkcia, ktorej hodnotu máme v bode $3,98$ vypočítať, je $f: y=\sqrt{x}$. Najbližší bod k bodu $3,98$, ktorého funkčnú hodnotu „vieme“, resp. môžeme vypočítať, je bod $x_0=4$. Potom bod $3,98$ označíme ako x_0+h. Pretože $4+h=3,98$ dostávame $h=-0,02$. Teda

$$f(3,98)\doteq f(4)+f'(4)\cdot(-0,02)$$

pričom $f'(4)=\left[\sqrt{x}\right]'_{x=4}=\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]_{x=4}=\frac{1}{4}$

Potom

$$\sqrt{3,98}\doteq\sqrt{4}+\frac{1}{4}\cdot(-0,02)$$

$$\sqrt{3,98}\doteq 1,995$$

b) Pretože číslo $\ln 1,1$ je funkčná hodnota v čísle $1,1$, t. j. $f(1,1)=\ln 1,1$, tak funkcia, ktorej hodnotu máme v bode $1,1$ vypočítať, je $f: y=\ln x$. Najbližší bod k bodu $1,1$, ktorého funkčnú hodnotu vieme vypočítať, je bod $x_0=1$. Preto $1+h=1,1$, a teda $h=0,1$. Potom

$$f(1,1)\doteq f(1)+f'(1)\cdot 0,1$$

pričom $f'(1)=\left[\ln x\right]'_{x=1}=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=1}=1$

Teda

$$\ln 1,1\doteq \ln 1+1\cdot 0,1$$
$$\ln 1,1\doteq 0+0,1=0,1$$

Príklad 3.3.4 Firma Cargo, s. r. o. realizuje svoju činnosť, vykládku materiálu v tonách, pri funkcii celkových príjmov za mesiac (v stovkách €), $R(x)=40x-0,01x^2$. Vypočítajme

a) presnú zmenu príjmov,
b) približnú zmenu príjmov

tejto firmy, ak vzrastie dopyt po vykládke materiálu za mesiac zo 100 ton o pol tony. Výsledky porovnajme.

Riešenie: a) Označme $x_0=100$ a $h=0,5$

Presnú zmenu určime pomocou prírastku funkcie celkových príjmov

$$\Delta R(x_0) = R(x_0 + h) - R(x_0)$$

Teda

$$\Delta R(100) = R(100 + 0{,}5) - R(100) = R(100{,}5) - R(100) = 18{,}9975$$

b) Približnú zmenu určíme pomocou diferenciálu funkcie celkových príjmov podľa (2)

$$\mathrm{d}R(100) = R'(100) \cdot 0{,}5 = \left[100x - 0{,}01x^2\right]'_{x=100} \cdot 0{,}5 =$$

$$= \left[40 - 0{,}02x\right]_{x=100} \cdot 0{,}5 = 38 \cdot 0{,}5 = 19$$

Ak vzrastie množstvo vyloženého materiálu zo 100 ton o pol tony, tak celkové príjmy firmy vzrastú o 1 899,75 € a približne vzrastú o 1 900 €. Teda platí (4), čiže $\Delta R(100) \doteq \mathrm{d}R(100)$.

Príklad 3.3.5 Firma ponúka dva druhy čističiek odpadových vôd. Náklady spojené s ich prevádzkou sú dané funkciami celkových nákladov

$$C_1(x) = 40\,000 + 12{,}5x - x^2, \qquad C_2(x) = 40\,000 + 10x - 0{,}5x^2$$

Ktorá z čističiek je finančne pre zákazníka výhodnejšia, ak spotreba vody jeho domácnosti v letných mesiacoch je 5 hl a v ostatnej časti roka klesne o **1** hl?

Riešenie: Pretože začiatočné náklady obidvoch čističiek sú rovnaké, 40 000 €, zákazník by sa mohol rozhodnúť na základe priemerných variabilných nákladov. Pre variabilné náklady čističiek platí

$$VC_1(x) = 12{,}5x - x^2 \qquad VC_2(x) = 10x - 0{,}5x^2$$

a preto priemerné variabilné náklady na 1 hl v letných mesiacoch sú

$$\tilde{V}C_1(5) = \frac{VC_1(5)}{5} = \frac{37{,}5}{5} = 7{,}5\ € \qquad \tilde{V}C_2(5) = \frac{VC_2(5)}{5} = \frac{37{,}5}{5} = 7{,}5\ €$$

Pretože priemerné variabilné náklady na 1 hl vyčistenej vody sú pre obe čističky rovnaké, zistíme ako sa zmenia náklady, ak spotreba vody klesne o 1 hl. Budeme počítať $\Delta C_1(5)$ a $\Delta C_2(5)$, pričom využijeme vzťah (1). Namiesto h položíme Δx. V našom prípade $\Delta x = -1$. Potom

$$\Delta C_1(5) \doteq \mathrm{d}C_1(5) = C_1'(5) \cdot (-1) = \left[40000 + 12{,}5x - x^2\right]'_{x=5} \cdot (-1) =$$

$$= \left[12{,}5 - 2x\right]_{x=5} \cdot (-1) = -2{,}5\ €$$

$$\Delta C_2(5) \doteq \mathrm{d}C_2(5) = C_2'(5) \cdot (-1) = \left[40000 + 1x - 0{,}5x^2\right]'_{x=5} \cdot (-1) =$$

$$= \left[10 - x\right]_{x=5} \cdot (-1) = -5\ €$$

Kým pri prvej čističke náklady na čistenie vody v zimných mesiacoch klesnú približne o 2,5 €, pri druhej čističke budú náklady nižšie približne o 5 €. Teda druhá čistička je finančne pre zákazníka výhodnejšia.

ÚLOHY

V nasledujúcich úlohách vypočítajte
a) diferenciál funkcie f,
b) diferenciál funkcie f v bode x_0,
c) diferenciál funkcie f v bode x_0 pre prírastok h.

3.3.1 $f: y = x^3$, $x_0 = 2$, $h = 0{,}1$

3.3.2 $f: y = 2x - x^2$, $x_0 = -1$, $h = 0{,}01$

3.3.3 $f: y = \dfrac{x^2}{x-2}$, $x_0 = 3$, $h = -0{,}03$

4.3.4 $f: y = \sqrt{1-x^2}$, $x_0 = 0$, $h = -0{,}3$

3.3.5 $f: y = 3^{x \ln x}$, $x_0 = 1$, $h = 0{,}2$

3.3.6 $f: y = \arcsin 3x$, $x_0 = 0$, $h = -0{,}5$

V nasledujúcich úlohách vypočítajte diferenciu a diferenciál funkcie f v bode x_0 pre rôzne prírastky h a hodnoty porovnajte. Porovnajte graficky.

3.3.7 $f: y = 4 - x^2$, $x_0 = -2$,
a) $h = 1$ b) $h = 0{,}1$ c) $h = 0{,}01$

3.3.8 $f: y = x^3 - 2x$, $x_0 = 10$,
a) $h = 0{,}09$ b) $h = 0{,}06$ c) $h = 0{,}03$

3.3.9 $f: y = \dfrac{2}{x} + 1$, $x_0 = 1$,
a) $h = 0{,}1$ b) $h = 0{,}01$ c) $h = 0{,}001$

3.3.10 $f: y = \sqrt{2x}$, $x_0 = 8$,
a) $h = 0{,}5$ b) $h = 0{,}4$ c) $h = 0{,}2$

3.3.11 $f: y = \sqrt{3-x}$ $x_0 = 2$
a) $h = 0{,}75$ b) $h = 0{,}36$ c) $h = 0{,}19$

3.3.12 Vypočítajte približné hodnoty:

a) $1{,}02^3$ d) $\sqrt[3]{26}$ g) $\ln 0{,}9$
b) $0{,}97^4$ e) $5^{1{,}001}$ h) $\arcsin 0{,}3$
c) $\sqrt{25{,}5}$ f) $2^{-0{,}98}$ i) $\operatorname{tg} 44^\circ$

3.3.13 Spoločnosť realizuje svoj výrobok na trhu pri funkcii celkových príjmov $R(x) = 12x - 0{,}01x^3$, $0 \le x < 250$, kde x je množstvo predanej produkcie v hektolitroch. Vypočítajte, ako sa približne zmenia príjmy, ak množstvo predanej produkcie vzrastie z 10 hl na 10,2 hl.

3.3.14 Obchodná spoločnosť realizuje svoj výrobok na trhu pri funkcii celkových príjmov $R(x)=0,35x^2$. Pri meraní objemu predanej produkcie x sa dopustila relatívnej chyby $0,25\%$. Vypočítajte, akej relatívnej chyby sa spoločnosť dopustila pri výpočte celkových príjmov.

Výsledky

3.3.1 a) $\mathrm{d}f(x)=3x^2h,\ x\in R$; **b)** $\mathrm{d}f(2)=12h$; **c)** $1,2$

3.3.2 a) $\mathrm{d}f(x)=2(1-x)h,\ x\in R$; **b)** $\mathrm{d}f(-1)=4h$; **c)** $0,04$

3.3.3 a) $\mathrm{d}f(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}h,\ x\neq 2$; **b)** $\mathrm{d}f(3)=-3h$; **c)** $0,09$

3.3.4 a) $\mathrm{d}f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}h,\ x\in(-1;1)$; **b)** $\mathrm{d}f(0)=0$; **c)** 0

3.3.5 a) $\mathrm{d}f(x)=\ln 3\cdot 3^{x\ln x}\cdot(\ln x+1),\ x\in(0;\infty)$; **b)** $\mathrm{d}f(1)=\ln 3\cdot h$; **c)** $\dfrac{\ln 9}{10}$

3.3.6 a) $\mathrm{d}f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}h,\ x\in\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$; **b)** $\mathrm{d}f(0)=3h$; **c)** $-1,5$

3.3.7 a) $\Delta f=3,\ \mathrm{d}f=4$; **b)** $\Delta f=0,39,\ \mathrm{d}f=0,4$; **c)** $\Delta f=0,0399,\ df=0,04$

3.3.8 a) $\Delta f=27,064,\ \mathrm{d}f=26,82$; **b)** $\Delta f=17,988,\ \mathrm{d}f=17,88$; **c)** $\Delta f=8,97,\ \mathrm{d}f=8,94$

3.3.9 a) $\Delta f=-0,\overline{18},\ \mathrm{d}f=-0,2$; **b)** $\Delta f=-0,0198,\ \mathrm{d}f=-0,02$; **c)** $\Delta f=-0,001998,\ \mathrm{d}f=-0,002$

3.3.10 a) $\Delta f=0,123,\ \mathrm{d}f=0,125$; **b)** $\Delta f=0,099,\ \mathrm{d}f=0,1$; **c)** $\Delta f=0,04969,\ \mathrm{d}f=0,05$

3.3.11 a) $\Delta f=-0,5,\ \mathrm{d}f=-0,375$; **b)** $\Delta f=-0,2,\ \mathrm{d}f=-0,18$; **c)** $\Delta f=-0,1,\ \mathrm{d}f=-0,095$

3.3.12 a) $1,06$; **b)** $0,88$; **c)** $5,05$; **d)** $2,96$; **e)** $5,008$; **f)** $0,507$; **g)** $-0,1$; **h)** $0,3$; **i)** $0,975$

3.3.13 celkové príjmy vzrastú približne o 1,8 p. j.

3.3.14 17,5 %

3.4 Monotónnosť funkcie

V tejto podkapitole budeme vyjadrovať monotónnosť funkcie a ukážeme jej význam v marginálnej analýze. Najprv si však uvedieme dôležité vety, ktorých dôsledky nám to umožňujú.

Veta 3.4.1 (Fematova veta) Nech funkcia f nadobúda v nejakom intervale $c \in (a;b)$ maximálnu alebo minimálnu hodnotu a nech existuje $f'(c)$. Potom

$$f'(c) = 0$$

Vety o strednej hodnote diferenciálneho počtu

Veta 3.4.2 (*Rolleho veta*) Nech funkcia f má tieto vlastnosti:

1. je spojitá na intervale $\langle a;b \rangle$,
2. je diferencovateľná na intervale $(a;b)$,
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje aspoň jeden taký bod $c \in (a;b)$, že $f'(c) = 0$.

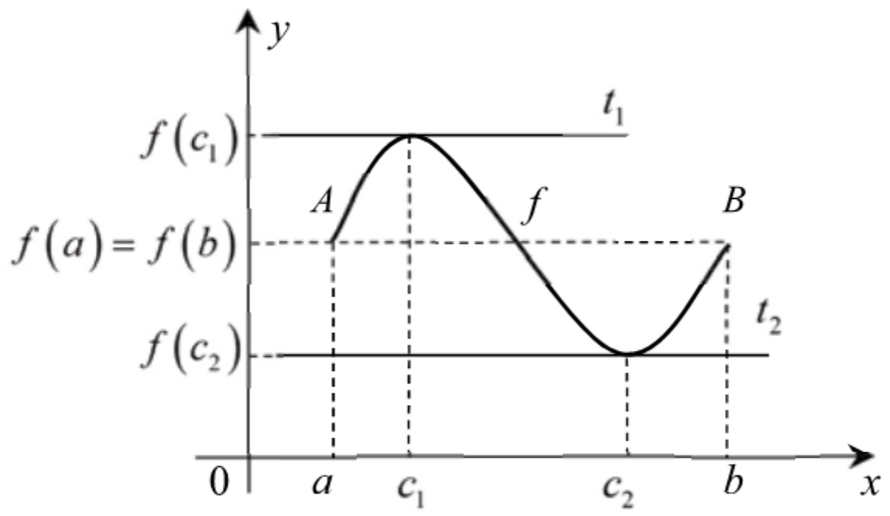
Geometrický význam Rolleho vety

Rolleho veta nehovorí, koľko takýchto bodov existuje. Určuje len, že musí byť aspoň jeden. Ako vidno z obrázku 3.4.1, znázornená funkcia f spĺňa podmienky Rolleho vety. Má dva body, bod c_1 a c_2, v ktorých je prvá derivácia funkcie rovná nule. Znamená to, že graf funkcie f má v bode $[c_1; f(c_1)]$ dotyčnicu t_1 a v bode $[c_2; f(c_2)]$ dotyčnicu t_2, ktoré sú rovnobežné s osou x. Potom pre smernice týchto dotyčníc platí $k = \operatorname{tg}\varphi = 0$ a súčasne z geometrického významu derivácie funkcie v bode platí

$$k = f'(c_1) = f'(c_2)$$

Teda

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$



Obr. 3.4.1 Geometrický význam Rolleho vety

Veta 3.4.3 (*Lagrangeova veta*) Nech funkcia f má tieto vlastnosti:

1. je spojitá na intervale $\langle a;b\rangle$,

2. je diferencovateľná na intervale $(a;b)$,

Potom existuje taký bod $c\in(a;b)$, pre ktorý platí

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{1}$$

resp.

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{2}$$

Poznámka 3.4.1 Lagrangeova veta sa často sa nazýva vetou o prírastku funkcie, pretože rozdiel funkčných hodnôt $f(b)-f(a)$ vo vzťahu (2) je prírastok funkcie . Posledný vzťah sa používa aj na odhad hodnôt funkcie v bode a .

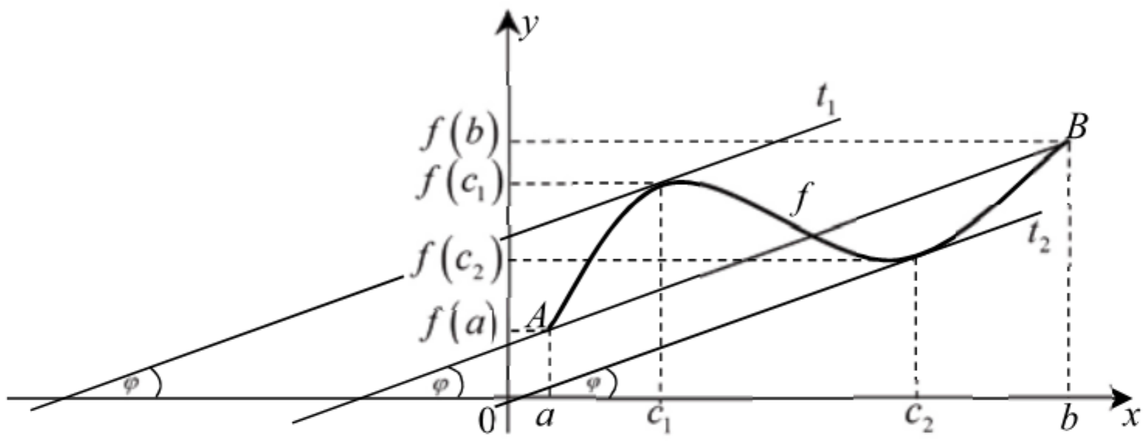
Geometrický význam Lagrangeovej vety

Z obrázku 3.4.2 vidíme, že smernica priamky, ktorá prechádza bodmi $A\left[a;f(a)\right]$ a $B\left[b;f(b)\right]$ je

$$k=\operatorname{tg}\varphi=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Podľa tejto vety existuje aspoň jeden bod $c\in(a;b)$, v našom prípade sú to dva body c_1 a c_2 také, že dotyčnice ku grafu funkcie f, t. j. t_1 a t_2, v bodoch $\left[c_1;f(c_1)\right]$ a $\left[c_2;f(c_2)\right]$ sú rovnobežné s priamkou prechádzajúcou bodmi A a B. Teda majú takú istú smernicu k ako táto priamka. Potom

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c_1) \quad \text{a} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c_2)$$



Obr. 3.4.2 Geometrický význam Lagrangeovej vety

Uvedené vety možno úspešne aplikovať na štúdium priebehu diferencovateľných funkcií. Pri funkciách ekonomickej analýzy je zvlášť dôležité určenie ich miním, maxím, ale aj intervalov monotónnosti. Postupy, ktoré to umožňujú, uvádzame v nasledujúcich vetách.

Veta 3.4.4 (*konštantná funkcia*) Funkcia f je konštantná na intervale $(a;b)$ práve vtedy, ak má na tomto intervale deriváciu a $f'(x)=0$ pre všetky $x\in(a;b)$.

Veta 3.4.5 (*postačujúca podmienka monotónnosti funkcie na intervale*) Nech funkcia f je spojitá na intervale I (konečnom alebo nekonečnom) a nech je v každom vnútornom bode tohto intervalu diferencovateľná. Ak v každom vnútornom bode intervalu I platí:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \\ f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{array}\right\} \text{ tak funkcia } f \text{ je na intervale } I \left\{\begin{array}{l} \text{rastúca} \\ \text{klesajúca} \\ \text{neklesajúca} \\ \text{nerastúca} \end{array}\right. \qquad (4)$$

Príklad 3.4.1 Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f : y = x^3 - 3x\,.$$

Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine R a má na tejto množine deriváciu

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)\cdot(x+1)$$

Podľa vety 3.4.5 budeme hľadať intervaly, na ktorých prvá derivácia nadobúda kladné a záporné hodnoty, t. j. kde

$$3(x-1)(x+1) > 0, \qquad \text{resp.} \qquad 3(x-1)(x+1) < 0$$

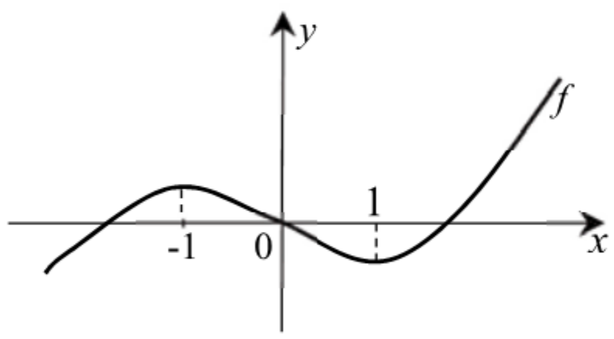
Určíme body, v okolí ktorých f' mení znamienko. Sú to body $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$.

Tieto body rozdelia definičný obor funkcie f na intervaly $(-\infty;-1\rangle$, $\langle -1;1\rangle$, $\langle 1;\infty)$. Zistíme znamienko prvej derivácie vo vnútorných bodoch týchto intervalov, t. j. na intervaloch $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;\infty)$. Použijeme k tomu tabuľkovú metódu.

Tab. 3.4.1

	$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$	$(1;\infty)$
$3(x-1)$	–	–	+
$x+1$	–	+	+
$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$	+	–	+

Funkcia f je spojitá na R, a teda je spojitá aj na intervaloch $(-\infty;-1\rangle$, $\langle -1;1\rangle$, $\langle 1;\infty)$. V každom vnútornom bode intervalov $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;\infty)$ je $f'(x) > 0$ a v každom vnútornom bode intervalu $\langle -1;1\rangle$ je $f'(x) < 0$. Potom podľa vety 3.4.5 je funkcia f na intervaloch $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;\infty)$ rastúca a na intervale $\langle -1;1\rangle$ klesajúca.



Obr. 3.4.3 Monotónnosť funkcie na grafe funkcie $f : y = x^3 - 3x$

Príklad 3.4.2 Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

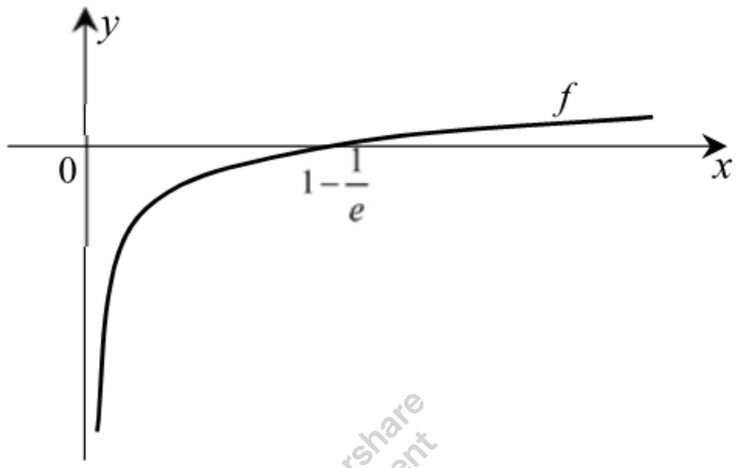
$$f : y = \ln x - \frac{1}{x}.$$

Riešenie: Funkcia f je definovaná na intervale $(0;\infty)$ a má na tomto intervale deriváciu

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x+1}{x^2}$$

Vzhľadom na to, že $x^2 > 0$ pre $x \in (0;\infty)$, znamienko prvej derivácie závisí len od znamienka výrazu $x+1$ a ten je tiež vždy kladný pre $x \in (0;\infty)$.

Je teda zrejmé, že prvá derivácia nadobúda na tomto intervale iba kladné, hodnoty. Keďže funkcia f je na intervale $(0;\infty)$ spojitá a v každom vnútornom bode tohto intervalu je $f'(x) > 0$, podľa vety 3.4.5 je funkcia f na intervale $(0;\infty)$, a teda na definičnom obore rastúca.



Obr. 3.4.4 Monotónnosť funkcie na grafe funkcie $f : y = \ln x - \frac{1}{x}$

Príklad 3.4.3 Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f : y = 4 + 20x^3 - 3x^5.$$

Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine R a existuje derivácia tejto funkcie na R

$$f'(x) = 60x^2 - 15x^4 = 15x^2 \cdot (4 - x^2) = 15x^2 \cdot (2+x) \cdot (2-x)$$

Budeme hľadať intervaly, na ktorých je

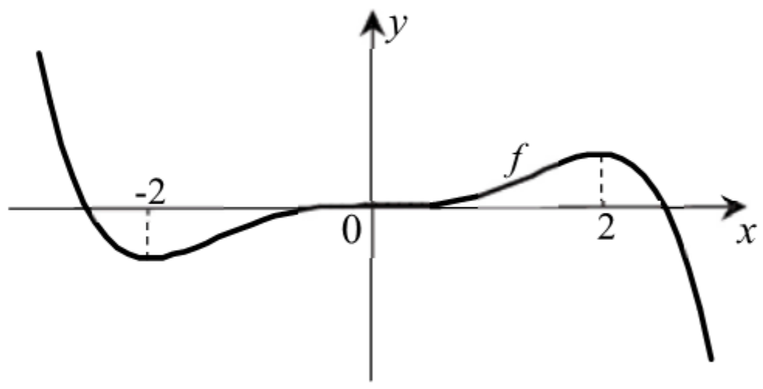
$$15x^2 \cdot (2+x) \cdot (2-x) > 0 \qquad \text{resp.} \quad 15x^2 \cdot (2+x) \cdot (2-x) < 0$$

Znamienko prvej derivácie sa môže meniť v okoliach bodov $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. To znamená, že tieto body rozdelia definičný obor funkcie f na intervaly $(-\infty;-2\rangle$, $\langle -2;0\rangle$, $\langle 0;2\rangle$, $\langle 2;\infty)$ a na týchto intervaloch budeme zisťovať znamienko prvej derivácie vo vnútorných bodoch tabuľkovou metódou .

Tab. 3.4.2

	$(-\infty;-2)$	$(-2;0)$	$(0;2)$	$(2;\infty)$
$15x^2$	+	+	+	+
$2-x$	+	+	+	−
$2+x$	−	+	+	+
$f'(x) = 15x^2 \cdot (2-x) \cdot (2+x)$	−	+	+	−

Funkcia f je spojitá na intervaloch $\langle -\infty;-2\rangle$, $\langle -2;0\rangle$, $\langle 0;2\rangle$, $\langle 2;\infty\rangle$. V každom vnútornom bode intervalov $\langle -\infty;-2\rangle$, $\langle 2;\infty\rangle$ je $f'(x)<0$, a teda podľa vety 3.4.5 je funkcia f na intervaloch $\langle -\infty;-2\rangle$, $\langle 2;\infty\rangle$ klesajúca. V každom vnútornom bode intervalov $\langle -2;0\rangle$, $\langle 0;2\rangle$ je $f'(x)>0$ a v bode v bode 0 existuje derivácia $f'(0)$, teda funkcia f je na intervale $\langle -2;2\rangle$ rastúca.



Obr. 3.4.5 Monotónnosť funkcie na grafe funkcie $f: y = 4 + 20x^3 - 3x^5$

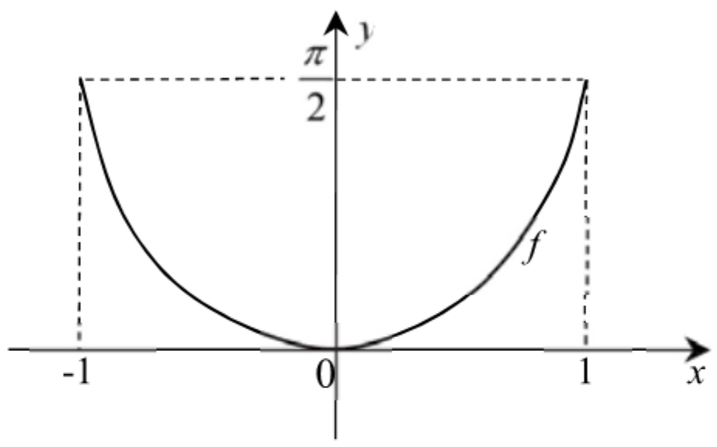
Príklad 3.4.4 Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f: y = \arcsin x^2.$$

Riešenie: Funkcia f je definovaná na intervale $\langle -1;1\rangle$ a má deriváciu

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \text{ pre } x \in (-1;1)$$

Zistíme body, v okolí ktorých by derivácia danej funkcie mohla meniť znamienko. Vzhľadom na to, že výraz $\sqrt{1-x^4}$ je pre $x \in (-1;1)$ vždy kladný, znamienko prvej derivácie závisí len od znamienka čitateľa. Podľa vety 3.4.5 budeme riešiť nerovnice $f'(x)>0$, resp. $f'(x)<0$. Teda $2x>0$ pre $x \in (-1;0)$ a $2x<0$ pre $x \in (0;1)$. Keďže funkcia f je spojitá na intervaloch $\langle -1;0\rangle$, $\langle 0;1\rangle$ a v každom vnútornom bode intervalu $\langle 0;1\rangle$ je $f'(x)>0$ a v každom vnútornom bode intervalu $\langle -1;0\rangle$ je $f'(x)<0$, podľa vety 3.4.5 je funkcia na intervale $\langle 0;1\rangle$ rastúca a na intervale $\langle -1;0\rangle$ klesajúca.



Obr. 3.4.6 Monotónnosť funkcie na grafe funkcie $f: y = \arcsin x^2$

Príklad 3.4.5 Zistime, dokedy je výhodné zvyšovať výrobu a predaj nejakého tovaru T, ak funkcia celkových ziskov pre tento tovar je

$$P(x) = -0,5x^2 + 60x - 800,\ 0 \le x < 70$$

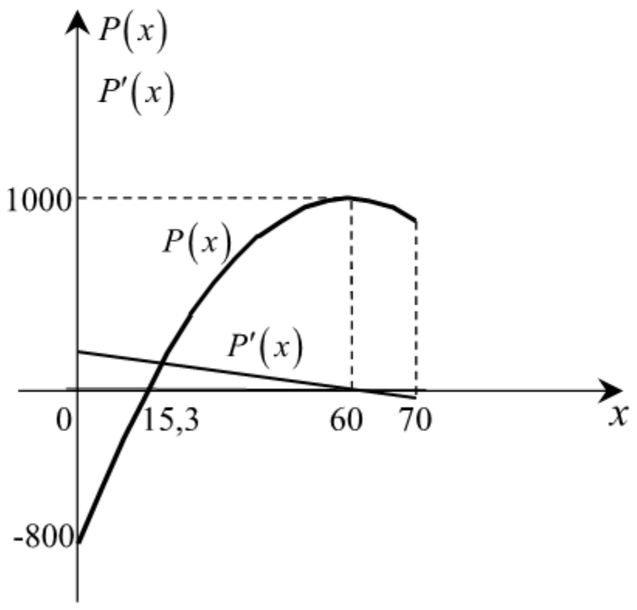
a ekonomicky interpretujme. Zobrazíme graf funkcií $P(x)$ a $P'(x)$.

Riešenie: Nájdeme intervaly, kde zvýšenie produkcie a jej predaj spôsobí rast a kde pokles celkových ziskov. Pretože

$$P'(x) = -x + 60$$

riešením nerovnice $P'(x) > 0$ dostaneme, že funkcia ziskov je rastúca na intervale $\langle 0;60 \rangle$. Z toho zároveň dostávame, že $P'(x) < 0$ na intervale $\langle 60;70 \rangle$. Teda ak by sme zvýšili úroveň z $x_0 = 60$ na viac, funkcia celkových ziskov $P(x)$ by začala klesať.

Preto je teoreticky výhodné zvyšovať produkciu a jej predaj z úrovne $x_0 \in \langle 0;60 \rangle$.



Obr. 3.4.7 Graf funkcií $P(x) = -0{,}005x^2 + 3x - 200$ a $P'(x) = -0{,}01x + 3$

Ako vidno z obrázku 3.4.5, skutočne, po bod $x_0 = 60$, kde derivácia $P'(x)$ nadobúda kladné hodnoty, funkcia $P(x)$ má rastúci priebeh a kde $P'(x)$ nadobúda záporné hodnoty, funkcia $P(x)$ má klesajúci priebeh.

ÚLOHY

3.4.1 Nájdite intervaly rýdzo monotónnosti funkcie f.

a) $f : y = 2x^2 + x - 6$

b) $f : y = x^3 - 27x$

c) $f : y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

d) $f : y = 1 - 12x - 9x^2 - 2x^3$

e) $f : y = 3 - 2x^2 + 4x^4$

f) $f : y = (x+2)^4 \cdot (1-x)^3$

g) $f : y = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 1$

h) $f : y = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5}$

3.4.2 Nájdite intervaly rýdzo monotónnosti funkcie f.

a) $f : y = \frac{2}{x^2 + 1}$

b) $f : y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

f) $f : y = \frac{x^2}{2 - x}$

g) $f : y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$

c) $f: y = \dfrac{2}{1-x^2}$

d) $f: y = \dfrac{x-1}{x^2}$

e) $f: y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}$

h) $f: y = \dfrac{x^3}{x^3+1}$

i) $f: y = x + \dfrac{x}{x^2-1}$

j) $f: y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

3.4.3 Nájdite intervaly rýdzo monotónnosti funkcie f.

a) $f: y = \sqrt{1-x}$

b) $f: y = \sqrt[3]{(x+2)^2}$

c) $f: y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

d) $f: y = (x-3)\sqrt{x}$

e) $f: y = x\sqrt{1-x}$

f) $f: y = x\sqrt{1+x^2}$

g) $f: y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$

h) $f: y = x \cdot \sqrt{4-x^2}$

i) $f: y = \dfrac{2}{3}x + \sqrt[3]{x^2}$

j) $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{(1-x)^2}$

3.4.4 Nájdite intervaly rýdzo monotónnosti funkcie f.

a) $f: y = x + e^{-x}$

b) $f: y = 2^{x^2-6x+2}$

c) $f: y = \dfrac{e^{2x-x^2}}{2}$

d) $f: y = x \cdot e^x$

e) $f: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

f) $f: y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

g) $f: y = (1+x^2) \cdot e^{-x^2}$

h) $f: y = \dfrac{e^x}{x+1}$

3.4.5 Nájdite intervaly rýdzo monotónnosti funkcie f.

a) $f: y = x - 2\ln x$

b) $f: y = 2x^2 - \ln x$

c) $f: y = \ln(1-x)$

d) $f: y = \ln(x^2-4)$

e) $f: y = x \cdot \ln x$

f) $f: y = \dfrac{\ln x}{x}$

g) $f: y = \dfrac{\ln(3-x)}{3-x}$

h) $f: y = \ln\dfrac{x+2}{2-x}$

i) $f: y = \dfrac{2}{x} + \ln x^2$

j) $f: y = \dfrac{x}{\ln x}$

3.4.6 Nájdite intervaly rýdzo monotónnosti funkcie f.

a) $f: y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

b) $f: y = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$

c) $f: y = \operatorname{arcotg} x^2$

d) $f: y = 4\operatorname{arcotg}\frac{2}{x} - x$

e) $f: y = \arcsin x - x$

f) $f: y = \arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{x}$

3.4.7 Nájdite intervaly monotónnosti funkcie f.

a) $f: y = |x-1| - x$

b) $f: y = |x+2| + |x-3|$

c) $f: y = |x| - |x+3|$

d) $f: y = x^2 - 1 - |x^2 - 1|$

3.4.8 Dokážte, že funkcia f je na danom intervale rýdzo monotónna.

a) $f: y = \operatorname{cotg} x + 2\cos x$, $x \in (0;\pi)$

b) $f: y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

c) $f: y = 2^{\cos x}$, $x \in (0;\pi)$

3.4.9 Daná je funkcia celkových nákladov. Určite interval, na ktorom je funkcia priemerných nákladov klesajúca.

a) $C(x) = 0{,}01x^2 + 10x + 100$

b) $C(x) = 0{,}0625x^3 + 3x + 64$

c) $C(x) = e^{0{,}05x}$

d) $C(x) = \left(0{,}05x + e^{-0{,}05x+3}\right)x$, $x \geq 10$

3.4.10 Zistite, dokedy je teoreticky výhodné ďalej zvyšovať úroveň produkcie a jej predaj, ak funkcia celkových ziskov P je:

a) $P(x) = 4 + 0{,}001x$

b) $P(x) = 80x - x^2 - 1000$

c) $P(x) = 5x - 150 - 0{,}02x^2$

d) $P(x) = -x^3 + 10{,}5x^2 + 90x - 300$

3.4.11 Zistite, pre aké p je daná funkcia dopytovou funkciou.

a) $q = \sqrt{270 - 5p}$

b) $q = \frac{10p + 125}{p + 5}$

c) $q = \left(\frac{27 - p}{3}\right)^2$

d) $q = 3\ln\left(\frac{50}{p-2}\right)$

e) $q = 40e^{-0{,}2p} - 5$

f) $q = 7(6 - \sqrt{p^2 + 11})$

Výsledky

3.4.1 a) klesajúca na $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right\rangle$; rastúca na $\left\langle-\frac{1}{4};\infty\right)$; **b)** klesajúca na $\langle -3;3\rangle$; rastúca na $(-\infty;-3\rangle$, $\langle 3;\infty)$; **c)** klesajúca na $\left\langle -1;\frac{1}{2}\right\rangle$; rastúca na $(-\infty;-1\rangle$, $\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$; **d)** klesajúca na $(-\infty;-2\rangle$, $\langle -1;\infty)$; rastúca na $\langle -2;-1\rangle$; **e)** klesajúca na $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left\langle 0;\frac{1}{2}\right\rangle$; rastúca na $\left\langle-\frac{1}{2};0\right\rangle$, $\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$; **f)** klesajúca na $(-\infty;-2\rangle$, $\left\langle-\frac{2}{7};\infty\right)$; rastúca na $\left\langle -2;-\frac{2}{7}\right\rangle$; **g)** klesajúca na $\langle -2;2\rangle$; rastúca na $(-\infty;-2\rangle$, $\langle 2;\infty)$; **g)** klesajúca na $(-\infty;-1\rangle$; rastúca na $\langle -1;\infty)$

3.4.2 a) klesajúca na $\langle 0;\infty)$; rastúca na $(-\infty;0\rangle$; **b)** klesajúca na $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;\infty)$; rastúca na $\langle -1;1\rangle$; **c)** klesajúca na $(-\infty;-1)$, $(-1;0\rangle$; rastúca na $\langle 0;1)$, $(1;\infty)$; **d)** klesajúca na $(-\infty;0)$, $\langle 2;\infty)$; rastúca na $(0;2\rangle$; **e)** klesajúca na $\langle -2;0)$, $(0;2\rangle$; rastúca na $(-\infty;-2\rangle$, $\langle 2;\infty)$; **f)** klesajúca na $(-\infty;0\rangle$, $\langle 4;\infty)$; rastúca na $\langle 0;2)$, $(2;4\rangle$; **g)** klesajúca na $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;\infty)$; rastúca na $\langle -1;1\rangle$; **h)** rastúca na $(-\infty;-1)$, $(-1;\infty)$; **i)** klesajúca na $\langle -\sqrt{3};-1)$, $(-1;1)$, $(1;\sqrt{3}\rangle$; rastúca na $(-\infty;-\sqrt{3}\rangle$, $\langle\sqrt{3};\infty)$; **j)** klesajúca na $(1;5\rangle$; rastúca na $(-\infty;1)$, $\langle 5;\infty)$

3.4.3 a) klesajúca na $(-\infty;1\rangle$; **b)** klesajúca na $(-\infty;-2\rangle$; rastúca na $\langle -2;\infty)$; **c)** rastúca na $\langle -1;1)$; **d)** klesajúca na $\langle 0;1\rangle$; rastúca na $\langle 1;\infty)$; **e)** klesajúca na $\left\langle\frac{2}{3};1\right\rangle$; rastúca na $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right\rangle$; **f)** rastúca na $(-\infty;\infty)$; **g)** klesajúca na $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right\rangle$; rastúca na $\left\langle-\frac{1}{3};\infty\right)$; **h)** klesajúca na $\langle -2;-\sqrt{2}\rangle$, $\langle\sqrt{2};2\rangle$; rastúca na $\langle -\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$; i) klesajúca na $\langle -1;0\rangle$; rastúca na $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 0;\infty)$; j) klesajúca na $\langle 1;2\rangle$; rastúca na $(-\infty;1\rangle$, $\langle 2;\infty)$

3.4.4 a) klesajúca na $(-\infty;0\rangle$; rastúca na $\langle 0;\infty)$; **b)** klesajúca na $(-\infty;3\rangle$; rastúca na $\langle 3;\infty)$; **c)** klesajúca na $\langle 1;\infty)$; rastúca na $(-\infty;1\rangle$; **d)** klesajúca na $(-\infty;-1\rangle$; rastúca na $\langle -1;\infty)$; **e)** klesajúca na $(0;1\rangle$; rastúca na $(-\infty;0)$, $\langle 1;\infty)$; **f)** klesajúca na $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;\infty)$; rastúca na $\langle -1;1\rangle$; **g)** klesajúca na $\langle 0;\infty)$; rastúca na $(-\infty;0\rangle$; **h)** klesajúca na $(-\infty;-1)$, $(-1;0\rangle$; rastúca na $\langle 0;\infty)$

3.4.5 a) klesajúca na $(0;2\rangle$; rastúca na $\langle 2;\infty)$; **b)** klesajúca na $\left(0;\frac{1}{2}\right\rangle$; rastúca na $\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$; **c)** klesajúca na $(-\infty;1)$; **d)** klesajúca na $(-\infty;-2)$; rastúca na $(2;\infty)$; **e)** klesajúca na $\left(0;\frac{1}{e}\right\rangle$; rastúca na $\left\langle\frac{1}{e};\infty\right)$; **f)** klesajúca na $\langle e;\infty)$; rastúca na $(0;e\rangle$; **g)** klesajúca na

$\langle 3-e;3)$; rastúca na $(-\infty;3-e\rangle$; **h)** rastúca na $(-2;2)$; **i)** klesajúca na $(-\infty;0)$, $(0;1\rangle$; rastúca na $\langle 1;\infty)$; **j)** klesajúca na $(0;1)$, $(1;e\rangle$; rastúca na $\langle e;\infty)$

3.4.6 a) klesajúca na $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$; **b)** klesajúca na $\langle -1;1\rangle$; rastúca na $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;\infty)$; **c)** klesajúca na $\langle 0;\infty)$; rastúca na $(-\infty;0\rangle$; **d)** klesajúca na $(-\infty;-2\rangle$, $\langle 2;\infty)$; rastúca na $\langle -2;0)$, $(0;2\rangle$; **e)** rastúca na $\langle -1;1\rangle$; **f)** rastúca na $(-\infty;-1\rangle;\langle 1;\infty)$

3.4.7 a) klesajúca na $(-\infty;1\rangle$; konštantná na $\langle 1;\infty)$; nerastúca na $(-\infty;\infty)$; **b)** klesajúca na $(-\infty;-2\rangle$; rastúca na $\langle 3;\infty)$; konštantná na $\langle -2;3\rangle$; nerastúca na $(-\infty;3\rangle$; neklesajúca na $\langle -2;\infty)$; **c)** klesajúca na $\langle -3;0\rangle$; konštantná na $(-\infty;-3\rangle,\langle 0;\infty)$; nerastúca na $(-\infty;\infty)$; **d)** klesajúca na $\langle -1;0\rangle$; rastúca na $\langle 0;1\rangle$; konštantná na $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;\infty)$; nerastúca na $(-\infty;0\rangle$; neklesajúca na $\langle 0;\infty)$

3.4.8 a) klesajúca; **b)** rastúca; **c)** klesajúca

3.4.9 a) $\langle 0;100)$; **b)** $\langle 0;8)$; **c)** $\langle 0;20)$; **d)** $\langle 10;60)$

3.8.10 a) $x_0 \in \langle 0;\infty)$; **b)** $x_0 \in \langle 0;40)$; **c)** $x_0 \in \langle 0;125)$; **d)** $x_0 \in \langle 0;10)$

3.4.11 a) $p \in (0;54)$; **b)** $p > 0$; **c)** $p \in (0;27)$; **d)** $p \in (2;52)$; **e)** $p \in (0;5\ln 8)$; **f)** $p \in (0;5)$

Wondershare PDFelement

3.5 Marginálne veličiny. Elasticita funkcie

Použitie diferenciálneho počtu v ekonomickej analýze je nesporné. Ekonomický subjekt nezaujíma len doterajší objem jeho činnosti, ale tiež či je ešte ekonomicky výhodné tento objem zväčšiť, resp. zmenšiť. Vypovedajú o tom nielen priemerné veličiny (viď kapitolu 1), ale i marginálne veličiny a elasticita funkcie.

Označme

$$TV = f(x)$$

kde TV je ľubovoľná celková veličina (total value), napr. celkové náklady, celkové príjmy, dopyt, atď. (viď kapitolu 1 – ekonomické funkcie), ktorej veľkosť závisí od veľkosti nezávislej veličiny x predstavujúcej určitý objem činnosti.

Definícia 3.5.1 ***Marginálnou veličinou MV*** (marginal value) vzhľadom na premenlivý objem činnosti x nazývame ***prírastok veličiny TV pripadajúci na jednotkový prírastok objemu činnosti x***, t. j.

$$MV = \frac{\Delta TV}{\Delta x} \qquad \text{resp.} \quad MV = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

Poznámka 3.5.1 V ekonomickej analýze sa niekedy namiesto pojmu marginálna veličina používa pojem hraničná veličina. Vzťah (1) sa v ekonomickej analýze v bode x_0 interpretuje nasledovne:

$$MV(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \tag{2}$$

Ak je funkcia f diferencovateľná na $M \subset \langle 0; \infty)$, tak pre dostatočne malé $|\Delta x|$, resp. pre $\Delta x = -h$ je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \tag{3}$$

Porovnaním vzťahov (2) a (3) potom dostaneme

$$MV(x_0) \doteq f'(x_0) \tag{4}$$

Poznámka 3.5.2 Vzťah (4) sa považuje za aproximáciu vzťahu (1). Vyjadruje približnú zmenu, ak sa zmení argument o jednotku.

Príklad 3.5.1 Spoločnosť realizuje výrobok na trhu pri týchto funkciách celkových nákladov a príjmov:

$$C(x) = 250 + 5x - 0,02x^2 \qquad x \le 125$$

$$R(x) = 7x - 0,01x^2, \qquad x \le 125$$

Vypočítajme hodnotu marginálnych nákladov, príjmov a ziskov pre úroveň produkcie $x = 100$ a hodnoty ekonomicky interpretujte.

Riešenie: Určíme funkciu celkových ziskov

$$P(x) = R(x) - C(x) = 0{,}01x^2 + 2x - 250$$

Funkcie $C(x)$, $R(x)$, $P(x)$ sú na svojich definičných oboroch diferencovateľné, preto môžeme použiť vzťah (4) a vypočítať marginálne funkcie a hodnoty pre $x = 100$

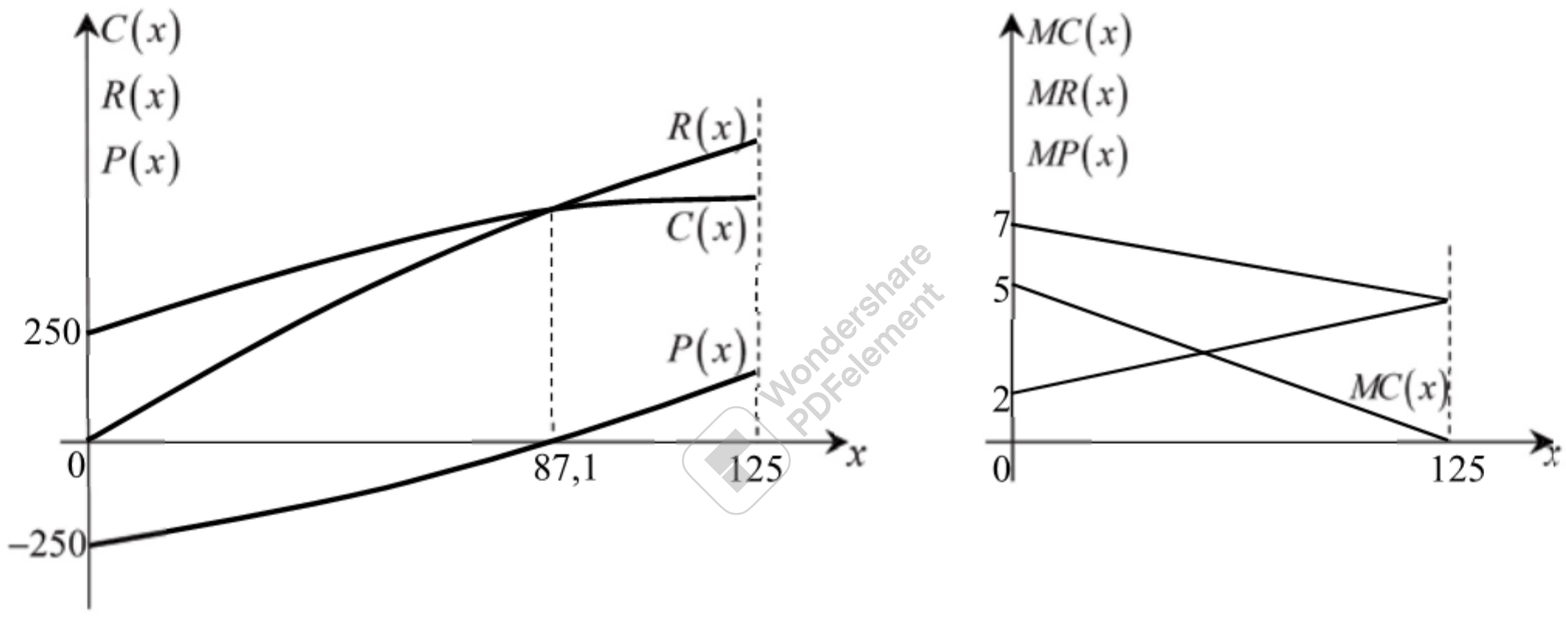
$$MC(x) = C'(x) = 5 - 0{,}04x \quad \Rightarrow \quad MC(100) = 5 - 0{,}04 \cdot 100 = 1$$

$$MR(x) = R'(x) = 7 - 0{,}02x \quad \Rightarrow \quad MR(100) = 7 - 0{,}02 \cdot 100 = 5$$

$$MP(x) = P'(x) = 0{,}02x + 2 \quad \Rightarrow \quad MP(100) = 0{,}02 \cdot 100 + 2 = 4$$

Funkcie $C(x)$, $R(x)$, $P(x)$ sú rastúce, preto pri zvýšení (znížení)

- produkcie zo 100 na 101 (zo 100 na 99), celkové príjmy vzrastú (klesnú) približne o 1 p. j.,
- predaja produkcie zo 100 na 101 (zo 100 na 99) celkové príjmy vzrastú (klesnú) približne o 5 p. j.,
- produkcie a jej predaja zo 100 na 101 (zo 100 na 99) celkové zisky vzrastú (klesnú) približne o 4 p. j.



Obr. 3.5.1 Grafy funkcií $C(x)$, $R(x)$, $P(x)$, $MC(x)$, $MR(x)$ a $MP(x)$

Z predchádzajúcich obrázkov vidno, že funkcie $C(x)$, $R(x)$, $P(x)$ sú pre $x \le 125$ rastúce, a kým $MC(x)$, $MR(x)$ sú klesajúce marginálne funkcie, tak $MP(x)$ je rastúca marginálna funkcia. To znamená, že napr. pre funkciu celkových nákladov zvýšenie produkcie z x_1 na $x_1 + 1$ si vyžiada vyššie náklady ako zvýšenie produkcie z x_2 na $x_2 + 1$, t. j. pri zvyšovaní výroby náklady na každú ďalšiu vyrobenú jednotku produkcie klesajú. Pre funkciu celkových ziskov môžeme tvrdiť, že vzhľadom na to, že $P(x)$ a $MP(x)$ sú rastúce, tak zvýšením produkcie a predaja z x_1 na $x_1 + 1$ sa dosiahnu nižšie zisky ako zvýšením produkcie a predaja z x_2 na $x_2 + 1$, t. j. pri zvyšovaní produkcie a predaja zisk na každú ďalšiu vyrobenú a predanú jednotku produkcie rastie.

Príklad 3.5.2 Daná je funkcia dopytu d, kde p je cena za jednotku produkcie a q je množstvo požadovanej produkcie. Vypočítajme marginálny dopyt pre jednotkovú cenu p a ekonomicky interpretujme.

a) $d : q = 180 - 3p$, $p = 10$, b) $d : q = 20\sqrt{300 - 3p}$, $p = 25$.

Riešenie: a) Určíme definičný obor dopytovej funkcie. Pretože dopyt zaniká pri cene $p = 100$, funkcia dopytu je teda definovaná na intervale $\langle 0;60\rangle$ a má na tomto intervale deriváciu $d'(p)$. Potom

$$Md(p) = d'(p) = -3$$

Zvýšenie (zníženie) ceny p o 1 jednotku, t. j. 10 na 11 (z 10 na 9) spôsobí približné zníženie (zvýšenie) dopytu o 3 jednotky produkcie.

Pretože funkcia marginálneho dopytu je konštantná, zvýšenie, resp. zníženie ceny z ktorejkoľvek úrovne spôsobí približnú zmenu dopytu vždy o 3 jednotky produkcie.

b) Funkcia dopytu je definovaná a diferencovateľná na intervale $\langle 0;100\rangle$.

$$Md(p) = d'(p) = 20 \cdot \frac{1}{2\sqrt{300-3p}} \cdot (-3) = -\frac{30}{\sqrt{300-3p}} \quad \Rightarrow \quad d'(25) = -2$$

Pri zvýšení (znížení) ceny p o 1 jednotku produkcie z 25 p. j. na 26 p. j. (z 25 p. j. na 24 p. j.) dopyt klesne (vzrastie) približne o 2 jednotky produkcie.

Definícia 3.5.2 Nech funkcia f je definovaná na intervale I a nech $f(x_0) > 0$ v každom bode intervalu *I*. Ak existuje derivácia $f'(x_0)$, tak číslo

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

nazývame ***relatívnou zmenou funkcie*** $f(x)$ ***v bode*** x_0.

Elasticita funkcie

Nech funkcia f má v každom bode $x_0 \in (0;\infty)$ deriváciu $f'(x_0)$ a nech $f(x_0) > 0$ pre $x_0 \in (0;\infty)$. Vieme, že pre dostatočne malé $|h|$ platí (viď kapitola 3.3 vzťah (4))

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq f'(x_0)h$$

Položme v tomto vzťahu $h = \frac{x_0}{100}$, čo vyjadruje zmenu premennej x_0 o 1 %, a vynásobme ho hodnotou $\frac{100}{f(x_0)}$. Potom dostávame vzťah

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{x_0}{100}\right) - f(x_0)}{f(x_0)} \cdot 100 \doteq \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 \qquad (5)$$

Ľavá strana vzťahu (5) vyjadruje, o koľko percent sa zmení funkčná hodnota funkcie f, ak hodnota x_0 vrastie o 1 % a aproximuje sa približnou zmenou, ktorá je vyjadrená pravou stranou daného vzťahu.

Číslo na pravej strane vzťahu (5) označíme $\eta\left(f\left(x_0\right)\right)$ a nazveme ***elasticitou funkcie*** $f\left(x\right)$ ***v bode*** x_0 a funkciu $\eta\left(f\left(x\right)\right)$ nazveme ***elasticitou funkcie*** f, pričom platí

$$\eta\left(f\left(x_0\right)\right)=\frac{f'\left(x_0\right)}{f\left(x_0\right)}\cdot x_0, \qquad \eta\left(f\left(x\right)\right)=\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\cdot x \tag{6}$$

Poznámka 3.5.3 Znamienko čísla $\eta\left(f\left(x_0\right)\right)$ závisí iba od znamienka $f'\left(x_0\right)$. A teda je zrejmé, že

- ak $\eta\left(f\left(x_0\right)\right)>0$, potom nárast (pokles) hodnoty x z x_0 o 1 % spôsobí nárast (pokles) funkčnej hodnoty funkcie f približne o $\eta\left(f\left(x_0\right)\right)$ % a
- ak $\eta\left(f\left(x_0\right)\right)<0$, potom nárast (pokles) hodnoty x z x_0 o 1 % spôsobí pokles (nárast) funkčnej hodnoty funkcie f približne o $\eta\left(f\left(x_0\right)\right)$ %.

Príklad 3.5.3 Vypočítajme elasticitu nákladovej funkcie

$$C\left(x\right)=50e^{0,05x}$$

pre objem produkcie $x=100$ a hodnotu ekonomicky interpretujme.

Riešenie: Použijeme jeden zo vzťahov (6) pre funkciu celkových nákladov $C\left(x\right)$, preto píšeme

$$\eta\left(C\left(x_0\right)\right)=\frac{C'\left(x_0\right)}{C\left(x_0\right)}\cdot x_0$$

Funkcia $C\left(x\right)$ je definovaná a diferencovateľná na intervale $\left(0;\infty\right)$. Potom

$$C'\left(x\right)=50\cdot 0,05\cdot e^{0,05x}=2,5\cdot e^{0,05x}$$

Dosadením za $x_0=100$ do posledného vzťahu dostaneme

$$\eta\left(C\left(100\right)\right)=\frac{C'\left(100\right)}{C\left(100\right)}\cdot 100=\frac{2,5e^5}{50e^5}\cdot 100=5$$

Funkcia $C\left(x\right)$ je na $\left(0;\infty\right)$ rastúca, a teda ak vrastie (poklesne) objem produkcie zo 100 jednotiek o 1 %, tak náklady vzrastú (poklesnú) približne o 5 %.

Elasticita dopytu

Špeciálnym prípadom elasticity funkcie je elasticita dopytu.

Nech $q=d(p)$ je dopytová funkcia, kde p je cena za jednotku produkcie a q je množstvo požadovanej produkcie na trhu. Keďže dopytová funkcia je klesajúca, za predpokladu, že existuje $d'\left(p_0\right)$, platí $\eta\left(d\left(p_0\right)\right)<0$. V ekonomickej analýze sa pri interpretácii elasticity dopytu používa kladná hodnota elasticity.

Potom ***elasticita dopytu*** η_d sa vypočíta podľa vzťahu

$$\eta_d = -\frac{d'(p_0)}{d(p_0)} \cdot p_0, \qquad \text{resp.} \quad \eta_d = -\frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} \tag{7}$$

a vyjadruje, ako sa približne zmení dopyt po požadovanej produkcii, ak sa cena za jednotku produkcie zmení z p_0 o 1 %. Teda,

- ak cena klesne z p_0 o 1 %, tak dopyt vzrastie približne o η_d % a
- ak cena vzrastie z p_0 o 1 %, tak dopyt klesne približne o η_d %.

Poznámka 3.5.4 Pretože pre funkciu celkových príjmov platí

$$R(p) = p \cdot q$$

vieme určiť ***vplyv cenovej elasticity na celkové príjmy***.

Ak existuje $R'(p)$, potom

$$R'(p) = (p \cdot q)' = \frac{dp}{dp} \cdot q + p \cdot \frac{dq}{dp} = q \cdot \left(1 + \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}\right) = q \cdot (1 - \eta_d)$$

a platí:

Ak $\eta_d = 1$, potom $R'(p) = 0$, teda $R(p)$ je konštantná a zmena ceny jednotky produkcie o 1 % nemá vplyv na celkové príjmy.

Ak $\eta_d < 1$, potom $R'(p) > 0$, teda $R(p)$ je rastúca a vzrast (pokles) ceny jednotky produkcie p o 1 % spôsobí vzrast (pokles) celkových príjmov. Hovoríme o **neelastickom dopyte**.

Ak $\eta_d > 1$, potom $R'(p) < 0$, teda $R(p)$ je klesajúca a vzrast (pokles) ceny jednotky produkcie o 1 % spôsobí pokles (vzrast) celkových príjmov. Hovoríme o **elastickom dopyte**.

Príklad 3.5.4 Dopyt v predajni Ovohit po ovocnej zmrzline Ovo počas letnej sezóny za jeden mesiac je daný dopytovou funkciou

$$q = \frac{72}{p+3} - 4$$

kde p je cena zmrzliny v € za jedno balenie a q je množstvo požadovanej zmrzliny v kusoch. Vypočítajme, ako sa približne zmení dopyt po zmrzline Ovo, ak cena jedného kusu vzrastie z 3 € o 1 % a zistime, aký vplyv má 1 %-ný nárast ceny z úrovne 3 € na príjmy predajne Ovohit pri predaji zmrzliny Ovo.

Riešenie: Približnú zmenu dopytu pri náraste ceny z úrovne p o 1 % vypočítame podľa vzťahu (7). Pretože existuje derivácia $\frac{dq}{dp}$, dostaneme

$$\eta_d = -\left(-\frac{72}{(p+3)^2} \cdot \frac{p}{\frac{72}{p+3} - 4}\right) = \frac{18p}{(p+3)\cdot(15-p)}$$

Potom pre cenu $p = 3$ € dostávame, že

$$\eta_d = \frac{18 \cdot 3}{6 \cdot 12} = 0{,}75$$

Ak cena zmrzliny Ovo vzrastie z ceny 3 € o 1 %, klesne dopyt v predajni Ovohit približne o 0,75 %. Pretože $\eta_d = 0,75 < 1$, dopyt je neelastický a 1 %-ný vzrast ceny spôsobí vzrast celkových príjmov v predajni Ovohit.

ÚLOHY

3.5.1 Dané sú funkcie celkových nákladov a celkových príjmov. Vypočítajte hodnoty marginálnych nákladov, príjmov a ziskov pre danú úroveň produkcie x a ekonomicky interpretujte.

a) $C(x) = 600 + 20x$, $R(x) = 30x$, $x = 50$

b) $C(x) = x^2 - 6x + 25$, $R(x) = 25x - 2x^2$, $x = 5$

b) $C(x) = 50 + 3x - 0,01x^2$, $R(x) = 2,5x - 0,005x^2$, $x = 25$

c) $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0,5x^2 + 40$, $R(x) = 150x - 0,2x^2$, $x = 10$

d) $C(x) = 100e^{0,01x}$, $R(x) = 10x\,e^{0,01x}$, $x = 100$

3.5.2 Vypočítajte marginálny dopyt pre jednotkovú cenu p, ak je daná funkcia dopytu d. Ekonomicky interpretujte.

a) $d : q = 56 - 2p$, $p = 9$

b) $d : q = 1000 - p^2$, $p = 4$

c) $d : q = \sqrt{25 - p} + 2$, $p = 21$

d) $d : q = 40\left(30 - \sqrt{p}\right)$, $p = 4$

e) $d : q = 1 + 3e^{-\frac{1}{3}p}$, $p = 3$

f) $d : q = \frac{30}{p+3} - 2$, $p = 2$

g) $d : q = 6 \ln \frac{5}{p-1}$, $p = 2$

3.5.3 Daná je funkcia dopytu d. Vypočítajte elasticitu pre jednotkovú cenu p. Ekonomicky interpretujte.

a) $d : q = 27 - 3p$, $p = 3$

b) $d : q = \frac{32 - p^2}{2}$, $p = 4$

c) $d : q = \frac{12}{p} - 3$, $p = 2$

d) $d : q = 80 - 30\sqrt{p}$, $p = 4$

3.5.4 Zistite, aký vplyv má 1%-ná zmena jednotkovej ceny p na celkové príjmy, ak je daná funkcia dopytu d.

a) $d : q = 25 - p$, $p = 10$

b) $d : q = \frac{7 - p}{p}$, $p = 3$

c) $d : q = \frac{90 - 6p}{p + 5}$, $p = 5$

d) $d : q = \frac{15 - p^2}{11 + p^2}$, $p = 3$

e) $d : q = 100e^{-p}$, $p = 1$

f) $d : q = 10 - e^{0,5p}$, $p = 2$

g) $d : q = \ln \frac{10}{p} - \frac{1}{2}$, $p = 5$

3.5.5 Týždenný dopyt po pracom prostriedku PALMEX v istej predajni je daný dopytovou funkciou $d: q = \frac{900}{p} - 20$, kde p je cena v eurách za deväťkilogramové balenie a q je množstvo požadovaných balení v predajni. Vypočítajte ako sa približne zmení dopyt, ak cena p vzrastie z 15 €

a) na 16 €, b) o 1 % .

3.5.6 Mesačný dopyt po olivovom oleji v predajni Jednota je daný funkciou dopytu $d: q = -60 \ln \frac{p+1}{30}$, kde p je cena v eurách a q je množstvo požadovaného olivového oleja v litroch. Vypočítajte, ako sa približne zmení dopyt, ak cena p vzrastie z 5 €

a) na 6 €, b) o 1 % .

3.5.7 Náklady istej firmy sú dané funkciou $C(x) = 200 + 5x - 0{,}001x^2$, kde x je množstvo vyrobenej produkcie za jeden mesiac v kusoch. Vypočítajte, ako sa približne zmenia náklady firmy ak množstvo produkcie vzrastie z 500 kusov

a) o 1 jednotku, b) o 1 % , c) o 0,5 jednotky.

3.5.8 Spoločnosť realizuje svoju produkciu na trhu pri funkcii celkových príjmov $R(x) = x\sqrt{225 - x}$. Vypočítajte, ako sa približne zmenia príjmy spoločnosti ak množstvo predanej produkcie vzrastie 144

a) o 1 jednotku, b) o 1 % , c) o 0,5 jednotky.

Výsledky

3.5.1 a) $MC(50) = 20$, $MR(50) = 30$, $MP(50) = 10$; **b)** $MC(5) = 4$, $MR(5) = 5$, $MP(5) = 1$; **c)** $MC(25) = 2{,}5$, $MR(25) = 2{,}25$, $MP(25) = -0{,}25$; **d)** $MC(10) = 90$, $MR(10) = 146$, $MP(10) = 56$; **e)** $MC(100) = e$, $MR(100) = 20e$, $MP(100) = 19e$

3.5.2 a) $Md(9) = -2$; **b)** $Md(4) = -8$; **c)** $Md(21) = -0{,}25$; **d)** $Md(4) = -10$; **e)** $Md(3) = -\frac{1}{e}$; **f)** $Md(2) = -1{,}2$; **g)** $Mdp(2) = -6$

3.5.3 a) $\eta_d = 0{,}5$; **b)** $\eta_d = 2$; **c)** $\eta_d = 2$; **d)** $\eta_d = 1{,}5$

3.5.4 a) vzrast (pokles) ceny spôsobí vzrast (pokles) celkových príjmov; **b)** vzrast (pokles) ceny spôsobí pokles (vzrast) celkových príjmov; **c)** príjmy sa nezmenia; **d)** vzrast (pokles) ceny spôsobí pokles (vzrast) celkových príjmov; **e)** príjmy sa nezmenia; **f)** vzrast (pokles) ceny spôsobí vzrast (pokles) celkových príjmov; **g)** vzrast (pokles) ceny spôsobí pokles (vzrast) celkových príjmov

3.5.5 a) klesne približne o 4 balenia; **b)** klesne približne o 1,5 %

3.5.6 a) klesne približne o 10 l; **b)** klesne približne o 0,5178 %

3.5.7 a) $MC(500) = 4$; **b)** $\eta(R(500)) = 0{,}8163$; **c)** $\mathrm{d}C(500) = 2$

3.5.8 a) $MR(144) = 1$; **b)** $\eta(R(144)) = \frac{1}{9}$; **c)** $\mathrm{d}R(144) = 0{,}5$

3.6 Vyššie derivácie a diferenciály

Definícia 3.6.1 Nech funkcia f je definovaná na množine M a nech $n \in N \cup \{0\}$. ***Deriváciou n-tého rádu (n-tú deriváciu) funkcie*** f na množine M_n rozumieme funkciu $f^{(n)}$, pre ktorú platí

1. $f^{(0)} = f$, $M_0 = M$.

2. Nech existuje derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ na množine $M_n \subset M_{n-1}, n \in N$, t. j. existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h} = \left[f^{(n-1)}(x) \right]' \tag{1}$$

Potom $f^{(n)} = \left[f^{(n-1)} \right]'$, $M_n \subset M_{n-1}, n \in N$. (2)

Poznámka 3.6.1 Z existencie $f^{(n)}(x_0)$, $x_0 \in M_n$ vyplýva existencia všetkých derivácií nižšieho rádu, t. j. existencia $f^{(k)}(x_0), k < n$, $k \in N$, v nejakom okolí bodu x_0.

Poznámka 3.6.2 Nultú až tretiu deriváciu označujeme $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ a $f^{(3)} = f'''$. Derivácie vyššieho rádu označujeme tiež $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, $y^{(n)}$, resp. ak ide o derivácie vyššieho rádu v bode x_0 $\frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n}$, $y^{(n)}(x_0)$.

Príklad 3.6.1 Majme funkciu $f : y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + x\sqrt[3]{x^2}$. Vypočítajme

a) druhú deriváciu funkcie f,
b) druhú deriváciu funkcie f v bode 1.

Riešenie: a) Funkcia je definovaná na $(0;\infty)$, $M_0 = (0;\infty)$. Je výhodné funkciu f upraviť na tvar

$$f : y = \frac{1}{2}x + 2x^{-1} - x^{\frac{-1}{2}} + x^{\frac{5}{3}}$$

Pretože existuje prvá derivácia funkcie f

$$f'(x) = \frac{1}{2} - 2x^{-2} + \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}} + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{na} \quad M_1 = (0;\infty)$$

podľa definície 3.6.1 existuje aj druhá derivácia funkcie f a platí

$$f''(x) = \left[f'(x) \right]' = \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} \right]' = \left[\frac{1}{2} - 2x^{-2} + \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}} + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} \right]' =$$

$$= 4x^{-3} - \frac{3}{4}x^{\frac{-5}{2}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{x^3} - \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} + \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} \quad \text{na} \quad M_2 = (0;\infty)$$

pričom $M_2 = M_1 = M_0 = M$, teda $M_2 \subset M_1 \subset M_0$.

b) Bod $x_0 = 1 \in M_2$, potom

$$f''(1) = \left[\frac{4}{x^3} - \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} + \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}\right]_{x=1} = 4 - \frac{3}{4} + \frac{10}{9} = \frac{157}{36}$$

Príklad 3.6.2 Vypočítajme tretiu deriváciu funkcie $f : y = 3e^{x^2-1}$.

Riešenie: $D(f) = R \Rightarrow M_0 = R$.

Potom $f'(x) = 3e^{x^2-1} \cdot 2x = 6x \cdot e^{x^2-1}$, $M_1 = R$

$f''(x) = \left[f'(x)\right]' = 6e^{x^2-1} + 6x \cdot e^{x^2-1} \cdot 2x = 6\left(2x^2+1\right) \cdot e^{x^2-1}$, $M_2 = R$

$f'''(x) = \left[f''(x)\right]' = 24x \cdot e^{x^2-1} + 6\left(2x^2+1\right) \cdot e^{x^2-1} \cdot 2x = 12x \cdot e^{x^2-1} \cdot \left(2x^2+3\right)$, $M_3 = R$

$$M_3 \subset M_2 \subset M_1 \subset M_0$$

Príklad 3.6.3 Vypočítajme k-tu deriváciu, $k \in N$, funkcie $f : y = \frac{1}{x}$.

Riešenie: $D(f) = R - \{0\} \Rightarrow M_0 = R - \{0\}$.

Potom $f'(x) = -1 \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$, $M_1 = R - \{0\}$, $M_1 \subset M_0$

$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$, $M_2 = R - \{0\}$, $M_2 \subset M_1$

$f'''(x) = -3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x^4} = -\frac{6}{x^4}$, $M_3 = R - \{0\}$, $M_3 \subset M_2$

$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{24}{x^5}$, $M_4 = R - \{0\}$, $M_4 \subset M_3$

Matematickou indukciou môžeme dokázať, že

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x^{k+1}} = (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{1}{x^{k+1}}$$

$$M_k = R - \{0\},\ M_k \subset M_{k-1},\ k \in N$$

Definícia 3.6.2 Nech funkcia f má v bode x_0 deriváciu $f^{(n)}(x_0)$. Funkciu $\varphi : \varphi(h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$, $h \in R$, nazývame ***diferenciálom n-tého rádu (n-tým diferenciálom) funkcie f v bode*** $\boldsymbol{x_0}$. Označujeme ho $\mathbf{d}^n f(x_0)$, resp. $\mathbf{d}^n f(x_0, h)$ a platí

$$\mathrm{d}^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n, \qquad \text{resp. } \mathrm{d}^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n \tag{3}$$

Poznámka 3.6.3 Ak počítame (3) pre rôzne hodnoty x_0, teda ak sa x mení, označíme ho x, potom hovoríme o diferenciáli n-tého radu (o n-tom diferenciáli) funkcie f, označujeme ho $\mathrm{d}^n f(x)$, resp. $\mathrm{d}^n f(x, h)$ a platí

$$\mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x) \cdot h^n, \qquad \text{resp. } \mathrm{d}^n f(x, h) = f^{(n)}(x) \cdot h^n \tag{4}$$

Poznámka 3.6.4 Ak existuje n-tá derivácia $f^{(n)}(x_0)$ v bode x_0, potom existuje aj n-tý diferenciál $\mathrm{d}^n f(x_0)$ a hovoríme, že funkcia f je v bode x_0 n-krát diferencovateľná, t. j. existuje n-tá derivácia $f^{(n)}(x_0)$ v bode x_0.

Príklad 3.6.4 Daná je funkcia $f: y = \ln\left(\frac{x}{2}+2\right) - 3\ln\frac{1}{2}$. Vypočítajme

a) diferenciál druhého rádu funkcie f,

b) diferenciál tretieho rádu funkcie f v bode $x_0 = -3$.

Riešenie: a) Funkcia f je definovaná na množine $(-4;\infty)$. Podľa poznámky 3.6.3 pre $n=2$ dostávame

$$\mathrm{d}^2 f(x) = f''(x)\cdot h^2$$

Vypočítame druhú deriváciu funkcie f

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{2}+2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{x+4}, \quad x\in(-4;\infty)$$

$$f''(x) = \left[(x+4)^{-1}\right]' = -(x+4)^{-2}\cdot 1 = -\frac{1}{(x+4)^2}, \quad x\in(-4;\infty)$$

Treba si tiež uvedomiť, že hoci pre prvú deriváciu by mohlo platiť, že $x\in R-\{-4\}$, vzhľadom na definičný obor pôvodnej funkcie f platí, že $x\in(-4;\infty)$.

Pretože existuje $f''(x)$, diferenciál druhého rádu funkcie f je

$$\mathrm{d}^2 f(x) = -\frac{1}{(x+4)^2}\cdot h^2$$

b) Budeme vychádzať z definície 3.6.2. Potom pre $n=3$ platí

$$\mathrm{d}^3 f(-3) = f'''(-3)\cdot h^3$$

Vypočítajme tretiu deriváciu funkcie f v bode $x_0 = -3$

$$f'''(x) = \left[-(x+4)^{-2}\right]' = 2(x+4)^{-3}\cdot 1 = \frac{2}{(x+4)^3},\ x\in(-4;\infty),\ \text{teda}\ f'''(-3) = 2$$

Pretože existuje $f'''(-3)=2$, diferenciál tretieho rádu funkcie f v bode $x_0=-3$ je

$$\mathrm{d}^3 f(-3) = 2h^3$$

Príklad 3.6.5 Pre funkciu $f: y = \frac{1}{x}$ napíšme vzťah pre výpočet diferenciálu k-tého rádu, $k\in N$ funkcie f a vypočítajme diferenciál piateho rádu funkcie f v bode $x_0 = 1$.

Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine $R-\{0\}$. Podľa poznámky 3.6.3 platí

$$\mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)h^n$$

V príklade 3.6.3 sme odvodili vzťah pre výpočet k-tej derivácie funkcie f

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{1}{x^{k+1}}, \quad x \in R - \{0\}, \quad k \in N$$

Teda

$$\mathrm{d}^k f(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{1}{x^{k+1}} \cdot h^k$$

Potom pre $k = 5$ a $x_0 = 1$ dostaneme

$$\mathrm{d}^5 f(2) = (-1)^5 \cdot 5! \cdot \frac{1}{2^6} \cdot h^5 = -\frac{15}{8} h^5$$

ÚLOHY

3.6.1 Vypočítajte druhú deriváciu funkcie f.

a) $f : y = x^3 - 7x^2 + 3$

b) $f : y = \frac{x^4}{4} - \frac{7}{x^3}$

c) $f : y = (1 - x)^2$

d) $f : y = \sqrt[3]{(x+2)^5}$

e) $f : y = e^{x^2 - 1}$

f) $f : y = (x+1) \cdot e^x$

g) $f : y = x \cdot 2^{x-2}$

h) $f : y = \ln(x^2 + 1)$

3.6.2 Vypočítajte druhú deriváciu funkcie f.

a) $f : y = \sin(2x+1)$

b) $f : y = \cos^2 x$

c) $f : y = \arccos x$

d) $f : y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

3.6.3 Vypočítajte n-tú deriváciu funkcie f.

a) $f : y = x^n, \quad n = 4$

b) $f : y = \frac{1}{x-3}, \quad n = 3$

c) $f : y = \sqrt{x}, \quad n = 4$

d) $f : y = e^{-x}, \quad n = 5$

e) $f : y = x \cdot \ln x, \quad n = 3$

f) $f : y = \frac{x-1}{x}, \quad n = 5$

3.6.4 Vypočítajte deriváciu k-teho rádu, $k \in N$, funkcie f v bode $x = 0$.

a) $f : y = \frac{1}{1+x}$

b) $f : y = e^{x+1}$

c) $f : y = \ln(1+x)$

d) $f : y = \sin x$

3.6.5 Vypočítajte diferenciál *n*-tého rádu funkcie f .

a) $f: y = 4x^3 + 7x - \sqrt{3}$, $n = 3$

b) $f: y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}$, $n = 4$

c) $f: y = \sqrt{x^2 + 4}$, $n = 2$

d) $f: y = \frac{x^2}{x+1}$, $n = 2$

e) $f: y = x^2 \cdot e^x$, $n = 4$

f) $f: y = x \cdot \ln x$, $n = 5$

g) $f: y = \cos x \cdot \sin x$, $n = 4$

h) $f: y = \arcsin x$, $n = 2$

Výsledky

3.6.1 a) $f''(x) = 6x - 14$, $x \in R$; **b)** $f''(x) = 3x^2 - \frac{84}{x^5}$, $x \neq 0$; **c)** $f''(x) = 2$, $x \in R$;

d) $f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x+2}}$, $x \neq -2$; **e)** $f''(x) = 2e^{x^2-1}(2x^2+1)$, $x \in R$; **f)** $f''(x) = (x+3) \cdot e^x$,

$x \in R$; **g)** $f''(x) = \ln 2 \cdot 2^{x-2} \cdot (\ln 2 \cdot x + 2)$, $x \in R$; **h)** $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, $x \in R$

3.6.2 a) $f''(x) = -4\sin(2x+1)$, $x \in R$; **b)** $f''(x) = 2(\sin^2 x - \cos^2 x)$, $x \in R$;

c) $f''(x) = -\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$; **d)** $f''(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $x \neq 0$

3.6.3 a) $f^{(4)}(x) = \frac{n!}{(n-4)!} \cdot x^{n-4}$, $x \in R$; **b)** $f'''(x) = -\frac{6}{(x-3)^4}$, $x \neq 3$; **c)** $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16x^3 \cdot \sqrt{x}}$,

$x > 0$; **d)** $f^{(5)}(x) = -e^{-x}$, $x \in R$; **e)** $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x > 0$; f) $f'''(x) = \frac{120}{x^6}$, $x \neq 0$

3.6.4 a) $f^{(k)}(0) = (-1)^k \cdot k!$, $x \neq -1$; **b)** $f^{(k)}(0) = e$, $x \in R$; **c)** $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$,

$x > -1$; **d)** $f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ (-1)^{\frac{3k+1}{2}} & k = 2n-1 \end{cases}$, $x \in R$

3.6.5 a) $\mathrm{d}^3 f(x) = 24h^3$, $x \in R$; **b)** $\mathrm{d}^4 f(x) = -\frac{1080}{x^7} \cdot h^4$, $x \neq 0$; **c)** $\mathrm{d}^2 f(x) = \frac{4}{\sqrt{(x^2+4)^3}} \cdot h^2$,

$x \in R$; **d)** $\mathrm{d}^2 f(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \cdot h^2$, $x \neq -1$; **e)** $\mathrm{d}^4 f(x) = e^x \cdot (x^2 + 8x + 12) \cdot h^4$, $x \in R$;

f) $\mathrm{d}^5 f(x) = -\frac{6}{x^4} \cdot h^5$, $x > 0$; **g)** $\mathrm{d}^4 f(x) = 8\sin 2x \cdot h^4$, $x \in R$;

h) $\mathrm{d}^2 f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \cdot h^2$, $x \in (-1;1)$

3.7 L´Hospitalovo pravidlo

Limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$ nie sú v R^* definované. V kapitole 3 sme si ukázali niektoré metódy založené na úpravách výrazov typu $\frac{f(x)}{g(x)}$, no nie vždy je to možné. Preto si ukážeme metódy výpočtu takýchto limít, ktoré využívajú deriváciu funkcie. Tiež si ukážeme, že za použitia týchto metód sa dajú vypočítať aj limity typu $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^0 a 0^0.

Veta 3.7.1 (1. L´Hospitalovho pravidlo)

Nech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0, x_0\in R^*$. Ak existuje vlastná alebo nevlastná limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak potom existuje aj $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (1)$$

Príklad 3.7.1 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+x-14}{x^3-2x^2}$.

Riešenie: Označme $f(x)=3x^2+x-14$, $g(x)=x^3-2x^2$. Zistíme, či sú splnené podmienky vety 3.7.1 a to výpočtom limít

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(3x^2+x-14\right)=0, \qquad \lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\left(x^3-2x^2\right)=0$$

Dostávame výraz $\frac{0}{0}$, ktorý v R^* nie je definovaný. Keďže existujú derivácie daných funkcií $f'(x)=6x+1$ a $g'(x)=3x^2-4x$, existuje aj limita $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{6x+1}{3x^2-4x}=\frac{13}{4}$, a teda platí vzťah (1)

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+x-14}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{6x+1}{3x^2-4x}=\frac{13}{4}$$

Príklad 3.7.2 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to -3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{6+2x}$.

Riešenie: Podobne ako v príklade 3.7.1 najprv označme $f(x)=1-\sqrt{x+4}$ a $g(x)=6+2x$. Aj v tomto prípade sú splnené podmienky vety 3.7.1

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\left(1-\sqrt{x+4}\right)=0, \qquad \lim_{x\to -3} g(x)=\lim_{x\to -3}\left(6+2x\right)=0$$

A keďže opäť dostávame výraz $\frac{0}{0}$ a taktiež existujú derivácie daných funkcií $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$ a $g'(x)=2$, existuje aj limita

$$\lim_{x\to -3}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to -3}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{2}=-\frac{1}{4}$$

a teda platí vzťah (1)

$$\lim_{x\to -3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{6+2x}=\lim_{x\to -3}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{2}=-\frac{1}{4}$$

Veta 3.7.2 (2. L´Hospitalovho pravidlo) Nech $\lim_{x\to x_0}|g(x)|=\infty$, $x_0\in R^{\bullet}$. Ak existuje vlastná alebo nevlastná limita $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje aj $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (2)$$

Príklad 3.7.3 Vypočítajme $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+7}{5^x}$.

Riešenie: Označme $f(x)=3x+7$, $g(x)=5^x$ a počítajme limity týchto funkcií:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(3x+7)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}5^x=\infty$$

Dostávame výraz $\frac{\infty}{\infty}$, ktorý opäť v R^* nie je definovaný. Pretože $f'(x)=3$, $g'(x)=5^x\cdot\ln 5$ a existuje $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{5^x\cdot\ln 5}=0$, podľa (2) platí

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+7}{5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{5^x\cdot\ln 5}=0$$

Poznámka 3.7.1 Ak $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ pre $x_0\in R^*$ je opäť limita typu $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$, postupujeme tak, že hľadáme vyššie derivácie funkcií f a g a postup zopakujeme. Napríklad, za predpokladu, že

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}f'(x)=\lim_{x\to x_0}g'(x)=\ldots=\lim_{x\to x_0}f^{(k-1)}(x)=\lim_{x\to x_0}g^{(k-1)}(x)=0$$

resp.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}f'(x)=\lim_{x\to x_0}g'(x)=\ldots=\lim_{x\to x_0}f^{(k-1)}(x)=\lim_{x\to x_0}g^{(k-1)}(x)=\infty$$

ak existuje $\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$, $k\in N$, tak existuje aj $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} \qquad (3)$$

Príklad 3.7.4 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}}{x^3}$.

Riešenie: Označme $f(x)=e^{3x}$, $g(x)=x^3$. Potom $\lim\limits_{x\to\infty}e^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}x^3=\infty$. Pretože $f'(x)=3e^{3x}$, $g'(x)=3x^2$ a

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}3e^{3x}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}3x^2=\infty$$

budeme počítať druhú deriváciu funkcií f a g a aj limity týchto druhých derivácií: $f''(x)=9e^{3x}$, $g''(x)=6x$ a

$$\lim_{x\to\infty}f''(x)=\lim_{x\to\infty}9e^{3x}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}g''(x)=\lim_{x\to\infty}6x=\infty$$

Vypočítame tretiu deriváciu funkcií f a g: $f'''(x)=27e^{3x}$, $g'''(x)=6$ a tiež limity tretích derivácií funkcií f a g

$$\lim_{x\to\infty}f'''(x)=\lim_{x\to\infty}27e^{3x}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}g'''(x)=\lim_{x\to\infty}6=6$$

zistíme, že existuje limita podielu týchto derivácií $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'''(x)}{g'''(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27e^{3x}}{6}=\infty$. Potom podľa poznámky 3.7.1 existuje aj $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}}$ a platí vzťah (3)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{27e^{3x}}{6}=\infty$$

Poznámka 3.7.2 L´Hospitalove pravidlá umožňujú počítať aj limity typu $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0. Avšak skôr ako tieto pravidlá použijeme, musíme limitu týchto typov upraviť na limitu typu $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Ide o nasledovné úpravy:

a) limita typu $0\cdot\infty$:

Ak $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, tak $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$ upravíme na tvar

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}},\qquad \text{resp. } \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \tag{4}$$

a dostaneme tak typ limity $\dfrac{0}{0}$, resp. $\dfrac{\infty}{\infty}$.

b) limita typu $\infty-\infty$:

Ak $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, tak $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$ upravíme na tvar

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}} \tag{5}$$

a dostaneme tak typ limity $\dfrac{0}{0}$.

c) limity typu 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}

Ak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ alebo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ alebo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, tak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$, $f(x)>0$, upravíme na tvar

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x)} \tag{6}$$

Limita exponentu je typu $0\cdot\infty$ a môžeme ju teda upraviť podľa poznámky 3.7.2 a).

Príklad 3.7.5 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$.

Riešenie: Limita je typu $\infty\cdot 0$, čo zodpovedá limite typu $0\cdot\infty$, ktorú si upravíme na typ $\frac{0}{0}$

Tento dostaneme úpravou danej limity použijúc vzťah (4) na tvar

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

Označíme $f(x)=1-e^{\frac{1}{x}}$, $g(x)=\frac{1}{x}$. Za predpokladu, že existuje $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, potom vzhľadom na 1. L´Hospitalovo pravidlo platí

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=-1$$

Príklad 3.7.6 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Riešenie: Limita je typu $\infty-\infty$. Úpravou na tvar (5) dostaneme limitu

$$\lim_{x\to 1^+}\cdot\frac{\frac{1}{\frac{1}{x-1}}-\frac{1}{\frac{1}{\ln x}}}{\frac{1}{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x-1}}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}$$

ktorá je typu $\frac{0}{0}$.

Treba si tiež uvedomiť, že výraz $\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}$ v limite sa dá v tomto prípade upraviť aj jednoducho úpravou zlomkov na spoločného menovateľa.

Označíme $f(x)=x-1-\ln x$, $g(x)=(x-1)\cdot\ln x$. Za predpokladu, že existuje $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, platí

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Príklad 3.7.7 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to -2}\left(4+2x\right)^{\frac{x+2}{3}}$.

Riešenie: Daná limita je typu 0^0. Úpravou na tvar (6) dostaneme limitu

$$\lim_{x\to -2^+} e^{\frac{x+2}{3}\cdot\ln(4+2x)} = e^{\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x+2}{3}\cdot\ln(4+2x)}$$

ktorá je typu $0\cdot\infty$.

Použijeme vzťah (4) a limitu upravíme na typ $\frac{\infty}{\infty}$, čiže $e^{\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{\ln(4+2x)}{\frac{3}{x+2}}}$.

Označme $f(x)=\ln(4+2x)$, $g(x)=\dfrac{3}{x+2}$. Za predpokladu, že existuje $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, platí

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{\ln(4+2x)}{\frac{3}{x+2}} = \lim_{x\to -2^+}\frac{\frac{2}{4+2x}}{-\frac{3}{(x+2)^2}} = \lim_{x\to -2^+}-\frac{x+2}{3} = 0$$

Teda

$$\lim_{x\to -2^+}\left(4+2x\right)^{\frac{x+2}{3}} = e^{\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{\ln(4+2x)}{\frac{3}{x+2}}} = e^0 = 1$$

ÚLOHY

Použitím 1. L´Hospitalovho pravidla vypočítajte nasledujúce limity.

3.7.1

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-3x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x}{x^4-3x^3-x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)\cdot(x+1)}{x^4+4x^2-5}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{8x}-2x}{\sqrt[4]{x}-x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-3}{3^x-3}$

k) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x^2}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\sqrt{x-1}}-1}{\sqrt{x-1}}$

n) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln x-\ln 2}{3x-6}$

o) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(3+2x)}{1-x^2}$

p) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln(2x-1)}{\sqrt{x}-1}$

3.7.2 a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3-3x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-(1+2x)}{x^2+4x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot e^x-x}{\ln(1-x^2)}$

3.7.3 a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4\sin(x-2)}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3\,\mathrm{tg}\,\pi x}{2-x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x-\sin x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{e^{x^2}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ln(1-2x)}{2\,\mathrm{arctg}\,3x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2(-x)}$

Použitím 2. L´Hospitalovho pravidla vypočítajte limity.

3.7.4 a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{2x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-4x^5}{x^5+3x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-4x}{2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\sqrt{x}}{\ln 3x}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x}{2+e^{-x}}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4e^{\sqrt{x-1}}-3}{\sqrt{x-1}}$

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-4}{x^2+8x}$

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+1}{e^{3x+1}+2x-1}$

3.7.5 a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\mathrm{tg}\,x}$

b) $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\mathrm{cotg}\,(x-2\pi)}{\ln(\pi-x)}$

V nasledujúcich úlohách vypočítajte limity.

3.7.6 a) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot e^x$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot 2^{-x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)\cdot e^{-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x)\cdot\ln x$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\mathrm{tg}\,x$

j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\cdot\mathrm{tg}\,x$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \cdot \ln x$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x$

k) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \operatorname{arccotg} x$

l) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right)$

3.7.7 a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} \right)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-1)} \right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} \right)$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \right)$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin x} \right)$

3.7.8 a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} (2x-1)^{\frac{1}{1-x}}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{4x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x + x \right)^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

l) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{arctg} x}$

V nasledujúcich úlohách nájdite asymptoty grafu funkcie f, ak existujú.

3.7.9 a) $f : y = \frac{x+1}{x-1}$

b) $f : y = \frac{3x^2 - 12}{x^2 - x - 2}$

c) $f : y = \frac{x^3 - 8}{(x-2)(x^2 - 2x - 3)}$

d) $f : y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

e) $f : y = x \cdot e^{-x^2}$

f) $f : y = x \cdot \ln \frac{x}{x-1}$

3.7.10 a) $f : y = x \cdot \operatorname{arccotg}(-x)$

b) $f : y = x \cdot \operatorname{arctg} x$

Wondershare PDFelement

Výsledky

3.7.1 a) $\frac{1}{9}$; **b)** 0; **c)** $\frac{9}{13}$; **d)** 0; **e)** $\frac{1}{6}$; **f)** -12; **g)** $\frac{\sqrt{2}}{8}$; **h)** $\frac{16}{9}$; **i)** $\ln 5$; **j)** $\frac{3}{\ln 3}$; **k)** ∞; **l)** 2; **m)** 1; **n)** $\frac{1}{6}$; **o)** 1; **p)** 2

3.7.2 a) $-\frac{1}{3}$; **b)** neexistuje; **c)** $\frac{1}{6}$; **d)** -1

3.7.3 a) 3; **b)** 4; **c)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; **d)** -3π; **e)** 2; **f)** 2; **g)** -1; **h)** $\frac{9}{2}$

3.7.4 a) 0; **b)** ∞; **c)** -4; **d)** -2; **e)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **f)** 0; **g)** ∞; **h)** $-\infty$; **i)** 1; **j)** ∞; **k)** ∞; **l)** 0

3.7.5 a) 1; **b)** ∞

3.7.6 a) 0; **b)** 0; **c)** 0; **d)** 1; **e)** 0; **f)** 0; **g)** 0; **h)** 1; **i)** -1; **j)** 0; **k)** 1; **l)** -1

3.7.7 a) ∞; **b)** $-\infty$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $-\frac{1}{2}$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** 0; **g)** 0; **h)** ∞

3.7.8 a) 1; **b)** 1; **c)** $\sqrt{e}$; **d)** $\frac{1}{e}$; **e)** $\frac{1}{e^2}$; **f)** e^{12}; **g)** 1; **h)** 1; **i)** e^2; **j)** 1; **k)** $\frac{\sqrt{e}}{e}$; **l)** 1

3.7.9 a) $x=1,\ y=1$; **b)** $x=-1,\ y=3$; **c)** $x=-1,\ x=3,\ y=1$; **d)** $x=-1,\ x=1$; **e)** $y=0$; **f)** $x=1,\ y=1$

3.7.10 a) $y_1=\pi x-1,\ y_2=-1$; **b)** $y_1=\frac{\pi}{2}x-1,\ y_2=-\frac{\pi}{2}x-1$

Wondershare PDFelement

3.8 Konvexnosť a konkávnosť funkcie. Inflexné body

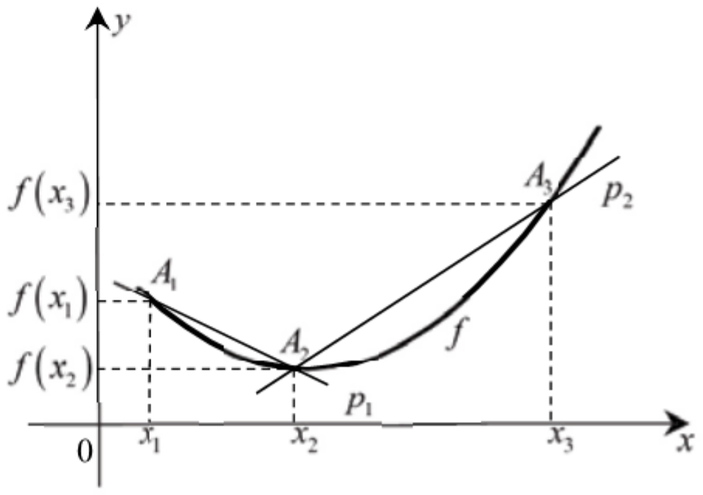
Okrem vyšetrovania monotónnosti funkcie je dôležité, predovšetkým pre ekonomické funkcie, zisťovať, či ide o konvexné, resp. konkávne funkcie. Najprv si vysvetlíme (a na príkladoch ukážeme) pojem konvexnej a konkávnej funkcie, následne pojem inflexný bod.

Definícia 3.8.1 Nech funkcia f je definovaná na intervale I. Hovoríme, že funkcia je ***konvexná*** [***konkávna***] ***na intervale I*** práve vtedy, ak pre všetky x_1, x_2, $x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí

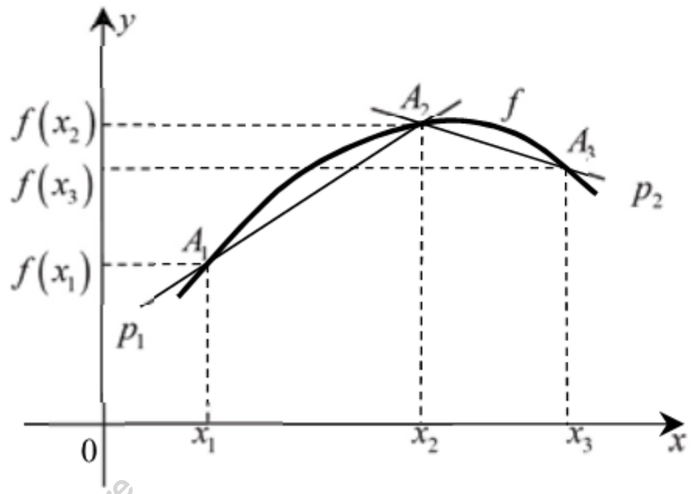
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)} \quad \left[\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\right] \tag{1}$$

---

a) konvexná funkcia



b) konkávna funkcia



Obr. 3.8.1 Grafické znázornenie konvexnej a konkávnej funkcie

Výraz $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ zo vzťahov (1) je smernicou priamky p_1, ktorá prechádza bodmi $A_1=[x_1;f(x_1)]$, $A_2=[x_2;f(x_2)]$ a výraz $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ je smernicou priamky p_2, ktorá prechádza bodmi $A_2=[x_2;f(x_2)]$, $A_3=[x_3;f(x_3)]$.

Ako vidno z obrázku 3.8.1, prvá z nerovníc (1) definície 3.8.1 vyjadruje skutočnosť, že smernica priamky p_1 je menšia ako smernica priamky p_2 (obr. 3.8.1 a)) [druhá z nerovníc (1) naopak, že smernica priamky p_1 je väčšia ako smernica priamky p_2 (obr. 3.8.1 b))].

Veta 3.8.1 (*postačujúca podmienka konkávnosti a konvexnosti funkcie*) Nech funkcia f je spojitá na intervale I a nech je dvakrát diferencovateľná v každom vnútornom bode intervalu I. Ak v každom vnútornom bode intervalu I platí:

$$\left.\begin{matrix} f''(x)>0 \\ f''(x)<0 \end{matrix}\right\} \text{ tak funkcia } f \text{ je na intervale } I \quad \begin{cases} \text{konvexná} \\ \text{konkávna} \end{cases} \tag{2}$$

Príklad 3.8.1 Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia f konkávna a na ktorých konvexná, ak

$$f: y = x + \frac{1}{x-1}.$$

Riešenie: $D(f)=R-\{1\}$. Podľa vety 3.8.1 budeme hľadať také intervaly, že pre každý vnútorný bod intervalu platí $f''(x)>0$ alebo $f''(x)<0$.

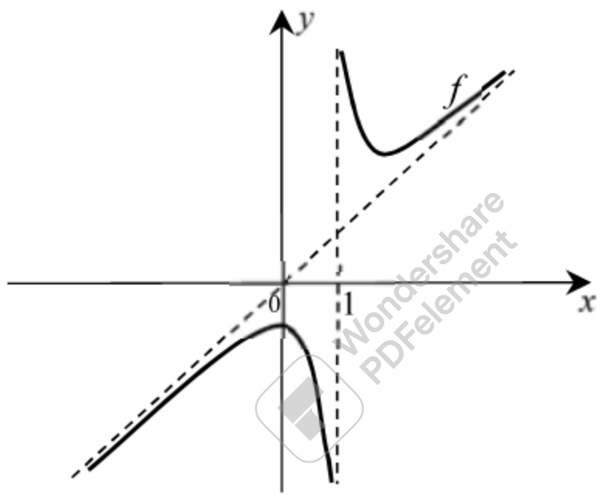
Vypočítame prvú a druhú deriváciu danej funkcie.

$$f'(x)=1+\frac{-1}{(x-1)^2}=1-\frac{1}{(x-1)^2},\quad x\in R-\{1\}$$

a

$$f''(x)=-\frac{-2}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3},\quad x\in R-\{1\}$$

Pretože funkcia f je na intervale $(-\infty;1)$ spojitá a v každom vnútornom bode tohto intervalu platí $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}<0$, funkcia f je podľa vety 3.8.1 na intervale $(-\infty;1)$ konkávna. Pretože funkcia f je na intervale $(1;\infty)$ spojitá a v každom vnútornom bode tohto intervalu platí $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}>0$, funkcia f je podľa vety 3.8.1 na intervale $(1;\infty)$ konvexná.



Obr. 3.8.2 Konvexnosť a konkávnosť na grafe funkcie $f: y=x+\frac{1}{x-1}$

Príklad 3.8.2 Daná je funkcia $f: y=e^{1-2x^2}$

Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia konvexná a na ktorých konkávna.

Riešenie: $D(f)=R$. Budeme postupovať tak ako v predchádzajúcom príklade. Teda vypočítame druhú deriváciu funkcie f, ak existuje.

$$f'(x)=e^{1-2x^2}\cdot(-4x)=-4x\cdot e^{1-2x^2},\quad x\in R$$

$$f''(x)=-4e^{1-2x^2}+(-4x)\cdot e^{1-2x^2}\cdot(-4x)=e^{1-2x^2}\cdot(16x^2-4)=$$

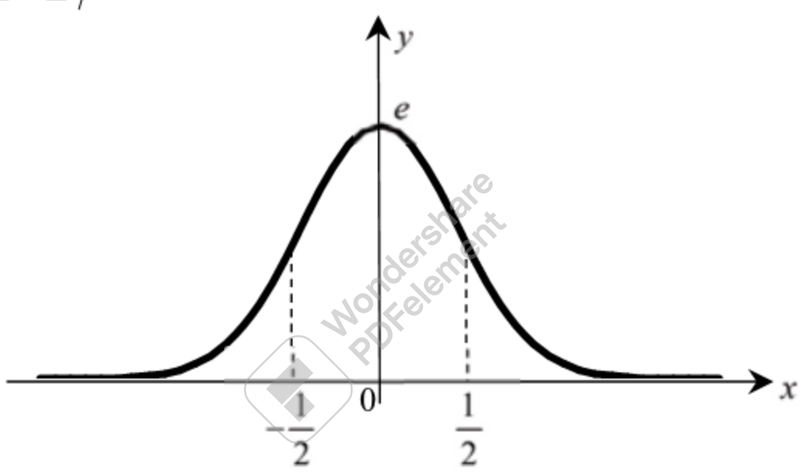
$$=4e^{1-2x^2}\cdot(4x^2-1)=4e^{1-2x^2}\cdot(2x+1)\cdot(2x-1),\quad x\in R$$

Funkcia je dvakrát diferencovateľná na množine R. Keďže exponenciálny výraz $4e^{1-2x^2}$ nadobúda iba kladnú hodnotu pre každé $x\in R$, znamienko druhej derivácie neovplyvní. Potom riešením nerovníc $(2x+1)\cdot(2x-1)>0$ a $(2x+1)\cdot(2x-1)<0$ zistíme, že druhá derivácia mení znamienko v bodoch $x_1=-\frac{1}{2}$ a $x_2=\frac{1}{2}$. Pre určenie znamienka druhej derivácie použijeme tabuľkovú metódu.

Tab. 3.8.1

	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\infty\right)$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)=4e^{1-2x^2}\cdot\left(4x^2-1\right)$	$+$	$-$	$+$

Funkcia f je spojitá na intervaloch $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left\langle-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$. V každom vnútornom bode intervalov $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$ je $f''(x)>0$ a v každom vnútornom bode intervalu $\left\langle-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$ je $f''(x)<0$. Potom podľa vety 3.8.1 je funkcia f na intervaloch $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$ konvexná a na intervale $\left\langle-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$ konkávna.



Obr. 3.8.3 Konvexnosť a konkávnosť na grafe funkcie $f: y=e^{1-2x^2}$

Poznámka 3.8.1 Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a;b\rangle$ a je konvexná (konkávna) na intervaloch $\langle a;c\rangle$, $\langle c;b\rangle$, z toho ešte nevyplýva, že je konvexná (konkávna) na intervale $\langle a;b\rangle$. Príkladom je funkcia $f: y=|\sin x|$, ktorá je definovaná na intervale $(-\infty;\infty)$.

Zoberme danú funkciu na podintervale definičného oboru $\langle-2\pi;2\pi\rangle$. Overíme, či je na tomto intervale diferencovateľná.

Na intervaloch $(-2\pi;-\pi)$, $(0;\pi)$ je $f(x)=\sin x$, teda $f'(x)=\cos x$
a na intervaloch $(-\pi;0)$, $(\pi;2\pi)$ je $f(x)=-\sin x$, teda $f'(x)=-\cos x$.

Pomocou definície derivácie zistíme deriváciu zľava a sprava v bodoch $-\pi$, 0 a π. Napr. pre bod $-\pi$ je

$$f'_{-}(-\pi)=\lim_{x\to-\pi^{-}}\frac{\sin x-0}{x-(-\pi)}=\lim_{x\to-\pi^{-}}\frac{\sin x}{x+\pi}=1$$

$$f'_{+}(-\pi)=\lim_{x\to-\pi^{+}}\frac{-\sin x-0}{x-(-\pi)}=\lim_{x\to-\pi^{+}}\frac{-\sin x}{x+\pi}=-1$$

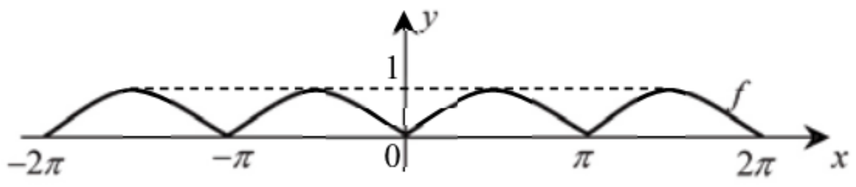
Analogicky určíme aj deriváciu zľava a sprava v bodoch 0, π a platí

$$f'_-(-\pi)=1,\ f'_+(-\pi)=-1;\quad f'_-(0)=-1,\ f'_+(0)=1;\quad f'_-(\pi)=1,\ f'_+(\pi)=-1$$

Pretože $f'_-(-\pi)\neq f'_+(-\pi)$, $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ a $f'_-(\pi)\neq f'_+(\pi)$, neexistuje derivácia funkcie f v bodoch $-\pi$, 0 a π.

Zistíme druhé derivácie funkcie f. Na intervaloch $(-2\pi;-\pi)$, $(0;\pi)$ je $f''(x)=-\sin x$ a na intervaloch $(-\pi;0)$, $(\pi;2\pi)$ je $f''(x)=\sin x$.

Funkcia je na intervaloch $\langle -2\pi;-\pi\rangle$, $\langle 0;\pi\rangle$, $\langle -\pi;0\rangle$, $\langle \pi;2\pi\rangle$ spojitá a v každom vnútornom bode týchto intervalov $f''(x)<0$, potom podľa vety 3.8.1 je na intervaloch $\langle -2\pi;-\pi\rangle$, $\langle 0;\pi\rangle$, $\langle -\pi;0\rangle$, $\langle \pi;2\pi\rangle$ konkávna. Pretože však daná funkcia nie je v bodoch $-\pi$, 0, π diferencovateľná, teda v týchto bodoch neexistuje ani druhá derivácia funkcie f, nie je funkcia f na intervale $\langle -2\pi;2\pi\rangle$ konkávna .



Obr. 3.8.4 Konkávnosť funkcie $f: y=|\sin x|$ na jej grafe

Príklad 3.8.3 Spoločnosť realizuje výrobok na trhu pri funkciách celkových nákladov a príjmov

$$C(x)=250+5x-0,02x^2, \qquad x\leq 125$$

$$R(x)=7x-0,01x^2, \qquad x\leq 125$$

Vyšetrime konvexnosť a konkávnosť funkcii $C(x)$, $R(x)$ a $P(x)$.

Riešenie: Funkcie musia byť dvakrát diferencovateľné na svojich definičných oboroch. Prvé derivácie funkcií $C(x)$, $R(x)$ a $P(x)$ sme našli v príklade 3.5.1. Vypočítame druhé derivácie daných funkcií

$$C''(x)=-0,04, \qquad R''(x)=-0,02, \qquad P''(x)=0,02$$

Pre všetky $x\leq 125$ sú dané funkcie spojité. Pretože $C''(x)<0$, $R''(x)<0$ a $P''(x)>0$, nákladová a príjmová funkcia sú pre $x\leq 125$ konkávne a zisková funkcia je pre $x\leq 125$ konvexná. Je teda zrejmé to, čo sme si povedali v ekonomickej interpretácií v príklade 3.5.1 (viď tiež obr. 3.5.1).

Hoci sú všetky tieto funkcie rastúce, t. j. s rastúcou produkciou náklady, príjem a zisk rastú, tak vzhľadom na to, že

- funkcia $C(x)$ je konkávna, zvyšovaním výroby náklady na každú ďalšiu vyrobenú jednotku produkcie klesajú,
- funkcia $R(x)$ je konkávna, zvyšovaním predaja príjmy na každú ďalšiu predanú jednotku produkcie klesajú a
- funkcia $P(x)$ je konvexná, zvyšovaním produkcie a predaja zisk na každú ďalšiu vyrobenú a predanú jednotku produkcie rastie.

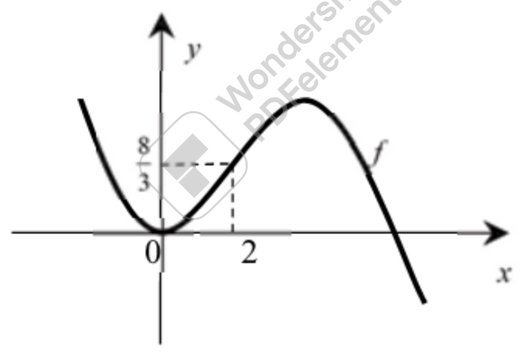
Definícia 3.8.2 Nech funkcia f je spojitá v bode x_0 a nech v bode x_0 existuje vlastná alebo nevlastná derivácia $f'(x_0)$. Hovoríme, že bod x_0 je ***inflexný bod funkcie f***, ak existujú také okolia $O_{\delta^-}(x_0)$, $O_{\delta^+}(x_0)$, že funkcia f je na $O_{\delta^-}(x_0)$ konvexná a súčasne na $O_{\delta^+}(x_0)$ konkávna alebo je na $O_{\delta^-}(x_0)$ konkávna a súčasne na $O_{\delta^+}(x_0)$ konvexná.

Príklad 3.8.4 Nájdime inflexné body, ak existujú, funkcie $f: y = x^2 - \frac{x^3}{6}$.

Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine R. Budeme hľadať také body z definičného oboru danej funkcie, v ktorých druhá derivácia, ak existuje, mení znamienko.
Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie f.

$$f'(x) = 2x - \frac{x^2}{2}, \qquad f''(x) = 2 - x,\ x \in R$$

Potom f'' môže meniť znamienko v bode $x_0 = 2$. Pretože existuje ľavé okolie $O_{\delta^-}(2) = (-\infty; 2)$, na ktorom je $f''(x) > 0$, teda na ktorom je funkcia f konvexná a súčasne existuje pravé okolie $O_{\delta^+}(2) = (2; \infty)$, na ktorom je $f''(x) < 0$, teda na ktorom je funkcia f konkávna, pričom funkcia f je v bode $x_0 = 2$ spojitá a diferencovateľná, existuje $f'(2) = 2$, podľa definície 3.8.2 bod $x_0 = 2$ je inflexný bod funkcie f.



Obr. 3.8.5 Inflexné body na grafe funkcie $f: y = \frac{x^3}{6} - x^2$

Príklad 3.8.5 Určime inflexné body daných funkcií, ak existujú

a) $f: y = x + \frac{1}{x-1}$, b) $f: y = e^{1-2x^2}$.

Riešenie: a) Na určenie inflexného bodu danej funkcie použijeme riešenie príkladu 3.8.1, kde sme vyšetrovali konvexnosť a konkávnosť danej funkcie. Druhá derivácia mení znamienko v bode $x = 1$, avšak funkcia nie je v danom bode spojitá. Nie je splnená podmienka definície 3.8.2, a teda funkcia nemá inflexný bod.
b) Intervaly, na ktorých je druhá z funkcií konvexná a na ktorých konkávna, sme určili v príklade 3.8.2. Druhá derivácia mení znamienko v bodoch $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ a je v týchto bodoch spojitá. Potom podľa definície 3.8.2, pretože existuje ľavé okolie $O_{\delta^-}\left(-\frac{1}{2}\right)$, na ktorom je funkcia f konvexná a súčasne existuje pravé okolie $O_{\delta^+}\left(-\frac{1}{2}\right)$, na ktorom je funkcia f

konkávna, pričom funkcia f je v bode $x_1 = -\frac{1}{2}$ diferencovateľná, existuje $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e}$, bod $x_1 = -\frac{1}{2}$ je inflexný bod funkcie f. Podobne existuje ľavé okolie $O_{\delta^-}\left(\frac{1}{2}\right)$, na ktorom je funkcia f konkávna, súčasne existuje pravé okolie $O_{\delta^+}\left(\frac{1}{2}\right)$, na ktorom je funkcia f konvexná a funkcia f je v bode $x_2 = \frac{1}{2}$ diferencovateľná, existuje $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{e}$, bod $x_2 = \frac{1}{2}$ je inflexný bod funkcie f.

Určenie inflexných bodov funkcie f, ak existujú, bez vyšetrovania konvexnosti a konkávnosti funkcie, nám umožňujú nasledujúce vety.

Veta 3.8.2 (*nutná podmienka existencie inflexného bodu*) Ak funkcia f má v bode x_0 inflexný bod a existuje $f''(x_0)$, tak $f''(x_0) = 0$.

Veta 3.8.3 (*postačujúca podmienka existencie inflexného bodu*) Nech $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$. Potom bod x_0 je inflexný bod funkcie f. Ak $f'''(x_0) < 0$ $\left[f'''(x_0) > 0\right]$, graf funkcie f prechádza v bode $\left[x_0; f\left(x_0\right)\right]$ z konvexnosti [konkávnosti] do konkávnosti [konvexnosti].

Veta 3.8.4 (*všeobecná postačujúca podmienka existencie inflexného bodu*) Nech funkcia f má v bode x_0 derivácie

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 \tag{4}$$

Potom platí

a) Ak n je nepárne číslo a $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\left[f^{(n)}(x_0) > 0\right]$, tak bod x_0 je inflexný bod funkcie f a funkcia prechádza v bode x_0 z konvexnosti [konkávnosti] do konkávnosti [konvexnosti].

b) Ak n je párne číslo, tak bod x_0 nie je inflexným bodom funkcie f. Ak je $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\left[f^{(n)}(x_0) < 0\right]$, je funkcia f v okolí v bodu x_0 konvexná [konkávna].

Príklad 3.8.6 Nájdime inflexné body, ak existujú, funkcie

$$f : y = \frac{1}{12}\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + 6\right).$$

Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine R. Na základe nutnej podmienky riešením rovnice $f''(x) = 0$, teda dostaneme bod, resp. body, ktoré by mohli byť inflexnými bodmi.

Vypočítame druhú deriváciu funkcie f.

$$f'(x) = \frac{1}{12} \cdot \left(x^4 - 4x^3\right), \quad x \in R$$

$$f''(x)=\frac{1}{12}\cdot\left(4x^3-12x^2\right)=\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot\left(x-3\right),\quad x\in R$$

Platí

$$\frac{1}{3}x^2\cdot\left(x-3\right)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1=0\,,\ x_2=3\,.$$

Vypočítame tretiu deriváciu funkcie f v bodoch $x_1=0$ a $x_2=3$.

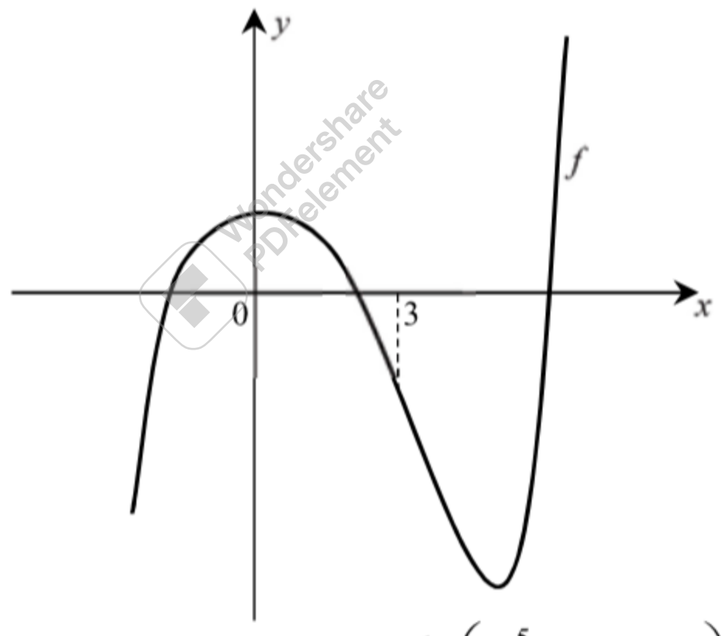
$$f'''(x)=x^2-2x \qquad \Rightarrow \qquad f'''(0)=0 \text{ a } f'''(3)=3$$

V bode $x_1=0$ je $f'''(0)=0$, čím nie je splnená postačujúca podmienka existencie inflexného bodu. V takom prípade budeme postupovať podľa všeobecnej podmienky existencie inflexného bodu.

$$f^{(4)}(x)=2x-2 \qquad \Rightarrow \qquad f^{(4)}(0)=-2$$

Pretože $f''(0)=f'''(0)=0$ a $f^{(4)}(0)=-2<0$, bod 0 nie je inflexný bod danej funkcie a funkcia f je v okolí bodu 0 konkávna.

V bode $x_2=3$ je $f'''(3)\neq 0$, je splnená postačujúca podmienka existencie inflexného bodu, čiže bod 3 je inflexný bod funkcie f a vzhľadom na to, že $f'''(3)>0$, funkcia f prechádza v tomto bode z konkávnosti do konvexnosti.



Obr. 3.8.6 Inflexný bod funkcie $f: y=\frac{1}{12}\left(\frac{x^5}{5}-x^4+6\right)$ na jej grafe

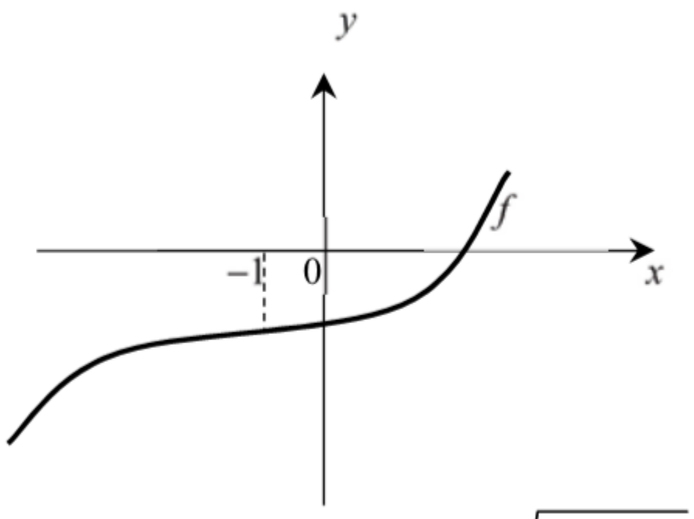
Vo všetkých doteraz uvedených príkladoch môžeme pri zisťovaní inflexného bodu funkcie f postupovať buď podľa definície 3.8.2 alebo podľa viet 3.8.2 – 3.8.4. Teraz ukážeme príklad, kde sa nutná a postačujúca podmienka existencie inflexného bodu nedá použiť, teda budeme musieť postupovať podľa definície inflexného bodu.

Príklad 3.8.7 Ak existujú, nájdime inflexné body funkcie $f: y=\sqrt[3]{(x+1)^5}-4$.

Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine R. Budeme hľadať body, ktoré by mohli byť inflexnými bodmi. Podľa nutnej podmienky existencie inflexného bodu to znamená zistiť, či rovnica $f''(x_0)=0$. Teda

$$f'(x)=\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2} \qquad , \qquad f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}},\ \text{pre}\ \ x\neq -1$$

Zistíme, že síce neexistuje taký bod x_0, pre ktorý by platilo $f''(x_0)=0$, ale funkcia f je v bode -1, hoci tento bod nie je z definičného oboru druhej derivácie, spojitá a existujú $f''_-(-1)=-\infty$, $f''_+(-1)=\infty$. Čo znamená, že v ľavom okolí bodu -1 je funkcia f konkávna a v pravom konvexná. Pretože existuje $f'(-1)=0$, funkcia f má podľa definície 3.8.2 v bode -1 inflexný bod.



Obr. 3.8.7 Inflexný bod funkcie $f: y=\sqrt[3]{(x+1)^5}-4$ na jej grafe

ÚLOHY

V nasledujúcich úlohách nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f. Z definície určite inflexné body funkcie f, ak existujú.

3.8.1 a) $f: y=x^3-9x^2+1$

b) $f: y=x^4-2x^3-7$

c) $f: y=x^4+4x^3-18x^2+3x$

d) $f: y=x^4-x^5$

e) $f: y=\frac{x^6}{6}-\frac{x^5}{4}+3$

f) $f: y=3x-(4-x)^5$

g) $f: y=x^4+2x^2\cdot(x+3)$

h) $f: y=-(x-1)^2\cdot(x-3)^2$

3.8.2 a) $f: y=x+\frac{1}{x}$

b) $f: y=3x+\frac{1}{2x^2}$

c) $f: y=\frac{3x^2}{1-x}$

d) $f: y=\frac{x^2+x+2}{x+2}$

e) $f: y=\frac{2x}{1+x^2}$

f) $f: y=\frac{x}{1-x^2}$

g) $f: y=\frac{x^2}{16-x^2}$

h) $f: y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

i) $f: y=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}$

j) $f: y=\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x}$

k) $f: y=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)^2$

l) $f: y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

3.8.3 a) $f: y=3x-\sqrt{x-3}$

b) $f: y=4+\sqrt[3]{x^2}$

c) $f: y=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $f: y=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$

3.8.4 a) $f: y = x \cdot e^{-x}$

b) $f: y = e^{-x^2}$

c) $f: y = x \cdot e^{-x^2}$

d) $f: y = x^2 \cdot e^{-x}$

e) $f: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

f) $f: y = e^{4-\frac{x^2}{2}}$

g) $f: y = e^{1-\frac{x^3}{3}}$

h) $f: y = e^{2x} - 8e^x + 5x$

i) $f: y = \left(2 - x^2\right) \cdot e^{-x}$

j) $f: y = \dfrac{e^x}{x}$

3.8.5 a) $f: y = x - \ln x$

b) $f: y = x \cdot \ln x$

c) $f: y = \ln \dfrac{x-1}{x}$

d) $f: y = \ln \sin x$

e) $f: y = \ln \sqrt{1 + x^2}$

f) $f: y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$

3.8.6 a) $f: y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

b) $f: y = 4x + \operatorname{arctg} x$

c) $f: y = x - \operatorname{arccotg} \dfrac{x}{2}$

d) $f: y = x \cdot \operatorname{arctg} x$

V nasledujúcich úlohách zistite inflexné body funkcie f, ak existujú.

3.8.7 a) $f: y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2$

b) $f: y = 4x^3 - 3x^4$

c) $f: y = \dfrac{x^5}{10} - \dfrac{x^3}{3} + 1$

d) $f: y = 3x^5 - 5x^4 + 4$

e) $f: y = 3 + (2 - x)^4$

f) $f: y = 5x - (2 - x)^5$

g) $f: y = x + \dfrac{1}{x+1}$

h) $f: y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

3.8.8 a) $f: y = x + \sqrt[3]{x^2}$

b) $f: y = 2x + \sqrt[3]{(x-1)^5}$

c) $f: y = \left(x^2 - 4x - 3\right) \cdot e^x$

d) $f: y = \ln \dfrac{x}{1-x}$

3.8.9 a) $f: y = \sin x + x$

b) $f: y = e^x \cdot \sin x$

c) $f: y = 2x + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$

d) $f: y = \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{x}$

3.8.10 Zistite, či je daná rastúca funkcia celkových nákladov pre danú produkciu konvexná alebo konkávna a ekonomicky interpretujte.

a) $C(x) = 125 + 2x - 0{,}01x^2$, $x \in \langle 0; 100 \rangle$

b) $C(x) = 50e^{0{,}01x}$, $x \in \langle 0; \infty)$

3.8.11 Daná je rastúca funkcia celkových príjmov pre danú predanú produkciu. Zistite, či je konvexná alebo konkávna a ekonomicky interpretujte.

a) $R(x) = 0{,}015x^2 + 6x$, $x \in \langle 0; \infty)$

b) $R(x) = x \cdot \sqrt{324 - x}$, $x \in \langle 0; 216)$

Výsledky

3.8.1 a) konvexná na $\langle 3; \infty)$; konkávna na $(-\infty; 3\rangle$; $x_0 = 3$; **b)** konvexná na $(-\infty; 0\rangle, \langle 1; \infty)$; konkávna na $\langle 0; 1\rangle$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; **c)** konvexná na $(-\infty; -3\rangle$, $\langle 1; \infty)$; konkávna na $\langle -3; 1\rangle$; $x_1 = -3$, $x_2 = 1$; konkávna na $\left\langle \frac{3}{2}; \infty\right)$; **d)** konvexná na $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right\rangle$; konkávna na $\left\langle \frac{3}{5}; \infty\right)$; $x_0 = \frac{3}{5}$; **e)** konvexná na $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 1; \infty)$; konkávna na $\langle 0; 1\rangle$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; **f)** konvexná na $\langle 4; \infty)$; konkávna na $(-\infty; 4\rangle$; $x_0 = 4$; **g)** konvexná na $(-\infty; \infty)$; nemá; **h)** konvexná na $\left\langle 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$; konkávna na $\left(-\infty; 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle, \left\langle 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$; $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

3.8.2 a) konvexná na $(0; \infty)$; konkávna na $(-\infty; 0)$; nemá; **b)** konvexná na $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$; nemá; **c)**konvexná na $(-\infty; 1)$; konkávna na $(1; \infty)$; nemá; **d)** konvexná na $(-2; \infty)$; konkávna na $(-\infty; -2)$; nemá; **e)** konvexná na $\langle -\sqrt{3}; 0\rangle$, $\langle \sqrt{3}; \infty)$; konkávna na $(-\infty; -\sqrt{3}\rangle$, $\langle 0; \sqrt{3}\rangle$; $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$; **f)** konvexná na $(-\infty; -1)$, $\langle 0; 1)$; konkávna na $(-1; 0\rangle$, $(1; \infty)$; $x_0 = 0$; **g)** konvexná na $(-4; 4)$; konkávna na $(-\infty; -4)$, $(4; \infty)$; nemá; **h)** konvexná na $(-\infty; -1)$, $(1; \infty)$; konkávna na $(-1; 1)$; nemá; **i)** konvexná na $(-\infty; -2\rangle$, $(0; \infty)$; konkávna na $\langle -2; 0)$; $x_0 = -2$; **j)** konvexná na $(-\infty; -1\rangle$, $(0; 1\rangle$; konkávna na $\langle -1; 0)$, $\langle 1; \infty)$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; **k)** konvexná na $\langle -3; 0)$, $(0; \infty)$; konkávna na $(-\infty; -3\rangle$; $x_0 = -3$; l) konvexná na $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$; nemá

3.8.3 a) konvexná na $\langle 3; \infty)$; nemá; **b)** konkávna na $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 0; \infty)$; nemá; **c)** konvexná na $(-\infty; 0\rangle$; konkávna na $\langle 0; \infty)$; $x_0 = 0$; **d)** konvexná na $\langle 2; \infty)$; konkávna na $\langle -1; 0\rangle$, $\langle 0; 2\rangle$; $x_0 = 2$

3.8.4 a) konvexná na $\langle 2; \infty)$; konkávna na $(-\infty; 2\rangle$; $x_0 = 2$; **b)** konvexná na $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$, $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$; konkávna na $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$; $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **c)** konvexná na $\left\langle -\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right\rangle$,

$\left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}; \infty \right)$; konkávna na $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}} \right\rangle, \left\langle 0; \sqrt{\frac{3}{2}} \right\rangle$; $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$;

d) konvexná na $\left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right\rangle, \left\langle 2+\sqrt{2}; \infty\right)$; konkávna na $\left\langle 2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\right\rangle$; $x_1 = 2-\sqrt{2}$, $x_2 = 2+\sqrt{2}$; **e)** konvexná na $(0; \infty)$; konkávna na $(-\infty; 0)$; nemá; **f)** konvexná na $\left(-\infty; -1\right\rangle, \left\langle 1; \infty\right)$; konkávna na $\left\langle -1; 1\right\rangle$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; **g)** konvexná na $\left(-\infty; 0\right\rangle$, $\left\langle \sqrt[3]{2}; \infty\right)$; konkávna na $\left\langle 0; \sqrt[3]{2}\right\rangle$; $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{2}$; **h)** konvexná na $\left\langle \ln 2; \infty\right)$; konkávna na $\left(-\infty; \ln 2\right\rangle$; $x_0 = \ln 2$; **i)** konvexná na $\left\langle 0; 4\right\rangle$; konkávna na $\left(-\infty; 0\right\rangle, \left\langle 4; \infty\right)$; $x_1 = 0$, $x_2 = 4$; **j)** konvexná na $(0; \infty)$; konkávna na $(-\infty; 0)$; nemá

3.8.5 a) konvexná na $(0; \infty)$; nemá; **b)** konvexná na $(0; \infty)$; nemá; **c)** konvexná na $(-\infty; 0)$; konkávna na $(1; \infty)$; nemá; **d)** konkávna na $\bigcup_{k \in Z} \left(2k\pi; (2k+1)\pi\right)$; nemá; **e)** konvexná na $\left\langle -1; 1\right\rangle$; konkávna na $\left(-\infty; -1\right\rangle, \left\langle 1; \infty\right)$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; **f)** konvexná na $\left\langle \sqrt{e}; \infty\right)$; konkávna na $\left(0; \sqrt{e}\right\rangle$; $x_0 = \sqrt{e}$

3.8.6 a) konvexná na $(0; \infty)$; konkávna na $(-\infty; 0)$; nemá; **b)** konvexná na $\left(-\infty; 0\right\rangle$; konkávna na $\left\langle 0; \infty\right)$; $x_0 = 0$; **c)** konvexná na $\left\langle 0; \infty\right)$; konkávna na $\left(-\infty; 0\right\rangle$; $x_0 = 0$; **d)** konvexná na $(-\infty; \infty)$; nemá

3.8.7 a) $x_0 = -1$; **b)** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$; **c)** $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; **d)** $x_0 = 1$; **e)** nemá; **f)** $x_0 = 2$; **g)** nemá; **h)** $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$

3.8.8 a) nemá; **b)** $x_0 = 1$; **c)** $x_1 = -3$, $x_2 = 3$; **d)** $x_0 = \frac{1}{2}$

3.8.9 a) $x_k = k\pi$, $k \in Z$; **b)** $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$; **c)** $x_0 = 0$; **d)** nemá

3.8.10 a) konkávna; zvyšovaním výroby náklady na každú ďalšiu vyrobenú jednotku produkcie klesajú; **b)** konvexná; zvyšovaním výroby náklady na každú ďalšiu vyrobenú jednotku produkcie rastú

3.8.11 a) konvexná; zvyšovaním predaja produkcie príjmy na každú ďalšiu predanú jednotku produkcie rastú; **b)** konkávna; zvyšovaním predaja produkcie príjmy na každú ďalšiu predanú jednotku produkcie klesajú

3.9 Extrémy funkcie

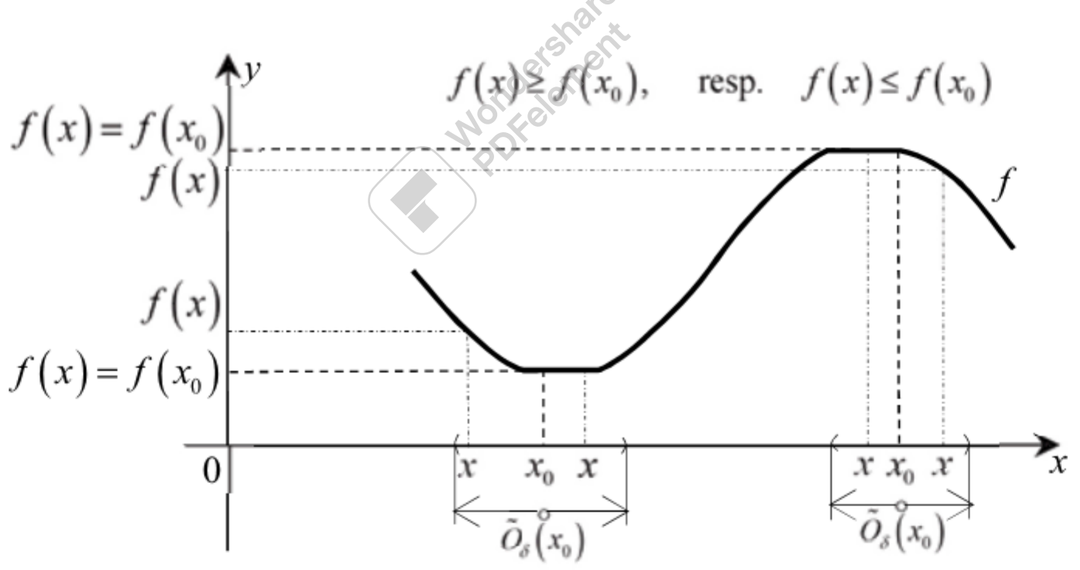
V nasledujúcej podkapitole sa budeme zaoberať zisťovaním, či funkcia môže mať lokálny extrém a ak áno, aký typ lokálneho extrému má. Pri funkciách jednej reálnej premennej rozlišujeme dva typy extrémov, a to maximum alebo minimum. Každé z nich môže byť buď lokálnym alebo globálnym. Ukážeme spôsoby určenia lokálnych extrémov, v prípade ak existujú.

Definícia 3.9.1 (*lokálne minimum, lokálne maximum funkcie*) Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in D(f)$ ***lokálne maximum***, resp. ***lokálne minimum***, ak existuje také neúplné okolie $\tilde{O}_\delta(x_0)$, že pre všetky $x \in \tilde{O}_\delta(x_0) \cap D(f)$ platí

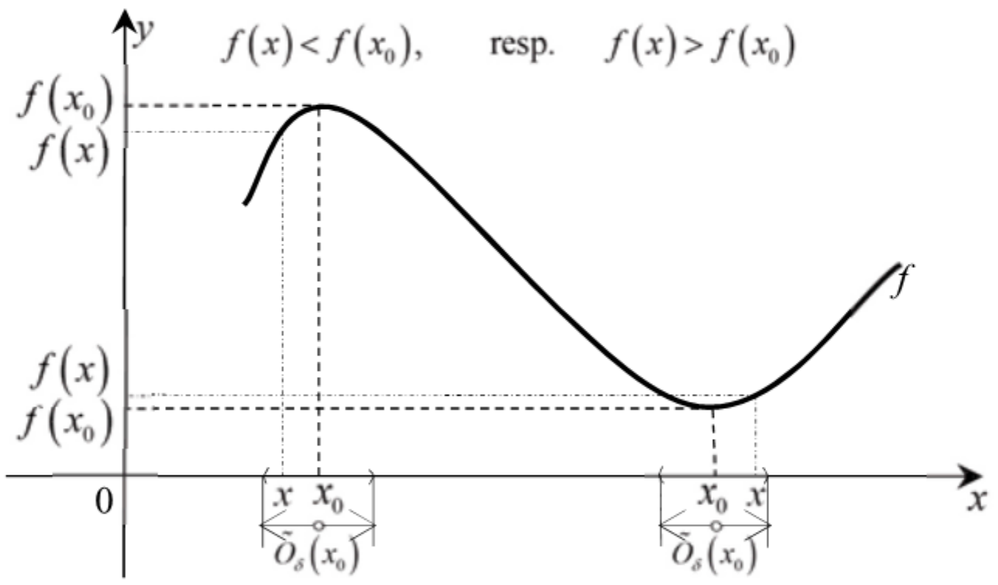
$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Poznámka 3.9.1 V prípade, že v predchádzajúcom vzťahu platí ostrá nerovnosť, hovoríme o ***ostrom lokálnom maxime***, resp. ***ostrom lokálnom minime***.

Grafické zobrazenie lokálnych extrémov funkcie f je na nasledujúcich obrázkoch. Na obr. 3.9.1 sú znázornené lokálne extrémy funkcie f v bode x_0, lokálne minimum a lokálne maximum a na obrázku 3.9.2 sú znázornené ostré lokálne extrémy funkcie f v bode x_0, ostré lokálne maximum a ostré lokálne minimum.



Obr. 3.9.1 Grafické zobrazenie lokálnych extrémov funkcie f



Obr. 3.9.2 Grafické zobrazenie ostrých lokálnych extrémov funkcie f

Veta 3.9.1 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému) Nech funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O_\delta(x_0)$ a nech funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém. Ak existuje v tomto bode derivácia $f'(x_0)$, tak

$$f'(x_0)=0$$

Poznámka 3.9.2 Bod x_0, v ktorom $f'(x_0)=0$, nazývame ***stacionárnym bodom*** funkcie f.

Veta 3.9.2 (1. postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) Nech funkcia f je diferencovateľná na nejakom okolí $O_\delta(x_0)$, v bode x_0 spojitá a nech

- pre všetky $x\in\tilde{O}_{\delta-}(x_0)$ je $f'(x)>0$ a $f'(x)<0$, potom funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne maximum,
- pre všetky $x\in\tilde{O}_{\delta-}(x_0)$ je $f'(x)<0$ a $f'(x)>0$, potom funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.

Veta 3.9.3 (2. postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) Nech x_0 je stacionárny bod funkcie f. Ak existuje $f''(x_0)\neq 0$, tak funkcia f má v bode x_0 ostrý lokálny extrém a platí:

Ak $f''(x_0)<0$, tak funkcia má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

Ak $f''(x_0)>0$, tak funkcia má v bode x_0 ostré lokálne minimum.

Príklad 3.9.1 Určime, ak existujú, lokálne extrémy funkcie

$$f: y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x\,.$$

Riešenie: Definičným oborom danej funkcie je množina R. Najprv zistíme, či existujú také body, v ktorých by mohla mať funkcia f lokálne extrémy. Pretože $f'(x)=x^2-2x-3$ je definovaná pre všetky $x\in R$, podľa vety 3.9.1 platí

$$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)\cdot(x-3)=0$$

Teda stacionárnymi bodmi sú body $x_1=-1$ a $x_2=3$.

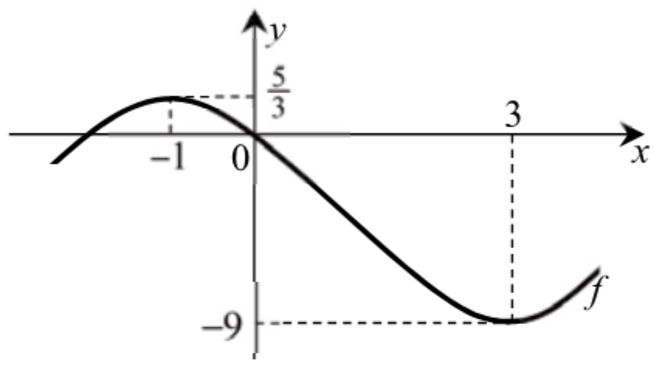
Vypočítame druhú deriváciu

$$f''(x)=2x-2$$

Pretože sú splnené podmienky vety 3.9.3, teda $f''(-1)=-4$ a $f''(3)=4$ sú rôzne od nuly, funkcia f má v stacionárnych bodoch x_1 a x_2 lokálne extrémy.

Vzhľadom na to, že $f''(-1)<0$ a , $f''(3)>0$ funkcia f má v bode $x_1=-1$ ostré lokálne maximum rovné funkčnej hodnote $f(-1)=\frac{5}{3}$ a v bode $x_2=3$ ostré lokálne minimum rovné funkčnej hodnote $f(3)=-9$.

Je zrejmé, že pri zisťovaní lokálnych extrémov danej funkcie, môžeme postupovať tiež podľa vety 3.9.2.



Obr. 3.9.3 Ostré lokálne extrémy funkcie $f: y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$

Príklad 3.9.2 Určime, ak existujú, lokálne extrémy funkcie

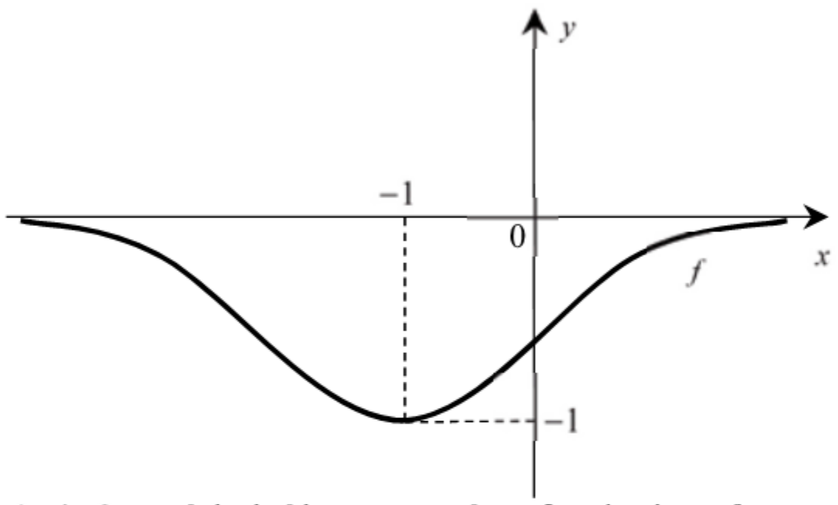
$$f: y = -e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}.$$

Riešenie: Na tomto príklade ukážeme použitie 1. postačujúcej podmienky existencie lokálneho extrému pri zisťovaní lokálnych extrémov danej funkcie.

Funkcia f je definovaná na množine R. Zistíme, či je funkcia f diferencovateľná. Vypočítame prvú deriváciu funkcie f

$$f'(x) = (x+1)\cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}, \quad x \in R$$

Pretože exponenciálny výraz $e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$ je vždy kladný, prvá derivácia mení znamienko iba v bode $x_0 = -1$. Funkcia f je v neúplnom δ okolí bodu $x_0 = -1$, t. j. v $\tilde{O}_\delta(-1)$, diferencovateľná a je v tomto bode spojitá. Potom podľa vety 4.9.2, pretože pre všetky $x \in \tilde{O}_{\delta-}(-1)$ je $f'(x) < 0$ (funkcia f je v neúplnom ľavom δ-okolí bodu -1 klesajúca) a pre všetky $x \in \tilde{O}_{\delta+}(-1)$ je $f'(x) > 0$ (funkcia f je v neúplnom pravom δ-okolí bodu -1 rastúca) dostávame, že funkcia má v bode $x_0 = -1$ ostré lokálne minimum rovné funkčnej hodnote $f(-1) = -1$.



Obr. 3.9.4 Ostré lokálny extrém funkcie $f: y = -e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$

Kým v predchádzajúcich príkladoch sme mohli pri zisťovaní lokálnych extrémov funkcie f použiť 1. postačujúcu alebo 2. postačujúcu podmienku existencie lokálneho extrému, v nasledujúcom príklade sa to nedá. Dá sa použiť len 1. postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému.

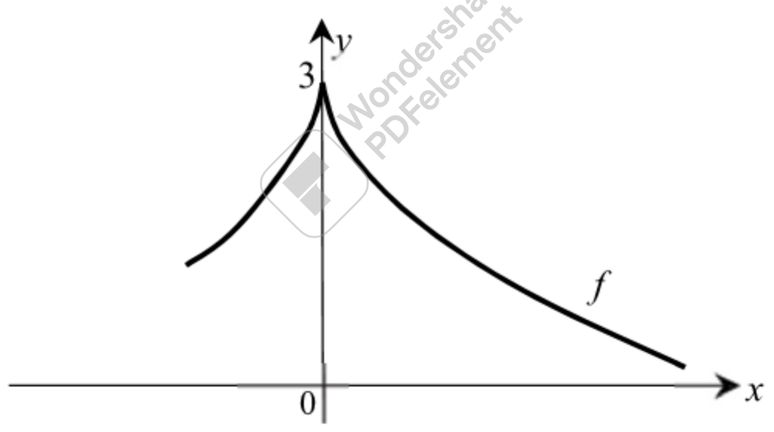
Príklad 3.9.3 Nájdime extrémy funkcie $f: y = 3 - \sqrt[3]{x^2}$.

Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine R. Najprv zistíme, podľa vety 3.9.1, či existujú body, v ktorých by funkcia f mohla nadobúdať lokálne extrémy. Vypočítame prvú deriváciu funkcie f

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Definičným oborom prvej derivácie funkcie f je množina $R - \{0\}$. Keďže rovnica $-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$ nemá riešenie v R, pre danú funkciu je množina stacionárnych bodov prázdna. To znamená, funkcia f by mohla mať extrém len v bode, v ktorom nie je prvá derivácia funkcie f definovaná, teda v bode $x_0 = 0$, ktorý je z definičného oboru funkcie f. Nemôžeme teda použiť vetu 3.9.3 a existenciu lokálneho extrému určíme pomocou 1. postačujúcej podmienky existencie lokálneho extrému.

Funkcia f je v neúplnom okolí δ-okolí bodu $x_0 = 0$, t. j. $\tilde{O}_\delta(0)$, diferencovateľná a je v tomto bode spojitá. Pre všetky $x \in \tilde{O}_{\delta-}(0)$ je $f'(x) > 0$ (funkcia f je v neúplnom ľavom δ-okolí bodu $x_0 = 0$ rastúca) a pre všetky $x \in \tilde{O}_{\delta+}(x_0)$ je $f'(x) < 0$ (funkcia f je v neúplnom pravom δ-okolí bodu $x_0 = 0$ klesajúca) dostávame, že funkcia f má v bode $x_0 = 0$ ostré lokálne maximum rovné funkčnej hodnote $f(0) = 3$.



Obr. 3.9.5 Ostré lokálne extrémy funkcie $f(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Veta 3.9.4 (všeobecná postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí $O_\delta(x_0)$ a nech má v bode x_0 derivácie

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Potom platí

1. Ak n je párne číslo a $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\left[f^{(n)}(x_0) < 0 \right]$, tak funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne minimum [ostré lokálne maximum].
2. Ak n je nepárne číslo a $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\left[f^{(n)}(x_0) < 0 \right]$, tak funkcia f nemá v bode x_0 ostrý lokálny extrém, pričom funkcia f je v okolí bodu x_0 rastúca [klesajúca].

Príklad 3.9.4 Určime, ak existujú, lokálne extrémy funkcie $f: y = \frac{x^4}{4} - x^3$.

Riešenie: Funkcia f a jej prvá derivácia $f'(x) = x^3 - 3x^2$ sú definované pre všetky $x \in R$.
Nájdeme stacionárne body danej funkcie, t. j. body, v ktorých by funkcia f mohla mať extrém.
Riešením rovnice

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

sú body $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$.
Vypočítame druhú deriváciu funkcie f

$$f''(x) = 3x^2 - 6x$$

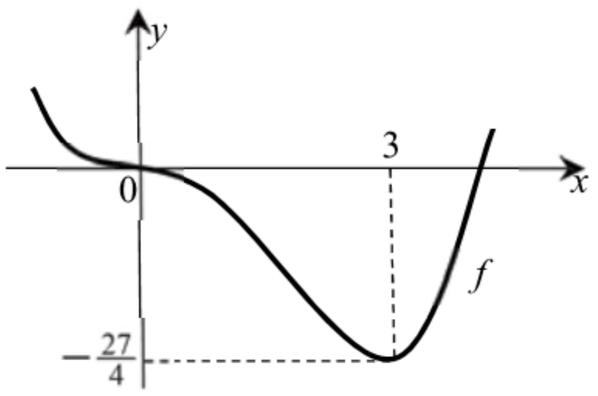
a dosadíme do nej stacionárne body x_1, x_2

$$f''(0) = 0 \qquad \text{a} \qquad f''(3) = 9$$

Keďže $f''(3) > 0$, funkcia f má v bode $x_2 = 3$ ostré lokálne minimum rovné funkčnej hodnote $f(3) = -\frac{27}{4}$.
Pretože $f''(0) = 0$, nie je splnený predpoklad vety 3.9.3, nemôžeme na určenie extrému použiť postačujúcu podmienku. V takomto prípade existenciu a charakter lokálneho extrému zistíme pomocou vety 3.9.4. To znamená, že budeme počítať vyššie derivácie funkcie f v bode $x_1 = 0$ dovtedy, kým nenájdeme prvú nenulovú deriváciu v tomto bode.
Vypočítame tretiu deriváciu a dostávame

$$f'''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f'''(0) = -6$$

Zistili sme, že $f^{(n)}(0) = -6 \neq 0$ pre $n = 3$, kde n je nepárne číslo. Podľa vety 3.9.4 funkcia f v bode $x_1 = 0$ nemá extrém. V okolí bodu $x_1 = 0$ je funkcia f klesajúca.



Obr. 3.9.6 Ostré lokálne extrémy funkcie $f: y = \frac{x^4}{4} - x^3$

Príklad 3.9.5 Živnostník vyrába a predáva istý úžitkový predmet . Dopyt po jeho výrobkoch za deň v kusoch je daný funkciou $x(p) = 24 - \frac{p}{3}$, kde p je cena v € a $x \in \langle 0;12 \rangle$. Celkové náklady tohto živnostníka za deň sú dané funkciou $C(x) = \frac{x^3}{3} - 6{,}5x^2 + 42x + 100$ v €. Určime

a) pre aký počet kusov úžitkového predmetu živnostník dosahuje maximálny zisk;
b) jednotkovú cenu, ktorá maximalizuje. zisk a
c) výšku maximálneho zisku.

Riešenie: Vieme, že sa funkcia celkového zisku $P(x)$ určí zo vzťahu

$$P(x)=R(x)-C(x)=p(x)x-C(x)$$

Po vyjadrení závislosti ceny od dopytu $p(x)=72-3x$ a dosadení tejto funkcie a funkcie celkových nákladov do predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$P(x)=(72-3x)\cdot x-\left(\frac{x^3}{3}-6,5x^2+42x+100\right)$$

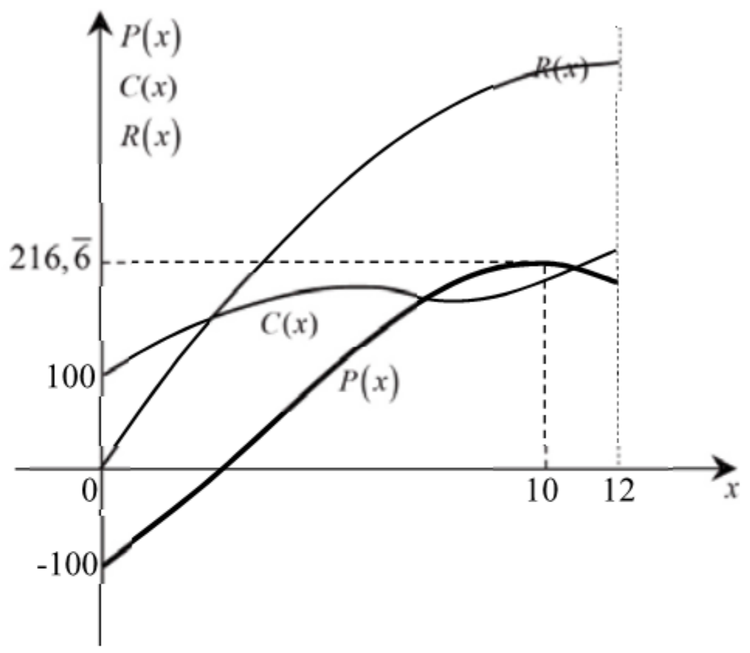
$$P(x)=-\frac{x^3}{3}+3,5x^2+30x-100$$

a) Funkcia celkových nákladov $P(x)$ je diferencovateľná na intervale $\langle 0;12\rangle$, a teda dostávame $P'(x)=-x^2+7x+30$. Podľa vety 3.9.1 z rovnice $-x^2+7x+30=0$ určíme stacionárny bod $x_0=10$. Jeho následným dosadením do druhej derivácie $P''(x)=-2x+7$ dostávame, že $P''(10)=-13$. Podľa vety 3.9.3 vzhľadom na fakt, že $P''(10)<0$ teda platí, že živnostník dosahuje maximálny zisk pre 10 kusov vyrobeného a predaného úžitkového predmetu za deň.

b) Jednotkovú cenu pre maximálny zisk si určíme po dosadení $x_0=10$ do dopytovej funkcie vyjadrujúcej závislosť ceny od dopytu, teda $p(10)=72-3\cdot 10=42$. Z toho dostávame, že živnostník predáva jeden kus úžitkového predmetu za cenu 42 €.

c) Pretože živnostník dosahuje maximálny zisk pre $x_0=10$, čiže pri výrobe a predaji 10 kusov úžitkového predmetu, jeho veľkosť určíme zo ziskovej funkcie nasledovne $P(10)=-\frac{10^3}{3}+3,5\cdot 10^2+30\cdot 10-100=216,\overline{6}$.

Živnostník dosahuje maximálny zisk $216,\overline{6}$ € za deň.



Obr. 3.9.7 Lokálny extrém na grafe funkcie $P(x)$, graf funkcií $C(x)$, $R(x)$

ÚLOHY

V nasledujúcich úlohách nájdite lokálne extrémy funkcie f, ak existujú.

3.9.1 a) $f: y = x^2 - 6x + 1$

b) $f: y = 3 + 10x - 5x^2$

c) $f: y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

d) $f: y = x - \frac{16}{3}x^3$

e) $f: y = (x+2)^2 \cdot (x+5)$

f) $f: y = -(1-x) \cdot (x-3)^2$

g) $f: y = -(x+1)^2 \cdot (x-3)^2$

h) $f: y = (2x+1)^2 \cdot (2x-1)^2$

i) $f: y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$

j) $f: y = x^4 + 2x^3 - 3$

k) $f: y = 1 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}$

l) $f: y = x^5 + x^3 + 1$

3.9.2 a) $f: y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

b) $f: y = \frac{x^2}{x+3}$

c) $f: y = \frac{2x+1}{x^2}$

d) $f: y = \frac{x}{1+x^2}$

e) $f: y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

f) $f: y = 1 + \frac{1}{x^2 - x}$

g) $f: y = \frac{x^3}{x^2+1}$

h) $f: y = \frac{x^4+1}{x^2}$

i) $f: y = \frac{1}{x^4 - 1}$

j) $f: y = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 2x}$

3.9.3 a) $f: y = |x-1| + x$

b) $f: y = x - 2 - |2x-1|$

c) $f: y = |x^2 + x + 1|$

d) $f: y = |9 - x^2| - 2x$

e) $f: y = x + \left|\frac{x^3}{3}\right|$

f) $f: y = \left|\frac{x^3}{3}\right| - \frac{x^2}{2}$

3.9.4 a) $f: y = x - \sqrt{x-1}$

b) $f: y = 2x + \sqrt{2x-1}$

c) $f: y = 4 - \sqrt[3]{x}$

d) $f: y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$

e) $f: y = 2 - \sqrt[3]{(2-x)^2}$

f) $f: y = 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2x$

g) $f: y = x\sqrt{9-x}$

h) $f: y = (5-x)\sqrt[3]{x^2}$

3.9.5 a) $f: y = x \cdot e^{-x}$

b) $f: y = (4-x) \cdot e^{4-x}$

c) $f: y = (x^2+1) \cdot e^{-x}$

e) $f: y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

f) $f: y = x + e^{-x}$

g) $f: y = e^x + e^{-x}$

d) $f: y = e^{-x^2}$

h) $f: y = \dfrac{e^x}{x+1}$

3.9.6 a) $f: y = x \cdot \ln x$

b) $f: y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$

c) $f: y = \dfrac{1}{x} + \ln x$

d) $f: y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

e) $f: y = \ln\left(4x - x^2\right)$

f) $f: y = \ln^2 x - 2\ln x$

g) $f: y = \ln\dfrac{x-1}{x+1}$

h) $f: y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

i) $f: y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{2x}}$

j) $f: y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$

3.9.7 a) $f: y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$

b) $f: y = x - \operatorname{arctg} 2x$

c) $f: y = \operatorname{arctg} x^2$

d) $f: y = \operatorname{arctg}\sin x$

e) $f: y = \sqrt{1 - \cos x}$

f) $f: y = x + \cos 2x,\ x \in (0;\pi)$

g) $f: y = 4x - \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

h) $f: y = x + \ln\cos x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

3.9.8 Aké budú rozmery otvoreného bazéna, ktorého objem má byť $32\,\mathrm{m}^3$ a ktorý má mať štvorcové dno, aby na jeho vymurovanie bolo treba minimálne množstvo materiálu?

3.9.9 Určite rozmery konzervovej plechovky tvaru valca a objemu V, ktorá je z hľadiska spotreby plechu najúspornejšia.

3.9.10 Celkové náklady na výrobu x jednotiek určitého tovaru sú dané funkciou $C(x) = 0{,}01x^3 + 10x + 160$. Aký veľký musí byť objem výroby, aby priemerné náklady na jednotku tovaru boli najmenšie?

3.9.11 Pre danú funkciu dopytu a celkových nákladov zistite množstvo výrobkov, ktoré sa musia vyrábať a predávať, aby sa dosiahlo maximum zisku. Určite hodnotu maximálneho zisku a predajnú cenu, ktorá tento zisk maximalizuje.

a) $p(x) = 18 - 2x$
$C(x) = 3 + 6x$

b) $p(x) = 33 - x$
$C(x) = x^2 - 7x + 15$

c) $p(x) = 45 - 3x$
$C(x) = 5x + x^2$

d) $p(x) = 7 - 0{,}02x$
$C(x) = 300 + 3x - 0{,}01x^2$

e) $p(x) = 20 - \dfrac{x}{8}$
$C(x) = 340 + 32x - 0{,}2x^2$

f) $p(x) = 30 - 13{,}5x$
$C(x) = -x^3 + 6x + 3$

3.9.12 Pre každú funkciu dopytu v nasledujúcich úlohách určite množstvo produkcie, pre ktoré sa dosahujú maximálne príjmy a predajnú cenu, ktorá je výsledkom týchto príjmov.

a) $p(x) = 21 - 0,7x$

b) $p(x) = 24 - 0,5x^2$

c) $p(x) = (3 - 0,025x)^2$

d) $p(x) = \dfrac{50}{5 - 4x}$

e) $p(x) = 6e^{-0,02x}$

f) $p(x) = \sqrt{243 - 9x}$

3.9.13 Je daná funkcia celkových príjmov $R(x) = 81x - 3x^2$ a funkcia celkových nákladov $C(x) = x^3 - 39x^2 + 6x + 125$. Určite množstvo

a) predaných kg stavebného materiálu, ktorý maximalizuje celkové príjmy;
b) vyrobených a predaných kg stavebného materiálu, ktorý maximalizuje celkový zisk.

3.9.14 Je daná dopytová funkcia $p(x) = 22 - 0,5x$ a funkcia priemerných nákladov $\tilde{C}(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - 8,5x + 50 + \dfrac{90}{x}$. Určite počet

a) predaných výrobkov, ktorý maximalizuje celkové príjmy;
b) vyrobených a predaných výrobkov, ktorý maximalizuje celkový zisk.

3.9.15 Je daná dopytová funkcia $p(x) = 45 - 0,5x$ a funkcia priemerných nákladov $\tilde{C}(x) = x^2 - 8x + 57 + \dfrac{2}{x}$. Určite množstvo

a) predanej produkcie v hektolitroch, ktoré maximalizuje celkové príjmy;
b) vyrobenej produkcie v hektolitroch, ktoré minimalizuje marginálne náklady;
c) vyrobenej a predanej produkcie v hektolitroch, ktoré maximalizuje celkový zisk.

3.9.16 Množstvo zásob v sklade, m ton určitého tovaru, sa v priebehu mesiaca mení s časom t podľa funkcie $m(t)$,

$$m(t) = 0,01t^3 + 0,15t^2 - 18t + 300.$$

Určite kedy budú zásoby najmenšie a akú hodnotu v tonách predstavujú po 20 dňoch.

3.9.17 V istej uhoľnej bani pracuje x pracovníkov v zmene. Ich výkon v, v tonách uhlia, je daný funkciou

$$v(x) = \frac{x^2}{25}\left(3 - \frac{x}{12}\right).$$

a) Zistite, pri akom počte pracovníkov v zmene bude výkon najvyšší.
b) Kedy sa dosiahne v zmene najväčší priemerný výkon na pracovníka?
c) Vypočítajte priemerný výkon za zmenu v prípade a) a porovnajte ho s údajom v prípade b).

3.9.18 Firma prenajíma týždenne byty istej kategórie za p peňažných jednotiek. $p=\sqrt{225-10x}$, kde x je počet prenajatých bytov. Pri akej cene dosiahne firma maximálny príjem?

Výsledky

3.9.1 a) v bode $x_0=3$ ostré lokálne minimum, $f(3)=-8$; **b)** v bode $x_0=1$ ostré lokálne maximum, $f(1)=8$; **c)** v bode $x_1=-1$ ostré lokálne maximum, $f(-1)=12$; v bode $x_2=3$ ostré lokálne minimum, $f(3)=-20$; d) v bode $x_1=-\frac{1}{4}$ ostré lokálne minimum, $f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{6}$; v bode $x_2=\frac{1}{4}$ ostré lokálne maximum, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}$; **e)** v bode $x_1=-4$ ostré lokálne maximum, $f(-4)=4$; v bode $x_2=-2$ ostré lokálne minimum, $f(-2)=0$; **f)** v bode $x_1=\frac{5}{3}$ ostré lokálne maximum, $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{32}{27}$; v bode $x_2=3$ ostré lokálne minimum, $f(3)=0$; **g)** v bode $x_1=-1$ ostré lokálne maximum, $f(-1)=0$; v bode $x_2=1$ ostré lokálne minimum, $f(1)=-16$; v bode $x_3=3$ ostré lokálne maximum, $f(3)=0$; **h)** v bode $x_1=-\frac{1}{2}$ ostré lokálne minimum, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$; v bode $x_2=0$ ostré lokálne maximum, $f(0)=1$; v bode $x_3=\frac{1}{2}$ ostré lokálne minimum, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$; **i)** v bode $x_0=1$ ostré lokálne minimum, $f(1)=-\frac{1}{12}$; **j)** v bode $x_0=-\frac{3}{2}$ ostré lokálne minimum, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{75}{16}$; k) v bode $x_1=-1$ ostré lokálne minimum, $f(-1)=\frac{19}{20}$; v bode $x_2=0$ ostré lokálne maximum, $f(0)=1$; **l)** nemá.

3.9.2 a) v bode $x_1=-2$ ostré lokálne maximum, $f(-2)=-2$; v bode $x_2=2$ ostré lokálne minimum, $f(2)=2$; **b)** v bode $x_1=-6$ ostré lokálne maximum, $f(-6)=-12$; v bode $x_2=0$ ostré lokálne minimum, $f(0)=0$; **c)** v bode $x_0=-1$ ostré lokálne minimum, $f(-1)=-1$; **d)** v bode $x_1=-1$ ostré lokálne minimum, $f(-1)=-\frac{1}{2}$; v bode $x_2=1$ ostré lokálne maximum, $f(1)=\frac{1}{2}$; **e)** v bode $x_0=0$ ostré lokálne minimum, $f(0)=1$; **f)** v bode $x_0=\frac{1}{2}$ ostré lokálne maximum, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-3$; g) nemá; **h)** v bode $x_1=-1$ ostré lokálne minimum, $f(-1)=2$; v bode $x_2=1$ ostré lokálne minimum, $f(1)=2$; **i)** v bode $x_0=0$ ostré lokálne maximum, $f(0)=-1$; **j)** v bode $x_1=-1$ ostré lokálne minimum, $f(-1)=0$; v bode $x_2=\frac{1}{2}$ ostré lokálne maximum $f\left(\frac{1}{2}\right)=-3$.

3.9.3 a) v bodoch $x \in \langle -\infty; 1 \rangle$ lokálne minimum, $f(x) = 1$; **b)** v bode $x_0 = \frac{1}{2}$ ostré lokálne maximum, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$; **c)** v bode $x_0 = -\frac{1}{2}$ ostré lokálne minimum, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$; **d)** v bode $x_1 = -3$ ostré lokálne minimum, $f(-3) = 6$; v bode $x_2 = -1$ ostré lokálne maximum, $f(-1) = 10$; v bode $x_3 = 3$ ostré lokálne minimum, $f(3) = -6$; **e)** v bode $x_0 = -1$ ostré lokálne minimum, $f(-1) = -\frac{2}{3}$; **f)** v bode $x_1 = -1$ ostré lokálne minimum, $f(-1) = -\frac{1}{6}$; v bode $x_2 = 0$ ostré lokálne maximum, $f(0) = 0$; v bode $x_3 = 1$ ostré lokálne minimum, $f(1) = -\frac{1}{6}$.

3.9.4 a) v bode $x_0 = \frac{5}{4}$ ostré lokálne minimum, $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4}$; **b)** nemá; **c)** nemá; **d)** v bode $x_0 = 0$ ostré lokálne maximum, $f(0) = 1$; **e)** v bode $x_0 = 2$ ostré lokálne maximum, $f(2) = 2$; **f)** v bode $x_1 = -1$ ostré lokálne minimum, $f(-1) = 2$; v bode $x_2 = 0$ ostré lokálne maximum, $f(0) = 3$; **g)** v bode $x_0 = 6$ ostré lokálne maximum, $f(6) = 6\sqrt{3}$; **h)** v bode $x_1 = 0$ ostré lokálne minimum, $f(0) = 0$; v bode $x_2 = 2$ ostré lokálne maximum $f(2) = 3\sqrt[3]{4}$.

3.9.5 a) v bode $x_0 = 1$ ostré lokálne maximum, $f(1) = \frac{1}{e}$; **b)** v bode $x_0 = 5$ ostré lokálne minimum, $f(5) = -\frac{1}{e}$; **c)** nemá; **d)** v bode $x_0 = 0$ ostré lokálne maximum, $f(0) = 1$; **e)** v bode $x_1 = -1$ ostré lokálne minimum, $f(-1) = -\frac{\sqrt{e}}{e}$; v bode $x_2 = 1$ ostré lokálne maximum $f(1) = \frac{\sqrt{e}}{e}$; **f)** v bode $x_0 = 0$ ostré lokálne minimum, $f(0) = 1$; **g)** v bode $x_0 = 0$ ostré lokálne minimum, $f(0) = e + \frac{1}{e}$; **h)** v bode $x_0 = 0$ ostré lokálne minimum, $f(0) = 1$.

3.9.6 a) v bode $x_0 = \frac{1}{e}$ ostré lokálne minimum, $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$; **b)** v bode $x_0 = 1$ ostré lokálne minimum, $f(1) = \frac{1}{2}$; **c)** v bode $x_0 = 1$ ostré lokálne minimum, $f(1) = 1$; **d)** v bode $x_0 = 1$ ostré lokálne maximum, $f(1) = 1$; **e)** v bode $x_0 = 2$ ostré lokálne maximum, $f(2) = \ln 4$; **f)** v bode $x_0 = e$ ostré lokálne minimum, $f(e) = -1$; **g)** nemá; **h)** v bode $x_0 = \sqrt{e}$ ostré lokálne maximum, $f\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2e}$; **i)** v bode $x_0 = e^2$ ostré lokálne maximum, $f\left(e^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{e}$; **j)** v bode $x_1 = 1$ ostré lokálne minimum, $f(1) = 0$; v bode $x_2 = e^2$ ostré lokálne

maximum, $f\left(e^2\right)=\frac{4}{e^2}$.

3.9.7 a) nemá; b) v bode $x_1=-\frac{1}{2}$ ostré lokálne maximum, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi-2}{4}$; v bode $x_2=\frac{1}{2}$ ostré lokálne minimum, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2-\pi}{4}$; **c)** v bode $x_0=0$ ostré lokálne minimum, $f\left(0\right)=0$; **d)** v bode $x_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ostré lokálne minimá, $f\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=-\frac{\pi}{4}$; v bode $x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ostré lokálne maximá, $f\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\frac{\pi}{4}$; **e)** v bode $x_{2n}=2n\pi$ ostré lokálne minimá, $f\left(2n\pi\right)=0$; v bode $x_{2n+1}=\left(2n+1\right)\pi$ ostré lokálne maximá, $f\left(\left(2\pi+1\right)\pi\right)=\sqrt{2}$;

f) v bode $x_1=\frac{\pi}{12}$ ostré lokálne maximum, $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi+6\sqrt{3}}{12}$; v bode $x_2=\frac{5\pi}{12}$ ostré lokálne minimum, $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{12}$; **g)** v bode $x_1=-\frac{\pi}{3}$ ostré lokálne minimum, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}-4\pi}{3}$; v bode $x_2=\frac{\pi}{3}$ ostré lokálne maximum, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{3}$;

h) v bode $x_0=\frac{\pi}{4}$ ostré lokálne maximum, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+ln\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.9.8 $a=4m$, $b=2m$.

3.9.9 $v=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=2r$.

3.9.10 20 výrobkov.

3.9.11 a) pre 3 výrobky; 15 p. j.; 12 p. j.; **b)** pre 10 výrobkov; 185 p. j.; 23 p. j.; **c)** pre 5 výrobkov; 100 p. j.; 30 p. j.; **d)** pre 200 výrobkov; 100 p. j.; 3 p. j.; **e)** nemá; **f)** pre 1 výrobok; 8,5 p. j.; 16,5 p. j.

3.9.12 a) pre 15 výrobkov; 10,5 p. j.; **b)** pre 4 výrobky; 16 p. j.; **c)** pre 40 výrobky; 4 p. j.; **d)** neexistuje; **e)** pre 50 výrobkov; 2,2 p. j.; **f)** pre 18 výrobkov; 9 p. j.

3.9.13 a) pre 13,5 kg materiálu; 546,75 p. j.; **b)** pre 25 kg materiálu; 8625 p. j.

3.9.14 a) pre 22 výrobkov; 242 p. j.; **b)** pre 14 výrobkov; $171,\overline{3}$ p. j.

3.9.15 a) pre 45 hl; 1012,5 p. j.; **b)** pre $\frac{8}{3}$ hl; $35,\overline{6}$ hl; **c)** pre 4 hl; 6 p. j.

3.9.16 po 20 dňoch; 80 ton.

3.9.17 a) pri 24 pracovníkoch je maximálny výkon 23,04 tony; **b)** pri 18 pracovníkoch je priemerný výkon 1,08 tony.

3.9.18 pri cene 8,66 p. j. dosiahne maximálny príjem 129,9 p. j.

3.10 Priebeh funkcie

V predchádzajúcich podkapitolách sme ukázali, ako sa vyšetrujú niektoré vlastnosti funkcií použitím derivácií funkcie. Teraz ukážeme, ako tieto poznatky využijeme na vyšetrenie priebehu funkcie, ktorý nám umožní zostrojiť graf funkcie.

Jeden zo spôsobov, ako postupovať pri zisťovaní priebehu funkcie f, je nasledovný:

1. Určíme definičný obor funkcie $D(f)$, body nespojitosti funkcie, priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami a zistíme intervaly, na ktorých je funkcia kladná a na ktorých záporná.
2. Vyšetríme párnosť, nepárnosť a periodičnosť funkcie.
3. Vyšetríme jednostranné limity v bodoch nespojitosti, limity funkcie v nevlastných bodoch $-\infty$ a ∞, limity, či hodnoty v krajných bodoch definičného oboru. Zistíme ohraničenosť funkcie.
4. Určíme intervaly monotónnosti funkcie.
5. Určíme lokálne extrémy funkcie.
6. Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie.
7. Určíme inflexné body funkcie.
8. Určíme asymptoty grafu funkcie.
9. Zostrojíme graf funkcie.

Príklad 3.10.1 Vyšetrime priebeh funkcie

$$f: y = x^2 + 1 + \frac{2}{x}.$$

Riešenie: 1. Definičný obor funkcie je $D(f) = R - \{0\}$. Funkcia f nie je spojitá v bode 0. Graf funkcie f nemá priesečník s osou y.

Priesečník s osou x dostaneme, ak $y = 0$, teda

$$x^2 + 1 + \frac{2}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3 + x + 2}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+1)\cdot(x^2 - x + 2)}{x} = 0$$

Keďže jediným riešením je $x = -1$, bod $x = -1$ je bod, v ktorom graf funkcie f pretína os x.

Zistíme intervaly, na ktorých je daná funkcia kladná, resp. záporná. Teda pre aké $x \in D(f)$ platí $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$. Riešením jednej z nerovníc $\frac{(x+1)\cdot(x^2 - x + 2)}{x} < 0$, resp. $\frac{(x+1)\cdot(x^2 - x + 2)}{x} > 0$ dostaneme interval $(-1; 0)$, na ktorom je funkcia f záporná a intervaly $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$, na ktorých je funkcia f kladná.

2. Pretože $D(f) = R - \{0\}$, je splnená podmienka

$$\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$$

Keďže

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 + \frac{2}{-x} = x^2 + 1 - \frac{2}{x}, \quad x \in D(f)$$

neplatí ani jedna z rovností

$$f(-x)=f(x), \quad \text{resp.} \quad f(-x)=-f(x)$$

To znamená, že funkcia f nie je párna ani nepárna.

Funkcia $f: y=x^2+1+\frac{2}{x}=\frac{x^3+x+2}{x}$ je racionálne lomená a tie nie sú periodické, teda ani funkcia f nie je periodická.

3. Vyšetríme jednostranné limity v bode nespojitosti $x=0$ a limity funkcie v nevlastných bodoch $-\infty$ a ∞.

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+1+\frac{2}{x}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(x^2+1+\frac{2}{x}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x^2+1+\frac{2}{x}\right)=\infty, \qquad \lim_{x\to \infty}\left(x^2+1+\frac{2}{x}\right)=\infty$$

Funkcia f je neohraničená.

4. Aby sme určili intervaly, na ktorých je funkcia f rastúca a na ktorých klesajúca, riešime jednu z nerovníc $f'(x)>0$, resp. $f'(x)<0$.

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}=\frac{2(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x^2}, \quad x\in D(f)$$

Znamienko prvej derivácie funkcie f ovplyvňuje len výraz $x-1$, pretože výrazy x^2 a x^2+x+1 sú pre všetky $x\in R-\{0\}$ vždy kladné. Vzhľadom na to sa znamienko prvej derivácie môže meniť len v okolí bodu $x=1$. Teda stačí uvažovať, kedy $x-1>0$, resp. $x-1<0$.

Funkcia f je klesajúca na intervaloch $(-\infty;0)$, $(0;1\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 1;\infty)$.

5. Stacionárnym bodom funkcie je riešenie rovnice $f'(x)=0$. Potom v stacionárnom bode $x=1$ môžu byť lokálne extrémy. Pretože v ľavom okolí tohto bodu je funkcia klesajúca a v pravom okolí rastúca a funkcia je v tomto bode spojitá, funkcia f má v danom bode ostré lokálne minimum, $f(1)=4$.

6. Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f zistíme riešením nerovníc

$$f''(x)>0, \quad \text{resp.} \quad f''(x)<0$$

$$f''(x)=2+\frac{4}{x^3}=\frac{2(x^3+2)}{x^3}=\frac{2(x+\sqrt[3]{2})\cdot(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2^2})}{x^3}, \quad x\in D(f)$$

Výraz $(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2^2})$ je pre $x\in R-\{0\}$ vždy kladný. Znamienko druhej derivácie závisí od výrazov $(x+\sqrt[3]{2})$ a x^3, teda mení sa v okolí $x_1=-\sqrt[3]{2}$ a $x_2=0$. Potom

Tab. 3.10.1

	$\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)$	$\left(-\sqrt[3]{2};0\right)$	$\left(0;\infty\right)$
$x+\sqrt[3]{2}$	$-$	$+$	$+$
x^3	$-$	$-$	$+$
$f''(x)=\dfrac{2\left(x^3+2\right)}{x^3}$	$+$	$-$	$+$

Funkcia f je konvexná na intervaloch $\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right\rangle$, $\left\langle-\sqrt[3]{2};0\right)$ a konkávna na intervale $\left(0;\infty\right)$.

7. Funkcia f je v bode $x=-\sqrt[3]{2}$ spojitá a diferencovateľná. V ľavom okolí tohto bodu je konvexná a súčasne v pravom konkávna. Potom bod $-\sqrt[3]{2}$ je inflexný bod funkcie.

8. Bod $x=0$ je bodom nespojitosti funkcie f a platí

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+1+\frac{2}{x}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(x^2+1+\frac{2}{x}\right)=\infty$$

Potom asymptotou bez smernice je priamka $x=0$.

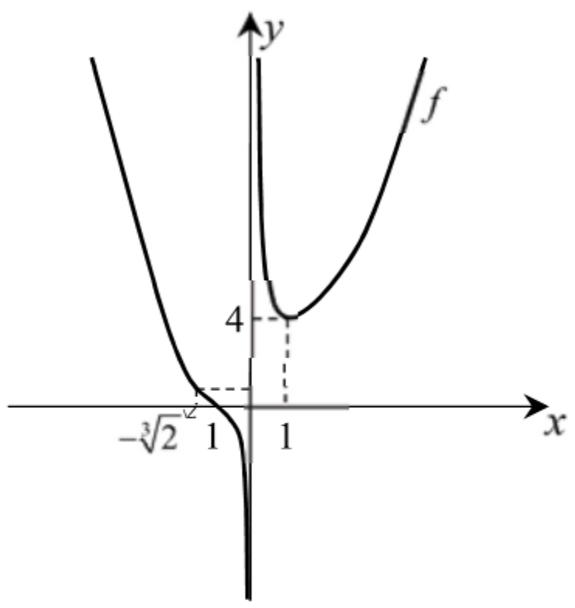
Zistíme asymptoty so smernicou $x=kx+q$.

$$k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1+\frac{2}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=\infty$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=-\infty$$

Ani jedna z limít nie je reálne číslo, funkcia f asymptoty so smernicou nemá.

9. Využitím výsledkov v bodoch 1 - 8 zostrojíme graf danej funkcie.



Obr. 3.10.1 Graf funkcie $f: y=x^2+1+\dfrac{2}{x}$

Príklad 3.10.2 Vyšetrime priebeh funkcie

$$f: y = \frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}.$$

Riešenie: 1. Pretože $D(f) = R - \{\pm 1\}$. Funkcia f je nespojitá v bodoch $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$.

Zistíme priesečníky s osou x a y. Pretože $\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, graf funkcie f pretína os x a os y v začiatku súradnicovej sústavy, teda v bode $[0;0]$.

Výraz v čitateli je pre $x \in D(f)$ vždy kladný a preto pre $x \in (-1;1)$ je $\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)} > 0$, teda funkcia f je na tomto intervale kladná a pre $x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$ je $\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)} < 0$. Preto je funkcia f na množine $(-\infty;-1) \cup (1;\infty)$ záporná.

2 Pretože $D(f) = R - \{\pm 1\}$,

$$\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$$

Keďže

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{2\left(1-(-x)^2\right)} = \frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)} = f(x), \quad x \in R$$

funkcia f je párna.

Funkcia f je racionálne lomená, teda funkcia f nie je periodická.

3. Vyšetríme jednostranné limity v bodoch nespojitosti $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. a limity funkcie v nevlastných bodoch $-\infty$ a ∞.

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}\right) = \infty, \qquad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}\right) = -\infty$$

$$\ldots \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}\right) = -\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}\right) = -\frac{1}{2}$$

Funkcia f je neohraničená.

4. Na zistenie intervalov monotónnosti funkcie f riešime jednu z nerovníc

$$f'(x) > 0, \text{ resp. } f'(x) < 0$$

$$f'(x) = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^2}, \qquad x \in R - \{\pm 1\}$$

Funkcia f je spojitá na intervaloch $(-\infty;-1)$, $(-1;0\rangle$, $\langle 0;1)$ a $(1;\infty)$. Výraz v menovateli je pre $x \in D(f)$ vždy kladný, preto je na intervaloch $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$ $f'(x)<0$ a na intervaloch $(0;1)$, $(1;\infty)$ je $f'(x)>0$. Teda funkcia f je na intervaloch $(-\infty;-1)$, $(-1;0\rangle$ klesajúca a na intervaloch $\langle 0;1)$, $(1;\infty)$ rastúca.

5. Pretože stacionárnym bodom funkcie f je riešenie rovnice $f'(x)=0$, v bode $x=0$ môže byť lokálny extrém. Funkcia f je v bode $x=0$ spojitá. V ľavom okolí bodu $x=0$ je funkcia f klesajúca a súčasne v pravom okolí rastúca, teda funkcia f má v tomto bode ostré lokálne minimum, $f(0)=0$.

6. Na zistenie intervalov konvexnosti a konkávnosti riešime nerovnice

$$f''(x)>0, \quad \text{resp.} \quad f''(x)<0$$

$$f''(x)=\frac{3x^2+1}{\left(1-x^2\right)^3}, \qquad x \in R-\{\pm 1\}$$

Pre všetky $x \in R-\{\pm 1\}$ je čitateľ druhej derivácie vždy kladný, znamienko druhej derivácie sa môže meniť len v bodoch, v ktorých funkcia f nie je definovaná. Funkcia f je na intervaloch $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ a $(1;\infty)$ spojitá. Pretože na intervale $(-1;1)$ je $f''(x)>0$ a na intervaloch $(-\infty;-1)$, $(1;\infty)$ $f''(x)<0$, funkcia f je na intervale $(-1;1)$ konvexná a na intervaloch $(-\infty;-1)$, $(1;\infty)$ konkávna.

7. Funkcia f nemá inflexné body, pretože v bodoch $x_1=-1$, $x_2=1$, v ktorých druhá derivácia mení znamienko, nie je definovaná.

8. Body $x_1=-1$, $x_2=1$ sú bodmi nespojitosti funkcie f a platí

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}\right)=\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}\right)=-\infty$$

Potom asymptotami bez smernice sú priamky $x=-1$ a $x=1$.

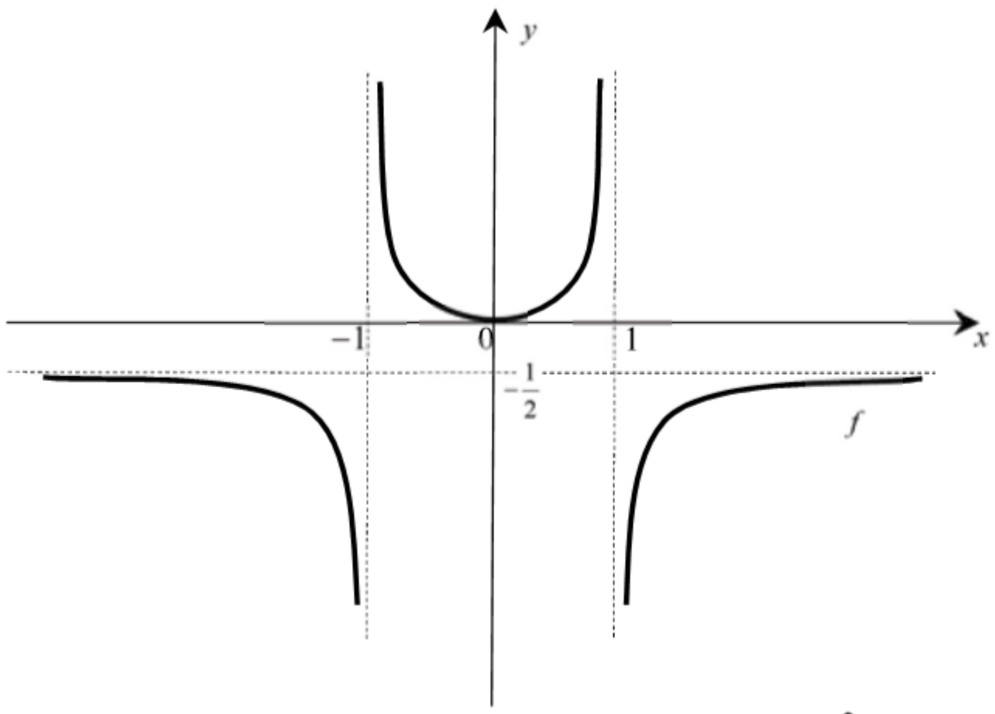
Zistíme asymptoty so smernicou $x=kx+q$.

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2\left(1-x^2\right)}=0$$

$$q_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-k_1\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}=-\frac{1}{2}$$

Asymptota so smernicou je priamka $y=-\frac{1}{2}$.

9. Zostrojíme graf funkcie f .



Obr. 3.10.2 Graf funkcie $f : y = \dfrac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}$

Príklad 3.10.3 Vyšetrime priebeh funkcie

$$f: y = 8x \cdot e^x .$$

Riešenie: 1. Definičný obor funkcie je $D(f) = R$. Funkcia f je spojitá na svojom definičnom obore.

Nájdeme priesečníky so súradnicovými osami. Priesečník s osou x dostaneme, ak $y = 0$, teda ak $8x \cdot e^x = 0$. Pretože výraz $e^x \neq 0$ pre všetky $x \in R$, jediným riešením je $x = 0$. Potom graf funkcie f pretína súradnicové osi v začiatku súradnicovej sústavy, v bode $[0; 0]$.

Zistíme intervaly, na ktorých je daná funkcia kladná, resp. záporná. Pretože pre všetky $x \in R$ je výraz e^x vždy kladný, tak pre $x \in (0;\infty)$ je $8xe^x > 0$ a pre $x \in (-\infty; 0)$ je $8xe^x < 0$. Funkcia f je na intervale $(-\infty; 0)$ záporná a na intervale $(0;\infty)$ kladná.

2. Pretože $D(f) = R$, je splnená podmienka

$$\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$$

Keďže

$$f(-x) = 8(-x) \cdot e^{-x} = -8x \cdot e^{-x} \quad , \quad x \in D(f)$$

neplatí ani jedna z rovností

$$f(-x) = f(x), \quad \text{resp.} \quad f(-x) = -f(x)$$

To znamená, že funkcia f nie je párna ani nepárna.

Funkcia f nie je periodická.

3. Funkcia f je na R spojitá, preto vypočítame len limity funkcie v nevlastných bodoch $-\infty$ a ∞ .

$$\lim_{x\to-\infty} 8x \cdot e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{-e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} 8x \cdot e^x = \infty$$

Funkcia f je zhora neohraničená

4. Aby sme určili intervaly, na ktorých je funkcia f rastúca a na ktorých klesajúca, riešime jednu z nerovníc $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$.

$$f'(x) = 8e^x + 8x \cdot e^x = 8e^x \cdot (1 + x), \quad x \in D(f)$$

Znamienko prvej derivácie funkcie f ovplyvňuje len výraz $1 + x$, pretože výraz $8e^x$ je pre všetky $x \in R$ vždy kladný. Vzhľadom na to sa znamienko prvej derivácie môže meniť len v okolí bodu $x = -1$. Teda stačí uvažovať, kedy $1 + x > 0$, resp. $1 + x < 0$.

Funkcia f je klesajúca na intervaloch $(-\infty; -1\rangle$ a rastúca na intervale $\langle -1; \infty)$.

5. Stacionárnym bodom funkcie je riešenie rovnice $f'(x) = 0$. Potom v stacionárnom bode $x = -1$ môžu byť lokálne extrémy. Pretože v ľavom okolí tohto bodu je funkcia klesajúca a v pravom okolí rastúca a funkcia je v tomto bode spojitá, funkcia f má v danom bode ostré lokálne minimum, $f(-1) = -\frac{8}{e}$.

6. Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f zistíme riešením nerovníc

$$f''(x) > 0, \quad \text{resp.} \quad f''(x) < 0$$

$$f''(x) = 8e^x \cdot (1 + x) + 8e^x = 8e^x \cdot (2 + x), \quad x \in D(f)$$

Teda pre $x \in (-2; \infty)$ je $2 + x > 0$ a pre $x \in (-\infty; -2)$ je $2 + x < 0$. Potom funkcia f je na intervale $\langle -2; \infty)$ konvexná a na intervale $(-\infty; -2\rangle$ konkávna.

7. Funkcia f je v bode $x = -2$ spojitá a diferencovateľná. V ľavom okolí tohto bodu je konkávna a súčasne v pravom konvexná. Potom bod -2 je inflexný bod funkcie f.

8. Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$, preto nemá asymptoty bez smernice.

Zistíme asymptoty so smernicou $x = kx + q$:

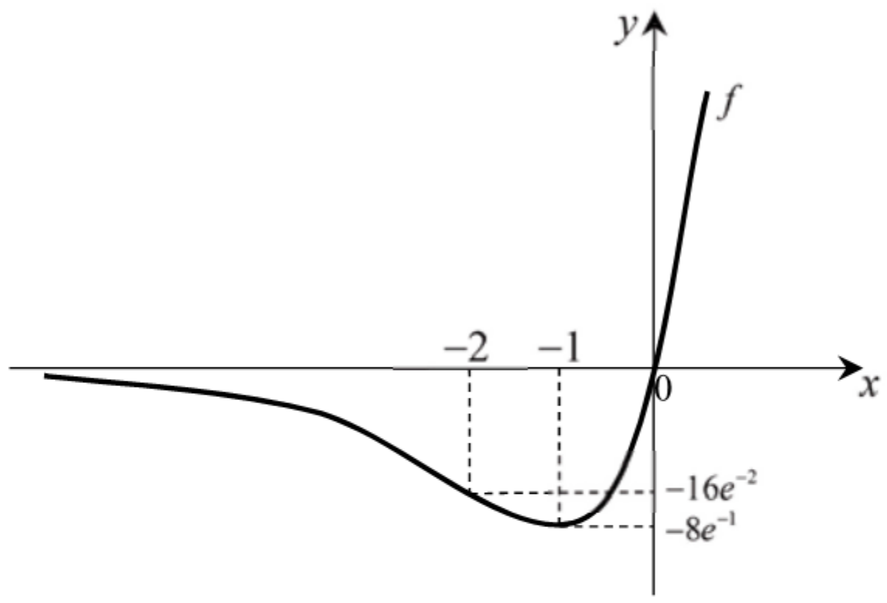
$$k_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{8x \cdot e^x}{x} = \lim_{x \to \infty} 8e^x = \infty,$$

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} 8e^x = 0,$$

$$q_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_2 \cdot x) = \lim_{x \to -\infty} 8x \cdot e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{8x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{-e^{-x}} = 0.$$

Asymptota so smernicou je priamka $y = 0$.

9. Využitím výsledkov v bodoch 1 až 8 zostrojíme graf danej funkcie.



Obr. 3.10.1 Graf funkcie $f: y = 8x \cdot e^x$

ÚLOHY

Vyšetrite priebeh funkcie funkcií f .

3.10.1 a) $f: y = 2x^3 - 3x^2$

b) $f: y = 4x^3 - 3x^4$

c) $f: y = 3x^5 - 5x^3$

d) $f: y = (1-x)^3 \cdot (x+1)^4$

3.10.2 a) $f: y = \dfrac{4x+2}{x^2}$

b) $f: y = \dfrac{5x}{x^2+1}$

c) $f: y = x + \dfrac{1}{x}$

d) $f: y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 8$

e) $f: y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

f) $f: y = \dfrac{x}{1-x^2}$

3.10.3 a) $f: y = 3\sqrt[3]{x^2} - x$

b) $f: y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3.10.4 a) $f: y = x \cdot e^{-x^2}$

b) $f: y = x^2 \cdot e^{-x}$

c) $f: y = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

d) $f: y = \dfrac{e^x}{x}$

3.10.5 a) $f: y = \ln(1-x^2)+1$

b) $f: y = \dfrac{1+\ln x}{x}$

3.10.6 a) $f: y = |x-1| - x^2$

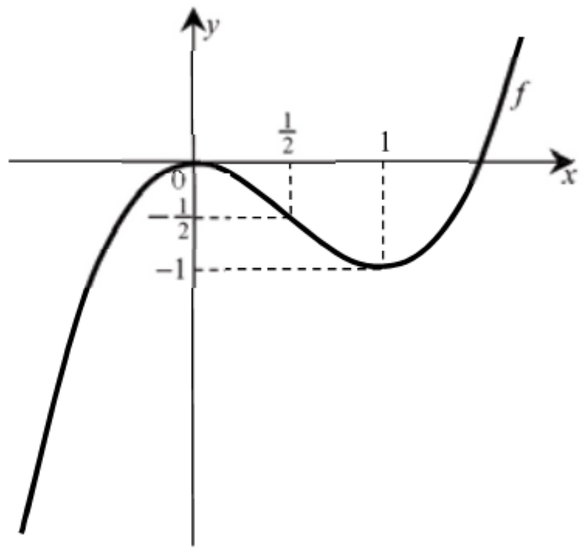
b) $f: y = |x^2-1| - 1$

3.10.7 a) $f: y = \cos^3 x - 3\cos x$

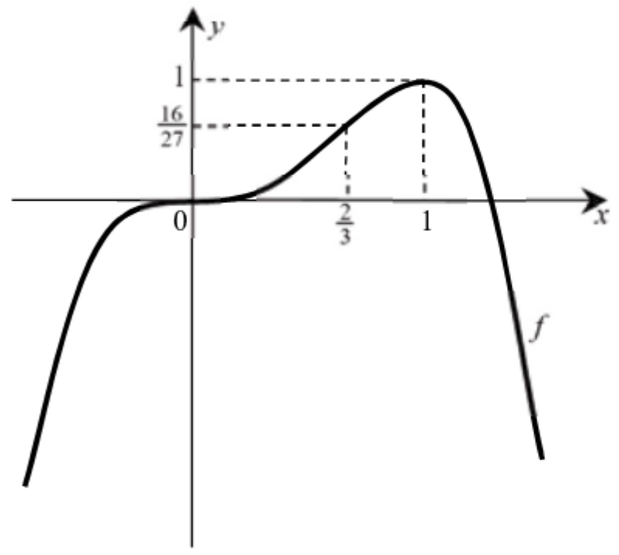
b) $f: y = x \cdot \operatorname{arctg} x$

Výsledky

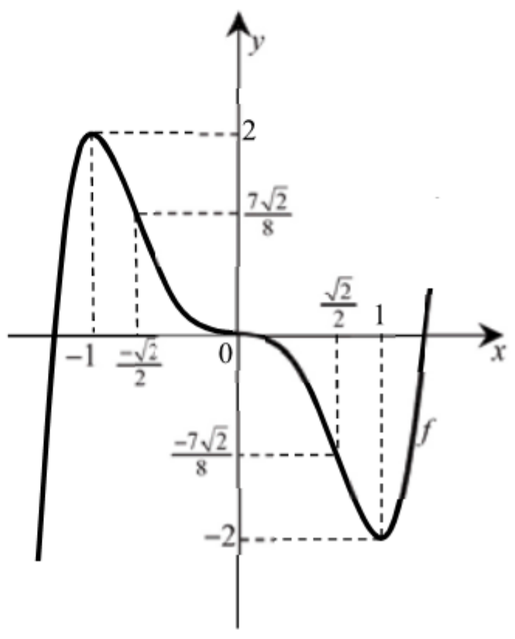
3.10.1 a)



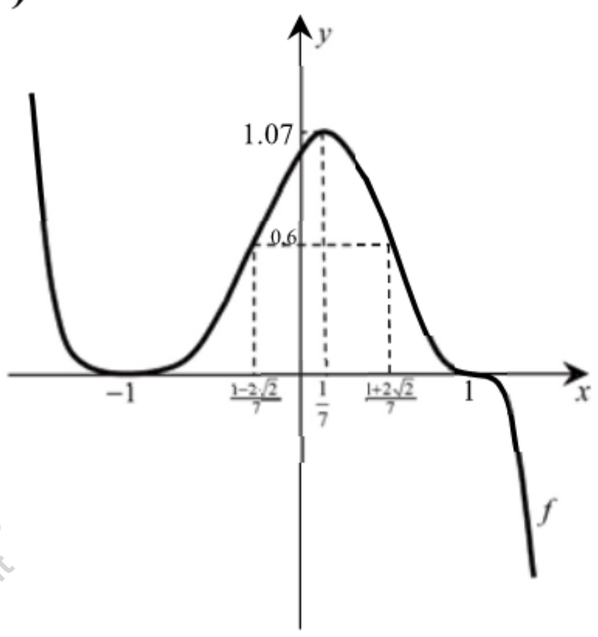
b)



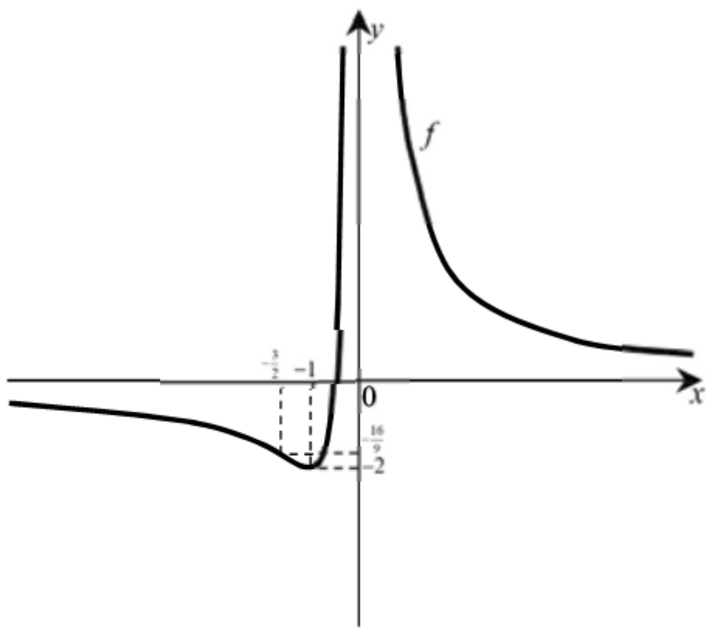
c)



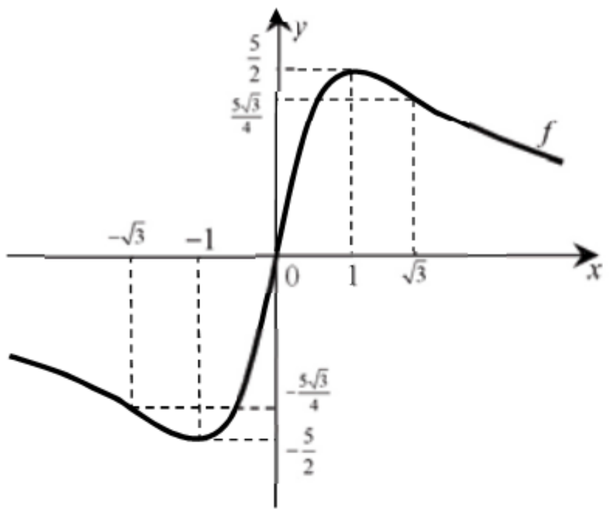
d)



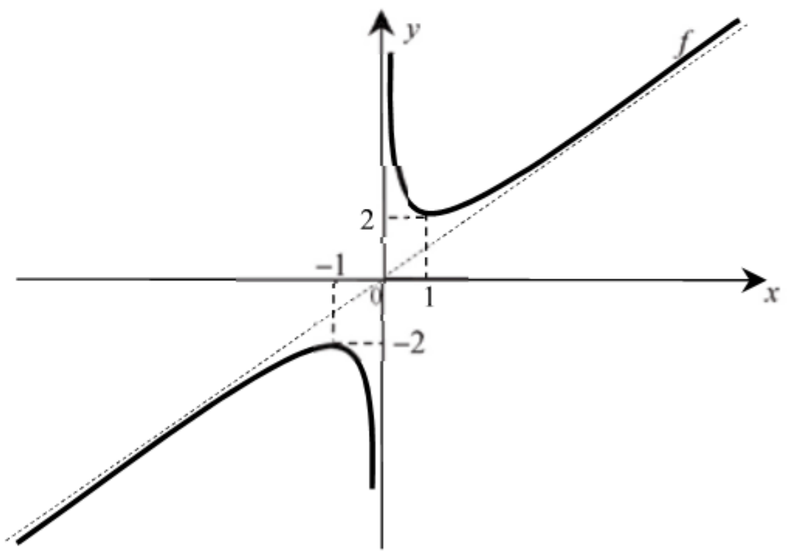
3.10.2 a)



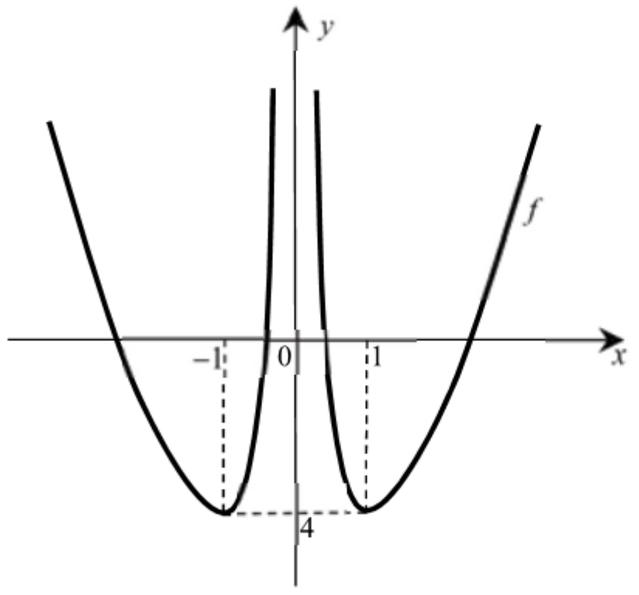
b)



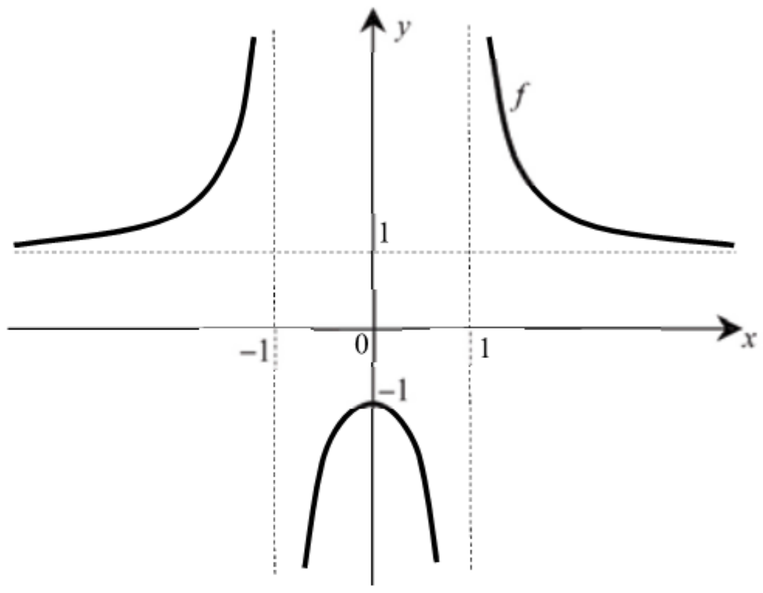
c)



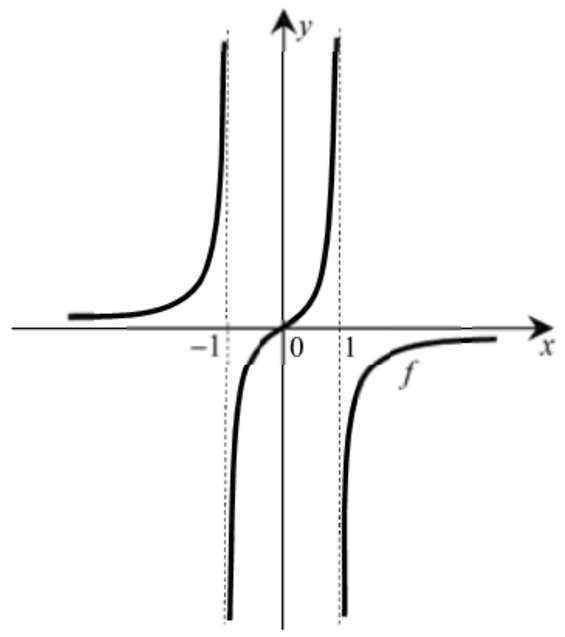
d)



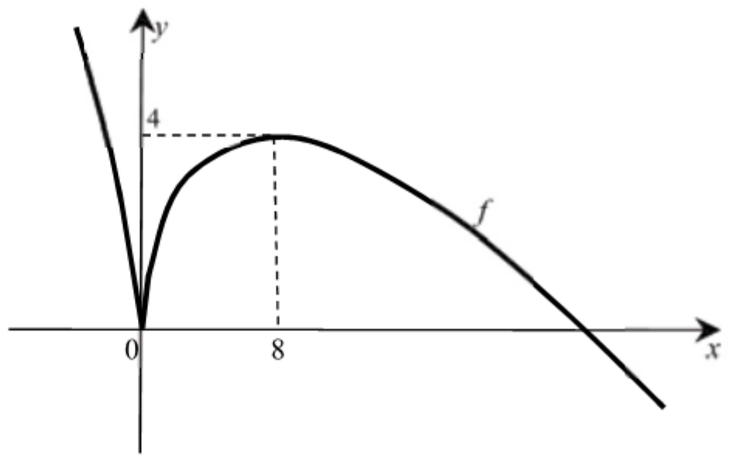
e)



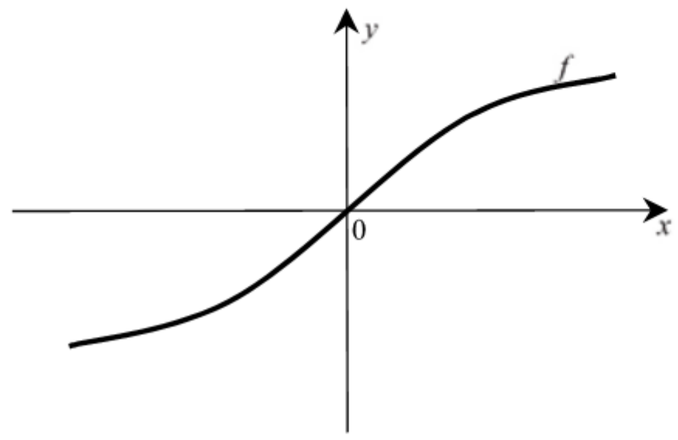
f)



3.10.3 a)

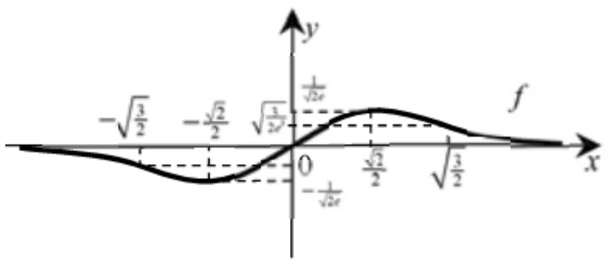


b)

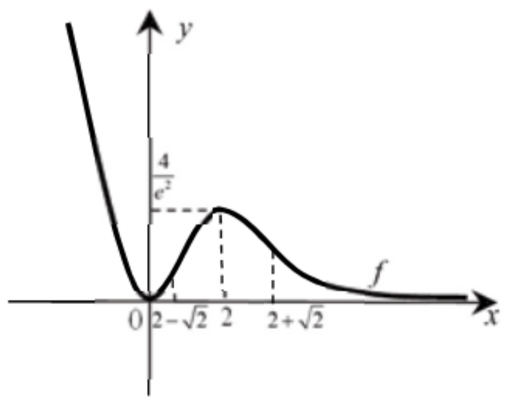


3.10.4

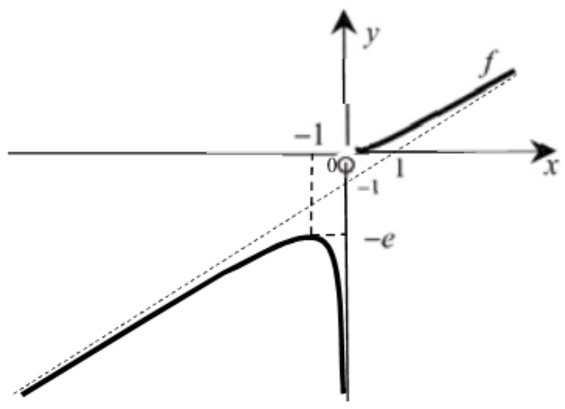
a)



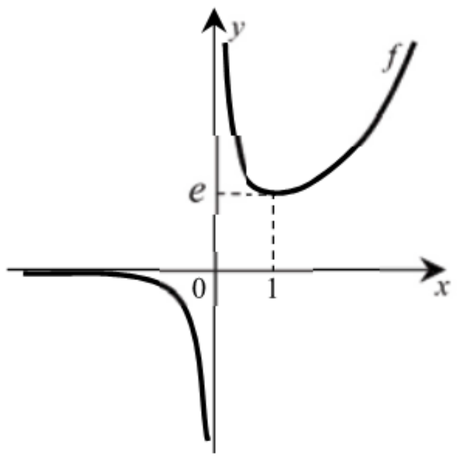
b)



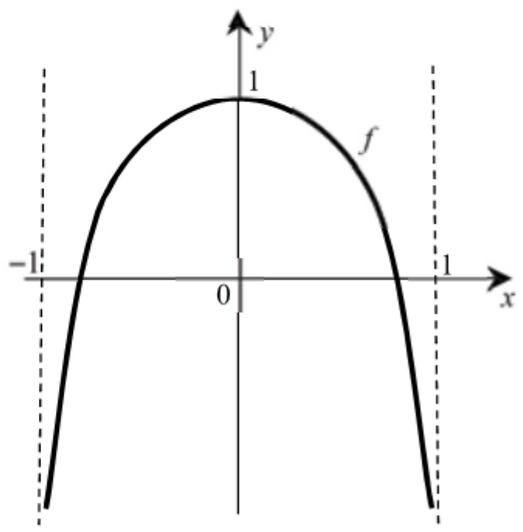
c)



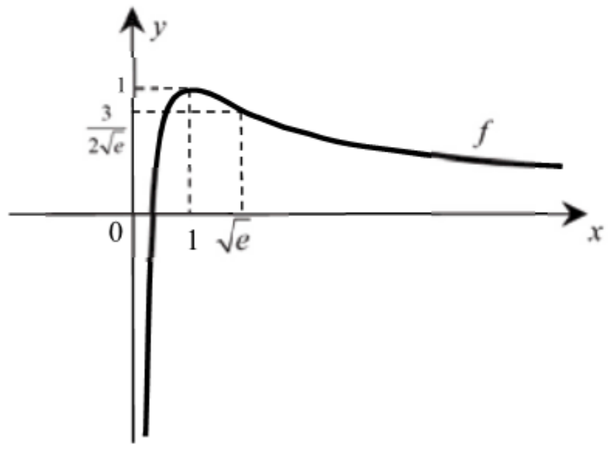
d)



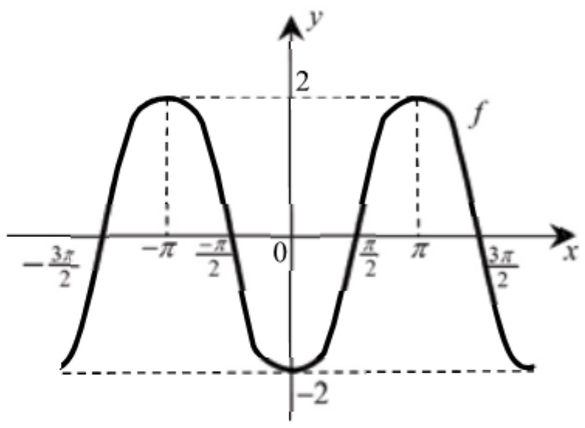
3.10.5 a)



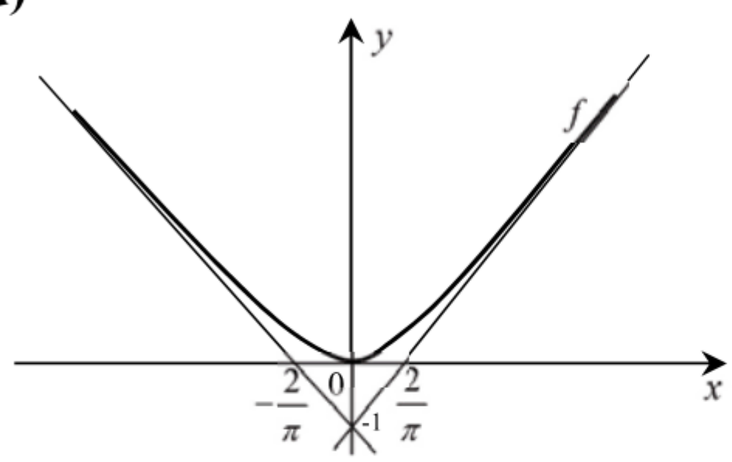
b)



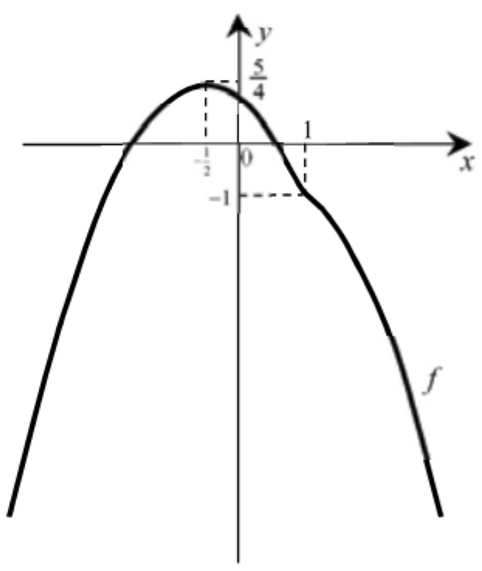
c)



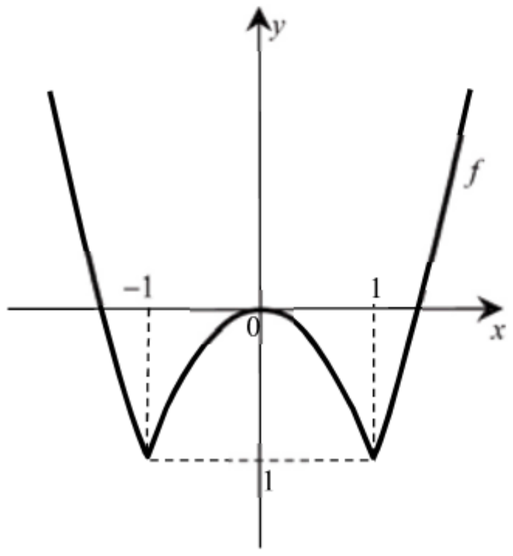
d)



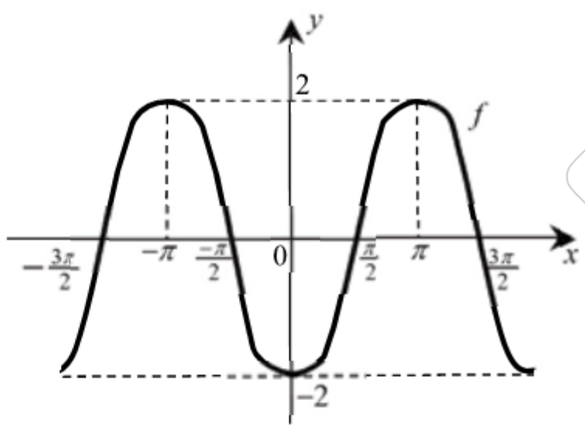
3.10.6 a)



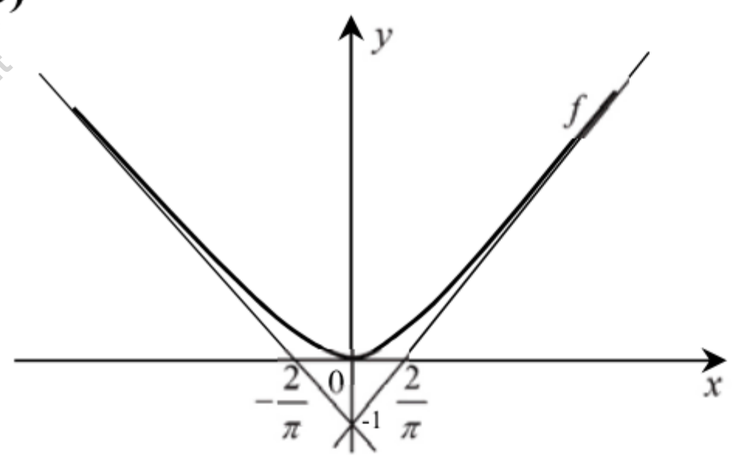
b)



3.10.7 a)



b)



Wondershare PDFelement

4 FUNKCIA DVOCH A VIAC REÁLNYCH PREMENNÝCH

V tejto časti učebného textu priblížime pojem funkcie n reálnych premenných, pričom sa budeme podrobnejšie zaoberať funkciou dvoch premenných. Použitie dostupných softvérov, ako napríklad Microsoft Mathematics, v ktorých možno zostrojiť graf funkcie dvoch premenných, umožňuje na základe vizualizácie pochopiť definované pojmy a zvládnuť uvedené postupy.

Pri funkcii dvoch premenných sa naša pozornosť zameria na približné určovanie zmeny funkčných hodnôt, ako aj na určovanie lokálnych a viazaných extrémov v rámci ekonomickej aplikácie. Využívanie diferenciálneho počtu funkcie dvoch premenných na tieto účely je súčasťou riešenia aproximatívnych a optimalizačných úloh v mikroekonomickej analýze.

4.1 Funkcia *n* reálnych premenných

Definícia 4.1.1 Množina všetkých usporiadaných n-tíc $[x_1, x_2, ..., x_n]$, $x_i \in R$, $i = 1, 2, ..., n$, kde pre každú dvojicu n-tíc $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $B = [b_1, b_2, ..., b_n]$ je definovaná vzdialenosť

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2} \tag{1}$$

sa nazýva n-rozmerný ***Euklidov priestor*** $\boldsymbol{E_n}$.

Usporiadané n-tice (napr. $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$, $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$) nazývame ***body priestoru*** $\boldsymbol{E_n}$.

Poznámka 4.1.1 V prípade dvojrozmerného Euklidovho priestoru E_2 sa zvyčajne namiesto $X = [x_1, x_2]$ používava zápis $X = [x, y]$. V prípade trojrozmerného Euklidovho priestoru E_3 sa namiesto $X = [x_1, x_2, x_3]$ zvyčajne používava zápis $X = [x, y, z]$.

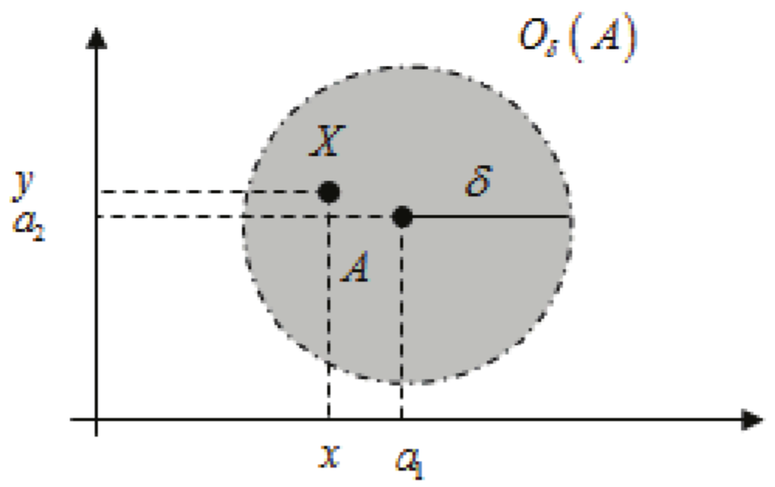
Definícia 4.1.2 Nech $A \in E_n$ a $\delta > 0$. Množina bodov $O_\delta(A) = \{X \in E_n,\ \rho(X, A) < \delta\}$ sa nazýva ***δ-okolím bodu A.***

Množina $\tilde{O}_\delta(A) = O_\delta(A) - \{A\}$ sa nazýva ***neúplné δ-okolie bodu A.***

Poznámka 4.1.2 V dvojrozmernom Euklidovom priestore E_2 na základe definície 4.1.2 a vzťahu (1) platí

$$\rho(X, A) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < \delta$$

z čoho vyplýva, že $O_\delta(A)$ je vnútro kruhu so stredom v bode $A = [a_1, a_2]$ a s polomerom δ (obr. 4.1.1).



Obr. 4.1.1 $O_\delta(A)$, δ-okolie bodu A

Definícia 4.1.3 Nech $M \neq \emptyset,\ M \subset E_n$. Zobrazenie $f:\ M \to R$, ktoré každému prvku $X = [x_1, x_2, ..., x_n] \in M$ priradí práve jedno reálne číslo $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sa nazýva ***funkcia n reálnych premenných***

Zapíšeme $\forall\ X = [x_1, x_2, ..., x_n] \in M,\ \exists\, z \in R,\quad z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Množina M sa nazýva ***definičný obor*** funkcie n reálnych premenných, ktorý označujeme $D(f)$. Ak je funkcia zadaná iba „predpisom“ vyjadreným v tvare rovnice $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, tak definičným oborom funkcie rozumieme jej tzv. ***prirodzený definičný obor***, t. j.

$$D(f) = \{[x_1, x_2, ..., x_n] \in E_n;\ \exists\ z \in R,\ z = f(x_1, x_2, ..., x_n)\} \tag{2}$$

Obor funkčných hodnôt funkcie f je množina

$$H(f) = \{z \in R;\ \exists [x_1, x_2, ..., x_n] \in D(f),\ z = f(x_1, x_2, ..., x_n)\} \tag{3}$$

Poznámka 4.1.3 V prípade funkcie dvoch premenných budeme namiesto neznámej x_1 používať označenie x a namiesto neznámej x_2 používať označenie y. Zápis $f:\ z = f(x_1, x_2)$ nahradíme označením $f:\ z = f(x, y)$.

4.2 Funkcia dvoch reálnych premenných

Definícia 4.2.1 Nech $M \neq \emptyset,\ M \subset E_2$. Zobrazenie $f:\ M \to R$, ktoré každému prvku $X = [x, y] \in M$ priradí práve jedno reálne číslo $z = f(x, y)$, sa nazýva ***funkcia dvoch reálnych premenných*** $\boldsymbol{f:\ z = f(x, y)}$. Zapíšeme $\forall [x, y] \in M,\ \exists\, z \in R,\quad z = f(x, y)$

Množina M sa nazýva ***definičný obor*** funkcie dvoch reálnych premenných, ktorý označujeme $D(f)$. Ak je funkcia zadaná iba „predpisom“, ktorý je vyjadrený v tvare rovnice $z = f(x, y)$, tak definičným oborom funkcie rozumieme jej ***prirodzený definičný obor***

$$D(f) = \{[x, y] \in E_2;\ \exists\ z \in R,\ z = f(x, y)\} \tag{1}$$

Obor funkčných hodnôt funkcie f je množina

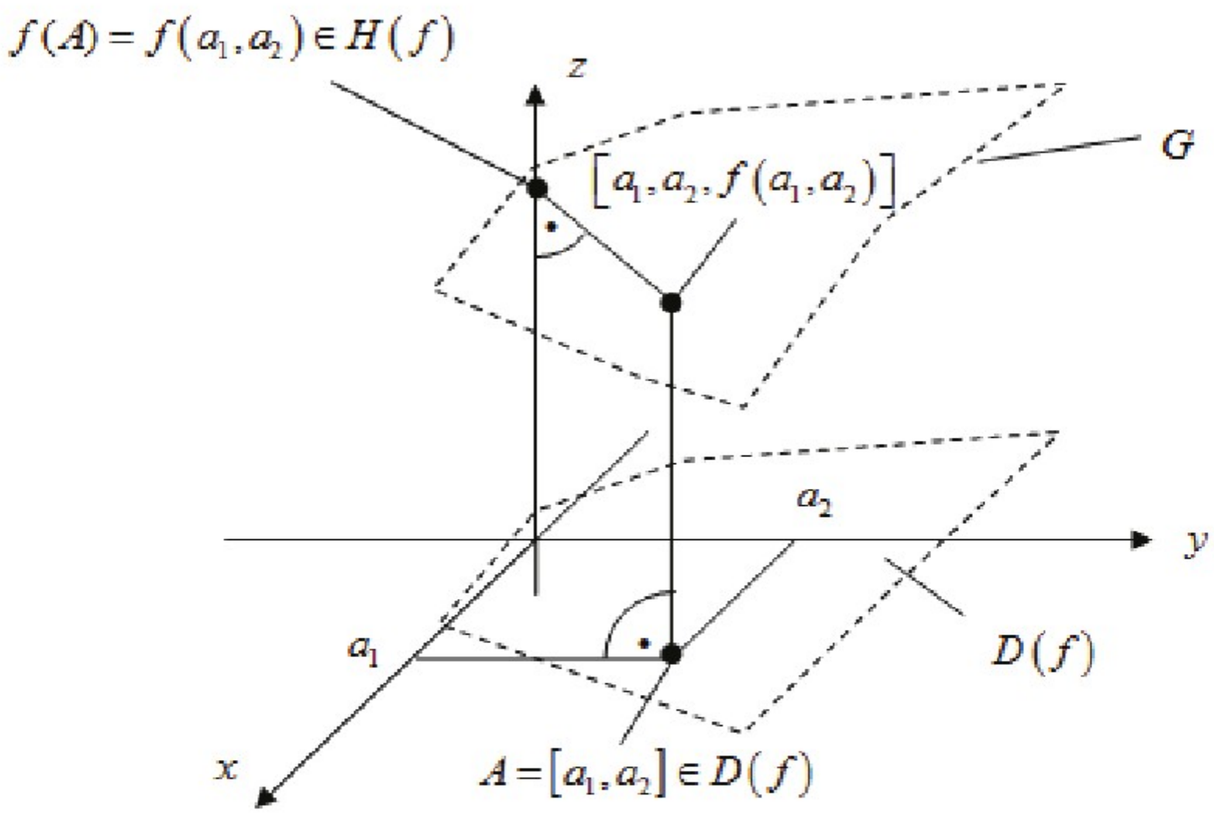
$$H(f) = \{z \in R;\ \exists [x, y] \in D(f),\ z = f(x, y)\} \tag{2}$$

Graf funkcie $f:\ z = f(x, y)$ je množina takých bodov $[x, y, z] \in E_3$, že platí

$[x, y] \in D(f) \wedge\ z = f(x, y) \in H(f)$, čo zapíšeme

$$G = \{[x, y, z] \in E_3;\ [x, y] \in D(f) \wedge\ z = f(x, y)\} \tag{3}$$

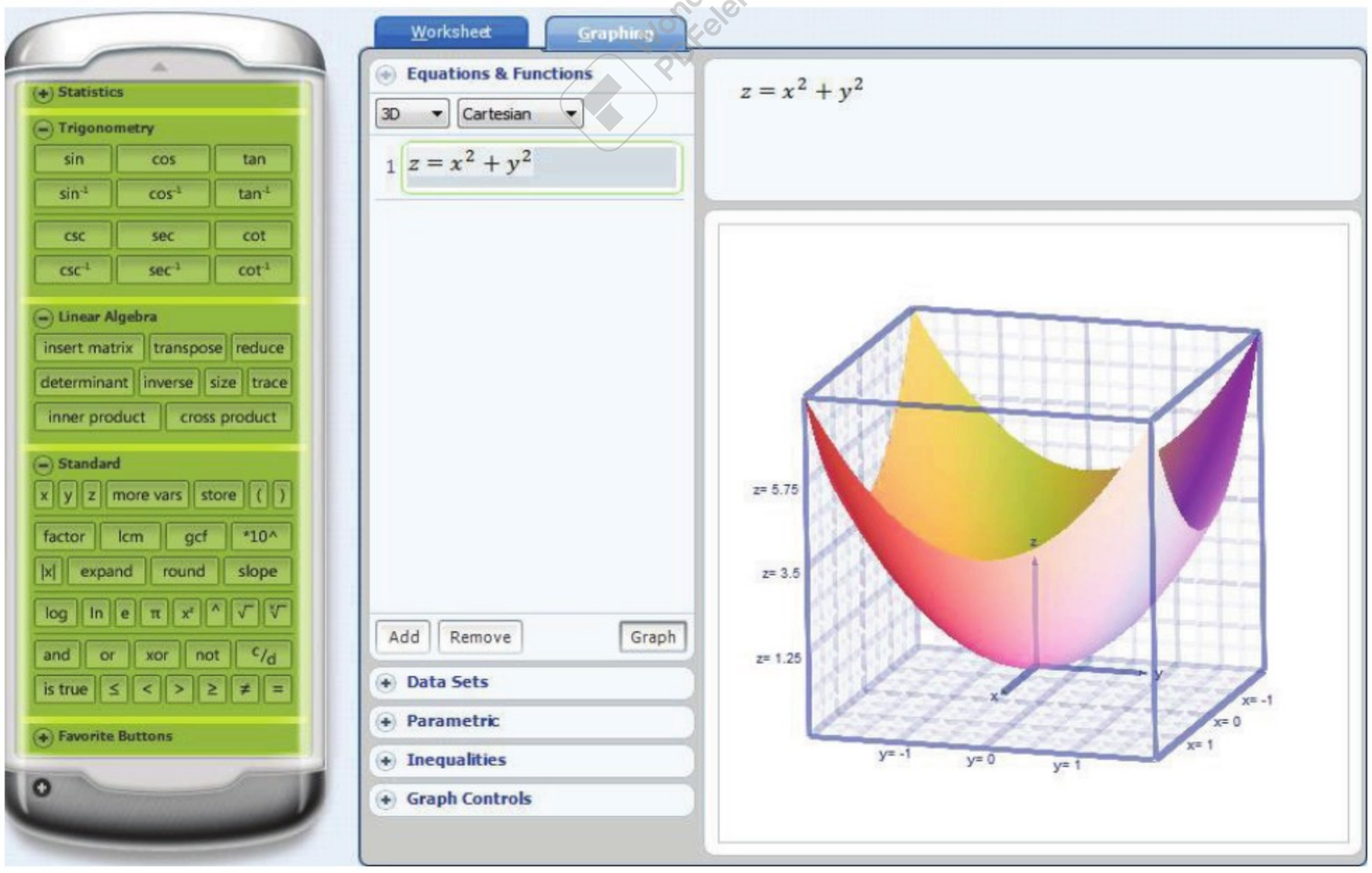
Prvku $A = [a_1, a_2] \in D(f)$ je priradené práve jedno reálne číslo $z = f(a_1, a_2) \in H(f)$, čomu zodpovedá bod grafu $[a_1, a_2, f(a_1, a_2)] \in E_3$ (obr. 4.2.1).



Obr. 4.2.1 Graf funkcie $f:\ z = f(x, y)$

Poznámka 4.2.1 Pri zobrazenej orientácii osí o_x, o_y, o_z na obr. 4.2.1 pre súradnice bodu $A = [a_1, a_2]$ platí $a_1 > 0 \ \wedge \ a_2 > 0$.

Poznámka 4.2.2 Grafy funkcií dvoch reálnych premenných je možné vytvoriť aj pomocou rôznych softvérových aplikácií. Na obr. 4.2.2 uvádzame príklad grafu funkcie $f:\ z = x^2 + y^2$ vytvoreného v Microsoft Mathematics.

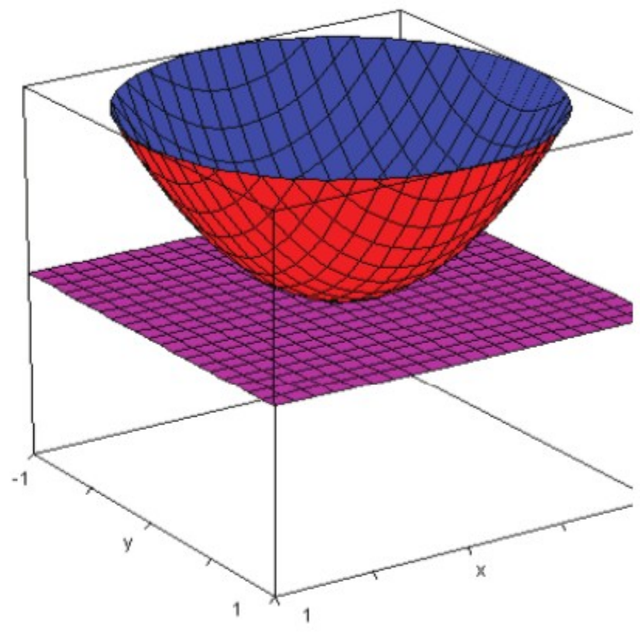


Obr. 4.2.2 Softvérová podpora tvorby 3D grafov v Microsoft Mathematics

Príklad 4.2.1 Vypočítajme funkčnú hodnotu funkcie f: $z = x^2 + y^2$ v bode $[2, 3]$.

Riešenie. Pre definičný obor funkcie platí $D(f) = E_2$. Funkčnú hodnotu funkcie f v bode $[2, 3] \in D(f)$ vypočítame dosadením príslušných súradníc tohto bodu do funkčného predpisu funkcie f, t.j. $f(2, 3) = 2^2 + 3^2 = 13$. Funkcia f priradila bodu $[2, 3] \in D(f)$ práve jedno

reálne číslo $z = 13$. Zodpovedajúci bod grafu G funkcie f má súradnice $[2, 3, 13]$.



Obr. 4.2.3 Graf funkcie $f: \; z = x^2 + y^2$

Príklad 4.2.2 Určme definičný obor funkcie $f: \; z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$, graficky ho znázornime a dosiahnutý výsledok porovnajme vizualizáciou využitím grafu tejto funkcie.

Riešenie. Funkcia $f: \; z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ je definovaná v takých bodoch $X = [x, y]$ z roviny $O_{x,y}$ pre ktorých súradnice x, y platí

$$x^2 + y^2 - 9 \geq 0$$

čo zapisujeme

$$D(f) = \{[x, y] \in E_2; \; x^2 + y^2 - 9 \geq 0\}.$$

Všetky body $X = [x, y] \in E_2$, ktorých súradnice vyhovujú nerovnici $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$, vytvárajú definičný obor funkcie $D(f)$.

Grafické zobrazenie definičného oboru $D(f)$ získame tak, že v uvedenej podmienke $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$ nahradíme znak nerovnosti „$\geq$“ za znak rovnosti „$=$“ a dostaneme rovnicu

$$x^2 + y^2 = 9$$

ktorej vyhovujú súradnice bodov ležiacich na kružnici $k(S, r)$, so stredom $S = [0, 0]$ a polomerom $r = 3$.

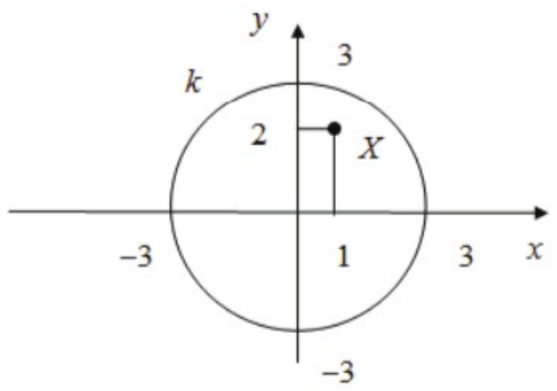
Kružnica rozdeľuje E_2 (rovinu $O_{x,y}$) na dve časti. Vyberieme jeden bod $X = [x, y]$ z jednej časti, napríklad z vnútra kruhu, a dosadíme jeho súradnice do danej nerovnice.

- Ak dostaneme pravdivý výrok, podmienke budú vyhovovať súradnice všetkých bodov z tejto vybranej časti.
- V opačnom prípade vyhovujú nerovnici súradnice bodov z druhej časti, t.j. nachádzajúce sa mimo kruhu.
- Keďže je v danej nerovnici znak „$\geq$“, t.j. ide o neostrú nerovnosť, vyhovujú nerovnici aj súradnice bodov ležiacich na kružnici k.

Vyberme napríklad bod $X = [1, 2]$. Dosadením jeho súradníc do nerovnice $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$ dostaneme

$$1^2 + 2^2 - 9 \geq 0, \text{ t. j. } -4 \geq 0,$$

čo je nepravdivý výrok, a teda súradnice tohto bodu nevyhovujú danej nerovnici (obr. 4.2.4).



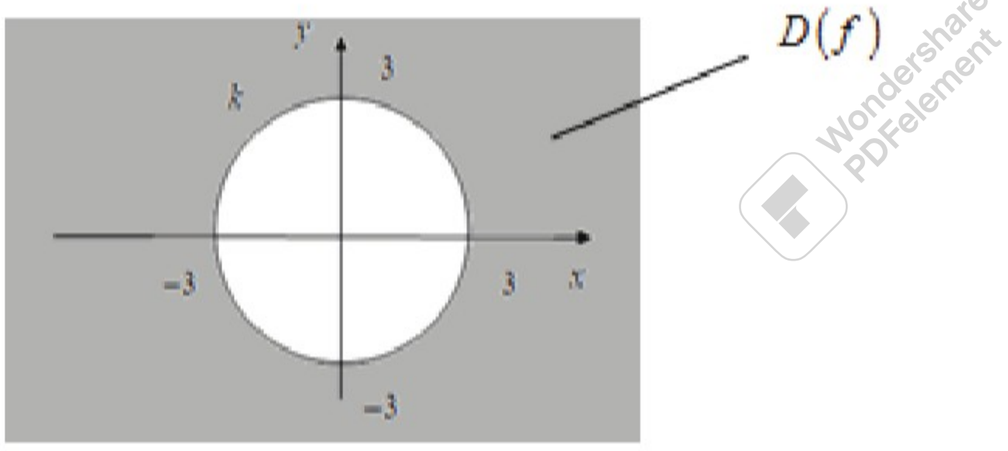
Obr. 4.2.4 Hľadanie bodov v rovine $O_{x,y}$, ktorých súradnice vyhovujú nerovnici $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$

Nerovnici $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$ vyhovujú súradnice bodov, ktoré neležia vnútri kruhu. Ak by sme zvolili bod $X = [5, 0]$ a dosadili jeho súradnice do nerovnice $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$, dostaneme

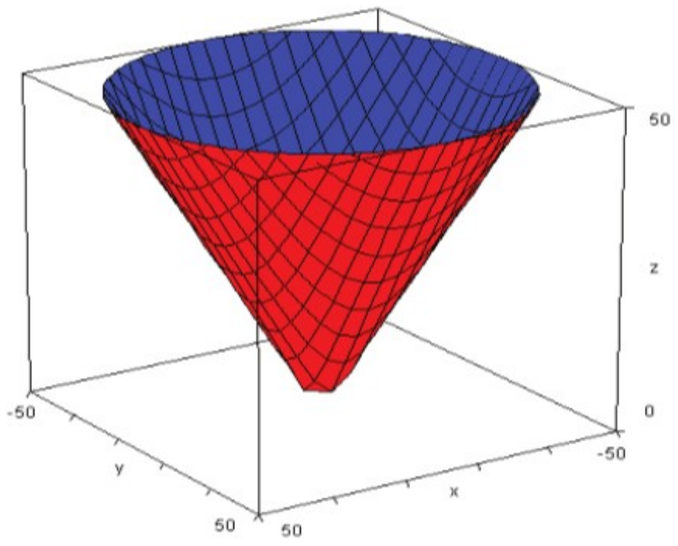
$$5^2 + 0^2 - 9 \geq 0, \quad \text{t. j.} \quad 16 \geq 0,$$

čo je pravdivý výrok a potvrdzuje to predchádzajúce tvrdenie. Na základe týchto poznatkov graficky znázorníme definičný obor funkcie f (na obrázku 4.2.5 je označený ▭).

Keby sme z každého bodu grafu funkcie f na obr. 4.2.6 urobili kolmý priemet do roviny $O_{x,y}$, vzniknuté body v tejto rovine by vytvorili rovinný útvar, ktorý predstavuje definičný obor funkcie $D(f)$ znázornený na obrázku 4.2.5.



Obr. 4.2.5 Definičný obor funkcie
$f: z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$



Obr. 4.2.6 Graf funkcie
$f: z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

Príklad 4.2.3 Určme definičný obor funkcie $f: z = \ln(-x - y + 5)$ a graficky ho znázornime.

Riešenie. Funkcia $f: z = \ln(-x - y + 5)$ je definovaná v takých bodoch $X = [x, y]$ z roviny $O_{x,y}$, pre ktorých súradnice x, y platí

$$-x - y + 5 > 0,$$

čo zapisujeme

$$D(f) = \{[x, y] \in E_2;\ -x - y + 5 > 0\}.$$

Všetky body $X = [x, y] \in E_2$, ktorých súradnice vyhovujú danej nerovnici, vytvárajú definičný obor funkcie $D(f)$. Grafické zobrazenie definičného oboru $D(f)$ získame tak, že v uvedenej podmienke $-x - y + 5 > 0$ nahradíme znak nerovnosti „>“ znakom rovnosti „=“ a dostaneme rovnicu

$$x + y = 5$$

ktorej vyhovujú súradnice bodov ležiacich na priamke

$$p:\ y = 5 - x\,.$$

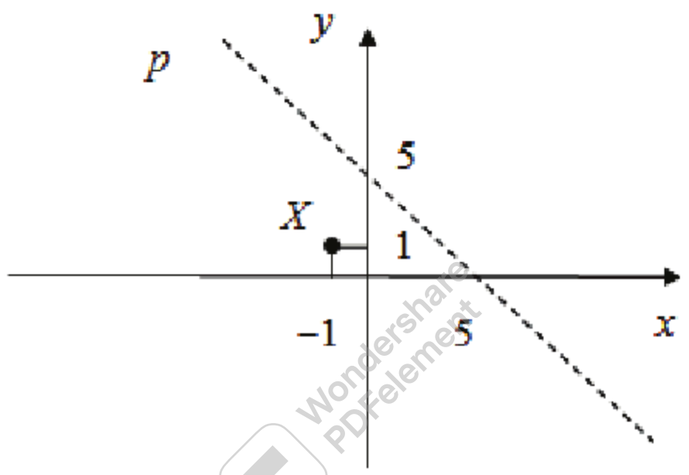
Priamka p rozdeľuje E_2 (rovinu $O_{x,y}$) na dve polroviny. Vyberieme jeden bod z jednej polroviny a dosadíme jeho súradnice do nerovnice $-x - y + 5 > 0$.

- Ak súradnice zvoleného bodu $X = [x, y]$ vyhovujú tejto nerovnici, znamená to, že nerovnici vyhovujú súradnice všetkých bodov danej polroviny.
- Ak súradnice zvoleného bodu X nevyhovujú tejto nerovnici, znamená to, že nerovnici vyhovujú súradnice bodov nachádzajúcich sa v druhej polrovine.
- Keďže je v danej nerovnici znak „>“, t.j. ide o ostrú nerovnosť, nerovnici nevyhovujú súradnice bodov ležiacich na priamke p.

Vyberme napríklad bod $X = [-1, 1]$. Dosadením jeho súradníc do nerovnice $-x - y + 5 > 0$ dostaneme

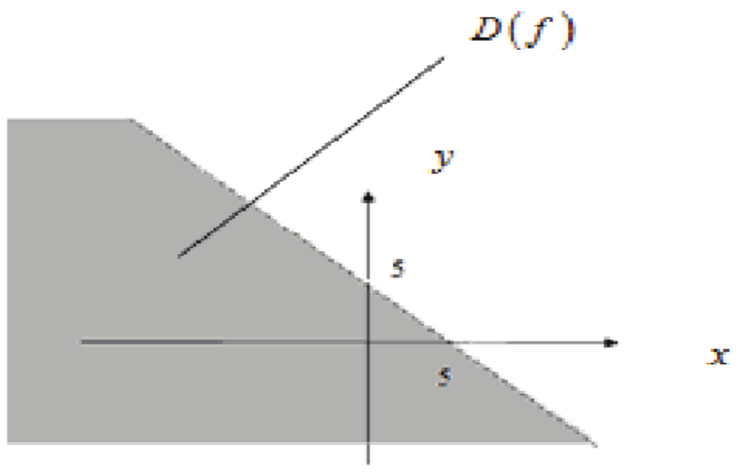
$$-(-1) - 1 + 5 > 0,\ \text{ t. j. }\ 5 > 0\,.$$

To znamená, že súradnice bodu X vyhovujú danej nerovnici (obr. 4.2.7). Tejto nerovnici nevyhovujú súradnice bodov, ktoré ležia v opačnej polrovine než bod $X = [-1, 1]$.



Obr. 4.2.7 Hľadanie bodov v rovine $O_{x,y}$, ktorých súradnice vyhovujú nerovnici $-x - y + 5 > 0$

Na základe týchto poznatkov graficky znázorníme definičný obor funkcie f (na obrázku 4.2.8 je označený ▭).



Obr. 4.2.8 Definičný obor funkcie $f:\ z = \ln(-x - y + 5)$

Príklad 4.2.4 Určme definičný obor funkcie $f:\ z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \ln(x^2 + y^2 - 4)$ a graficky ho znázornime.

Riešenie. Funkcia $f:\ z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \ln(x^2 + y^2 - 4)$ je definovaná v takých bodoch $X = [x, y]$ z roviny $O_{x,y}$, pre ktorých súradnice x, y platí

$$9-x^2-y^2\geq 0 \quad \wedge \quad x^2+y^2-4>0,$$

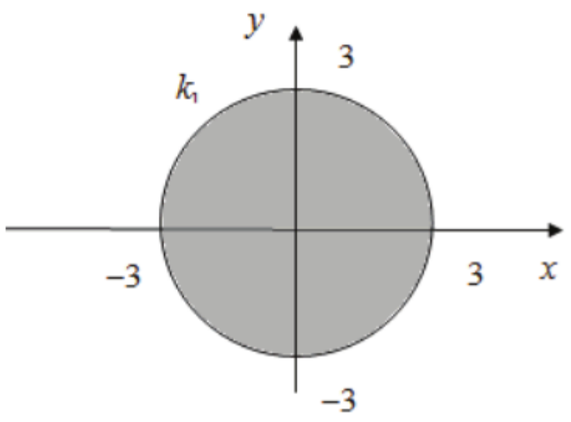
čo zapisujeme

$$D(f)=\left\{[x,y]\in E_2,\ 9-x^2-y^2\geq 0 \wedge x^2+y^2-4>0\right\}.$$

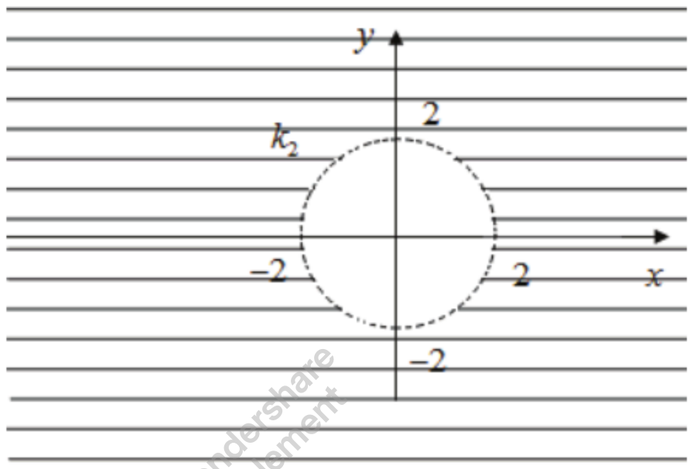
Grafické zobrazenie definičného oboru $D(f)$ získame analogickým postupom ako v príklade 4.2.3.

Riešením nerovnice $9-x^2-y^2\geq 0$ sú súradnice bodov, ktoré ležia vnútri kruhu k_1 so stredom $S=[0,0]$ a polomerom $r=3$ (na obr. 4.2.9 označené ▒). Vzhľadom na to, že ide o neostrú nerovnosť (znak „$\geq$“), vyhovujú nerovnici aj súradnice bodov, ktoré ležia na kružnici.

V prípade nerovnice $x^2+y^2-4>0$ sú riešením súradnice bodov, ktoré ležia mimo kruhu k_2 so stredom $S=[0,0]$ a polomerom $r=2$ (na obr. 4.2.10 označené ▤). Ide o ostrú nerovnosť (znak „$>$“), preto body ležiace na kružnici nevyhovujú danej nerovnici.

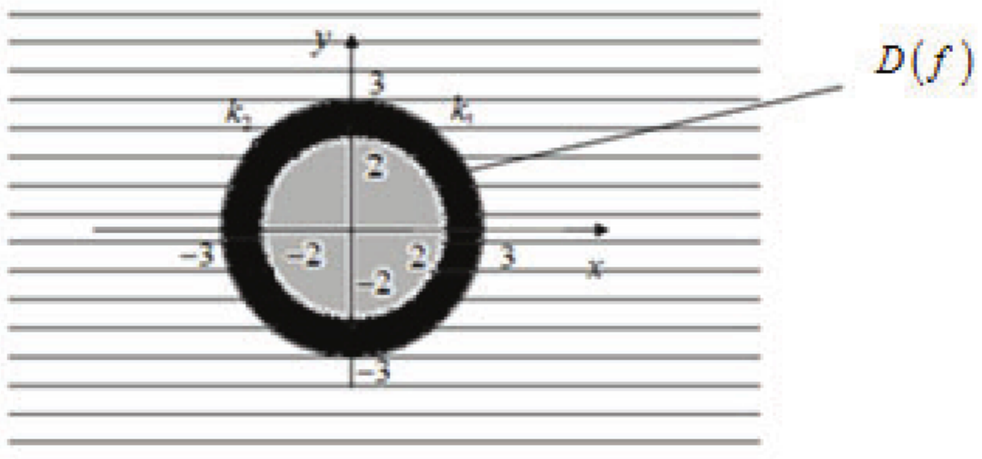


Obr. 4.2.9 Body v rovine $O_{x,y}$, ktorých súradnice vyhovujú nerovnici $9-x^2-y^2\geq 0$.



Obr. 4.2.10 Body v rovine $O_{x,y}$, ktorých súradnice vyhovujú nerovnici $x^2+y^2-4>0$.

Keďže hľadáme všetky body z roviny $O_{x,y}$, ktorých súradnice vyhovujú súčasne obidvom uvedeným podmienkam, definičný obor $D(f)$ získame ako prienik množín bodov zobrazených jednotlivo na obrázkoch 4.2.9 a 4.2.10. Graficky je definičný obor funkcie f znázornený na obrázku 4.2.11, kde je označený ■.



Obr. 4.2.11 Definičný obor funkcie $f:\ z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\ln\left(x^2+y^2-4\right)$

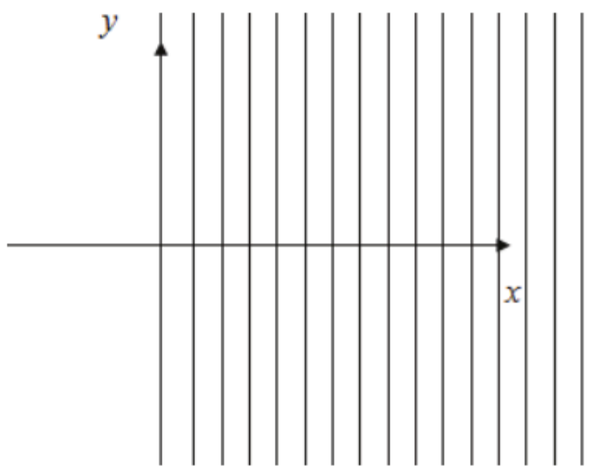
Príklad 4.2.5 Určme definičný obor funkcie $f:\ z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ a graficky ho znázornime.

Riešenie. Funkcia $f:\ z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ je definovaná v takých bodoch $X=[x,y]\in E_2$ roviny $O_{x,y}$, pre ktorých súradnice x, y platí $x\geq 0\wedge y\geq 0$, čo zapisujeme

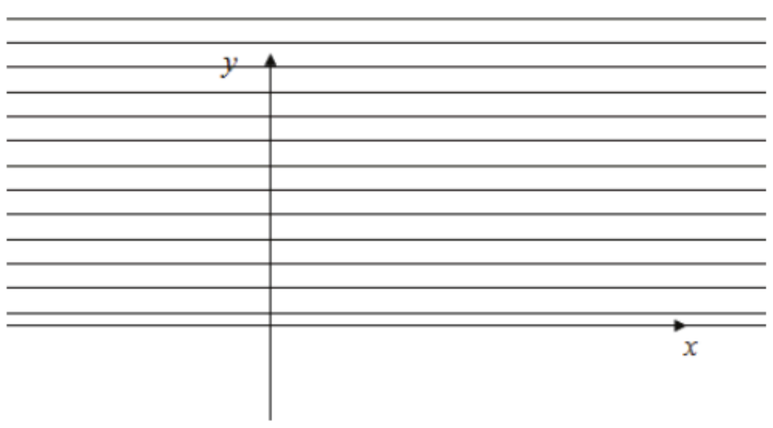
$$D(f)=\{[x,y]\in E_2;\ x\geq 0\wedge y\geq 0\}.$$

Grafické zobrazenie definičného oboru $D(f)$ získame nasledujúcim postupom. Riešením nerovnice $x\geq 0$ sú súradnice bodov $X=[x,y]\in E_2$, pre ktorých x- ovú súradnicu platí $x\geq 0$ a y- ová súradnica môže byť ľubovoľná (na obr. 4.2.12 označené ▥). Vzhľadom na to, že ide o neostrú nerovnosť (znak „$\geq$“), vyhovujú nerovnici aj súradnice bodov, ktoré ležia na osi o_y danej rovnicou $x=0$.

Riešením nerovnice $y\geq 0$ sú súradnice bodov $X=[x,y]\in E_2$, pre ktorých y-ovú súradnicu platí $y\geq 0$ a x-ová súradnica môže byť ľubovoľná (na obr. 4.2.13 označené ▤). Vzhľadom na to, že opäť ide o neostrú nerovnosť (znak „$\geq$“), vyhovujú nerovnici aj súradnice bodov, ktoré ležia na osi o_x danej rovnicou $y=0$.

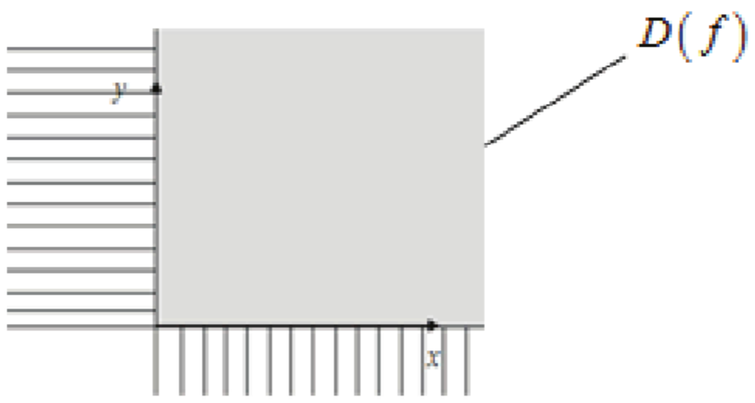


Obr. 4.2.12 Body v rovine $O_{x,y}$, ktorých súradnice vyhovujú nerovnici $x\geq 0$



Obr. 4.2.13 Body v rovine $O_{x,y}$, ktorých súradnice vyhovujú nerovnici $y\geq 0$

Keďže hľadáme všetky body z roviny $O_{x,y}$, ktorých súradnice vyhovujú súčasne obom uvedeným podmienkam, definičný obor $D(f)$ získame ako prienik množín bodov zobrazených na obrázkoch 4.2.12 a 4.2.13. Grafické znázornenie definičného oboru funkcie f je na obr. 4.2.14, kde je označený ▢.



Obr. 4.2.14 Definičný obor funkcie $f:\ z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Definícia 4.2.2 ***Vrstevnica grafu funkcie*** f: $z = f(x, y)$ je krivka, ktorá vznikne prienikom grafu funkcie f s rovinou β: $z = c$, kde c je konštanta.

Poznámka 4.2.3 Ak urobíme kolmý priemet vrstevnice do roviny $O_{x,y}$, získame v tejto rovine krivku, ktorá je na základe definície vrstevnice daná rovnicou

$$c = f(x, y) \tag{4}$$

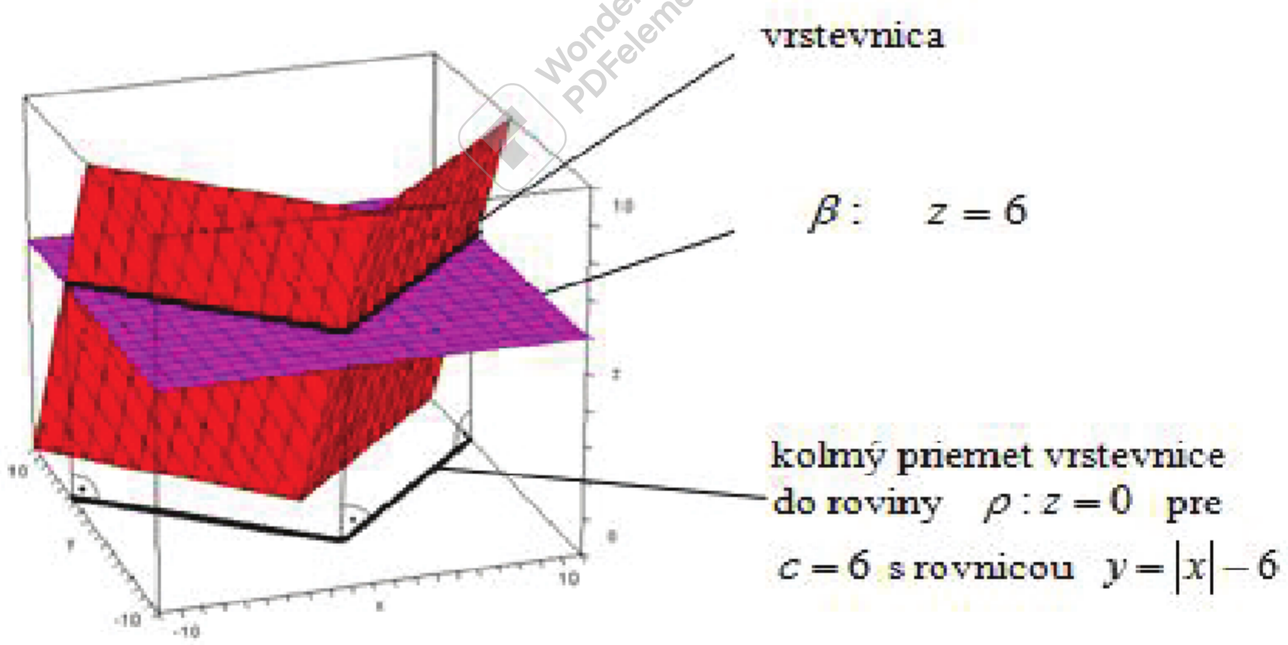
Poznámka 4.2.4 Pri spätnom zobrazení kolmého priemetu vrstevníc z roviny $O_{x,y}$ do E_3 o konštantu c získame priestorovú predstavu o grafe funkcie $f: z = f(x, y)$ a informácie potrebné na určenie oboru funkčných hodnôt $H(f)$.

Príklad 4.2.6 Nakreslime kolmý priemet vrstevníc funkcie $f: z = |x| - y$ do roviny $O_{x,y}$ a určme jej obor funkčných hodnôt.

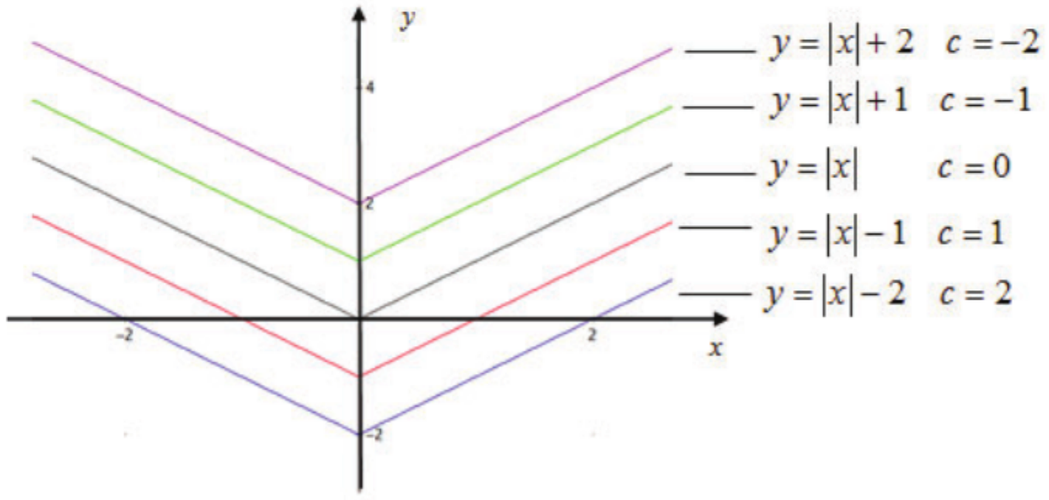
Riešenie. Vrstevnice grafu funkcie $f: z = |x| - y$ získame ako prienik grafu G tejto funkcie s rovinou β, ktorá je daná rovnicou $z = c$, kde c je konštanta.

Rovnicu kolmého priemetu vrstevníc grafu funkcie $f: z = |x| - y$ do roviny $O_{x,y}$ dostaneme na základe vzťahu (4), teda $c = |x| - y$, resp. $y = |x| - c$.

Ak je rovina β daná rovnicou $z = 6$, dostaneme pre krivku, ktorá je kolmým priemetom danej vrstevnice do roviny $O_{x,y}$, rovnicu $y = |x| - 6$ (obr. 4.2.15).



Obr. 4.2.15 Vrstevnica grafu funkcie $f: z = |x| - y$ a jej kolmý priemet do roviny $O_{x,y}$, t. j. do roviny $\rho: z = 0$



Obr. 4.2.16 Zobrazenie kolmého priemetu vrstevníc do roviny $O_{x,y}$, t. j. do roviny $\rho: z = 0$ pre rôzne hodnoty konštanty c

Na základe rovnice $c = |x| - y$ kolmého priemetu vrstevníc do roviny $O_{x,y}$ je zrejmé, že vrstevnice grafu funkcie f existujú pre konštantu c, pre ktorej hodnoty platí $c \in R$. Z uvedeného vyplýva, že oborom funkčných hodnôt je $H(f) = R$.

Parciálne funkcie

V tejto časti sa budeme zaoberať parciálnymi funkciami $f_1(x), f_2(y)$ funkcie dvoch reálnych premenných v danom bode. Pochopenie pojmu a základných vlastností parciálnych funkcií je dôležité pre chápanie diferenciálneho počtu funkcie dvoch premenných.

Majme funkciu $f: z = f(x, y)$, $D(f) \subset E_2$ a bod $A = [a_1, a_2] \in E_2$. Označme

$$M_1 = \{[x, y] \in D(f), y = a_2\},$$

$$M_2 = \{[x, y] \in D(f), x = a_1\}.$$

Definícia 4.2.3 (*parciálna funkcia $f_1(x)$ v bode $A = [a_1, a_2]$*)

Funkciu f_{M_1} definovanú na množine M_1 (ak existuje) označíme $f_1(x)$ a zapisujeme

$$f_1: z = f_1(x) = f(x, a_2) \tag{5}$$

s definičným oborom $D(f_1) = \{x \in R, [x, a_2] \in D(f)\}$.

Funkciu f_{M_1} nazývame ***parciálnou funkciou $f_1(x)$ funkcie f v bode A.***

Definícia 4.2.4 (*parciálna funkcia $f_2(y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$*)

Funkciu f_{M_2} definovanú na množine M_2 (ak existuje) označíme $f_2(y)$ a zapisujeme

$$f_2: z = f_2(y) = f(a_1, y) \tag{6}$$

s definičným oborom $D(f_2) = \{y \in R, [a_1, y] \in D(f)\}$.

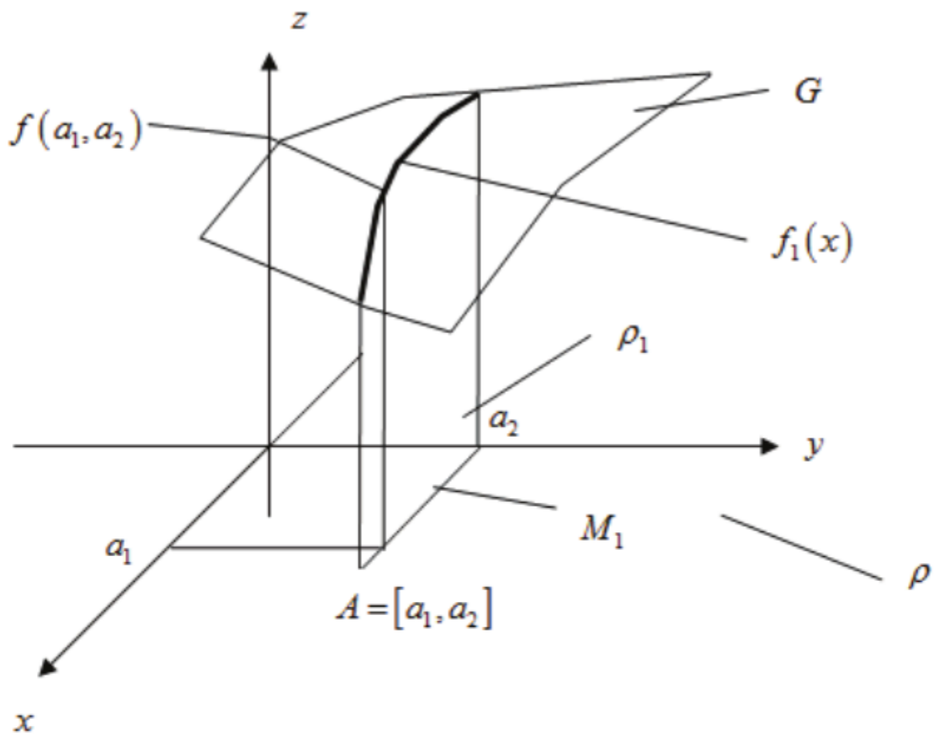
Funkciu f_{M_2} nazývame ***parciálnou funkciou $f_2(y)$ funkcie f v bode A.***

Grafická interpretácia parciálnych funkcií

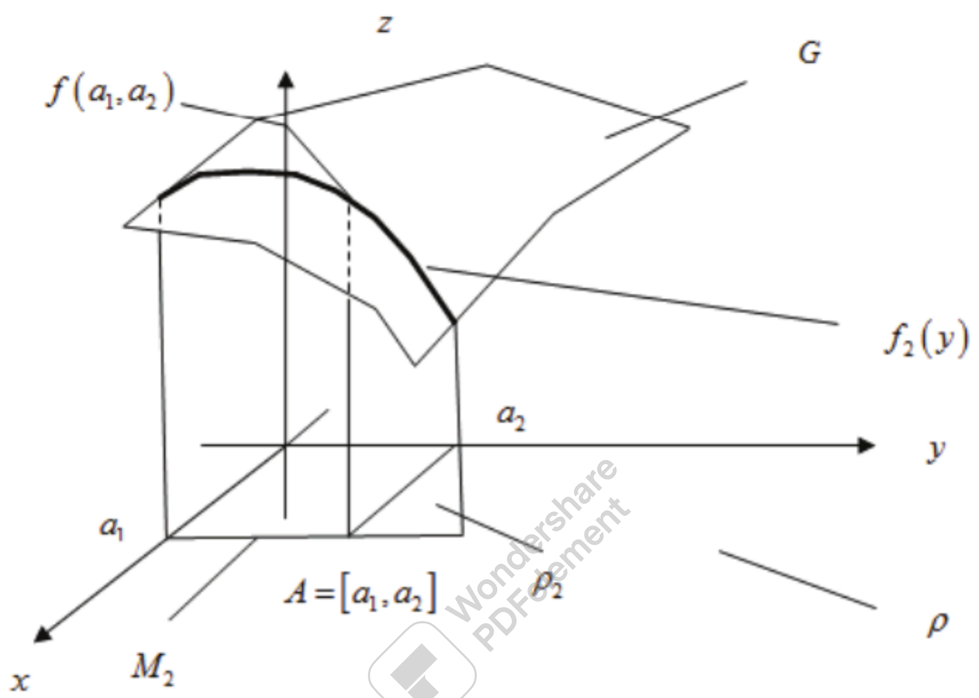
V pravouhlej súradnicovej sústave trojrozmerného euklidovského priestor E_3 definujme tri roviny potrebné na vizuálnu interpretáciu parciálnych funkcií v bode $A = [a_1, a_2]$.

- Rovina ρ, v ktorej ležia množiny M_1 a M_2, je daná rovnicou
$$z = 0.$$
- Rovina ρ_1, ktorá je kolmá na rovinu ρ a prechádza množinou M_1, je daná rovnicou
$$y = a_2.$$
- Rovina ρ_2, ktorá je kolmá na rovinu ρ a prechádza množinou M_2, je daná rovnicou
$$x = a_1.$$

Parciálnu funkciu $f_1(x)$ v bode $A = [a_1, a_2]$ dostaneme ako prienik grafu G funkcie $f: z = f(x, y)$ s rovinou ρ_1 (obr. 4.2.17). Parciálnu funkciu $f_2(y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$ dostaneme ako prienik grafu G funkcie $f: z = f(x, y)$ s rovinou ρ_2 (obr. 4.2.18).



Obr. 4.2.17 Grafická interpretácia parciálnej funkcie $f_1(x)$ v bode $A=[a_1, a_2]$



Obr. 4.2.18 Grafická interpretácia parciálnej funkcie $f_2(y)$ v bode $A=[a_1, a_2]$

Príklad 4.2.7 Určme parciálne funkcie $f_1(x)$ a $f_2(y)$ funkcie dvoch premenných $f:\ z=x^2+y^2$ v bode $A=[1, 2]$ a graficky ich interpretujme.

Riešenie. Na základe vzťahu (1) určíme parciálnu funkciu $f_1(x)$ pri konštantnej hodnote $y=2,$ čo zapíšeme

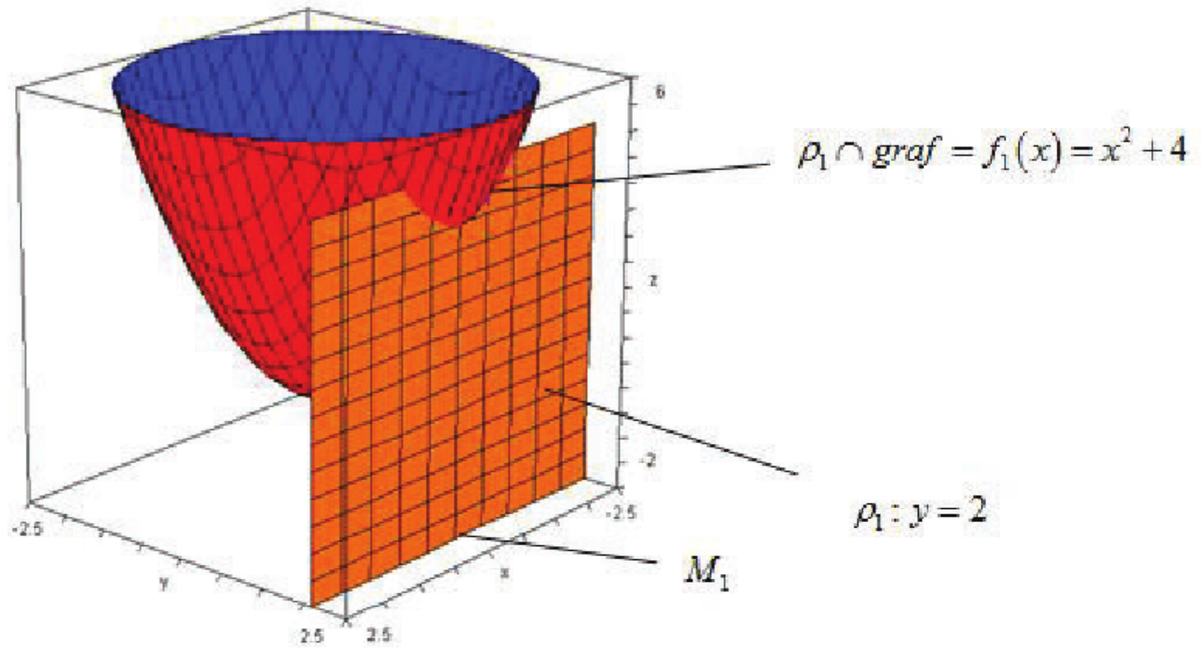
$$f_1(x)=f(x,2)=x^2+4,\ D(f_1)=\{x\in R;\ [x,2]\in D(f)\}.$$

Parciálnu funkciu $f_1(x)$ graficky určíme ako prienik grafu funkcie $f:\ z=x^2+y^2$ s rovinou $\rho_1:\ y=2,$ (obr. 4.2.19).

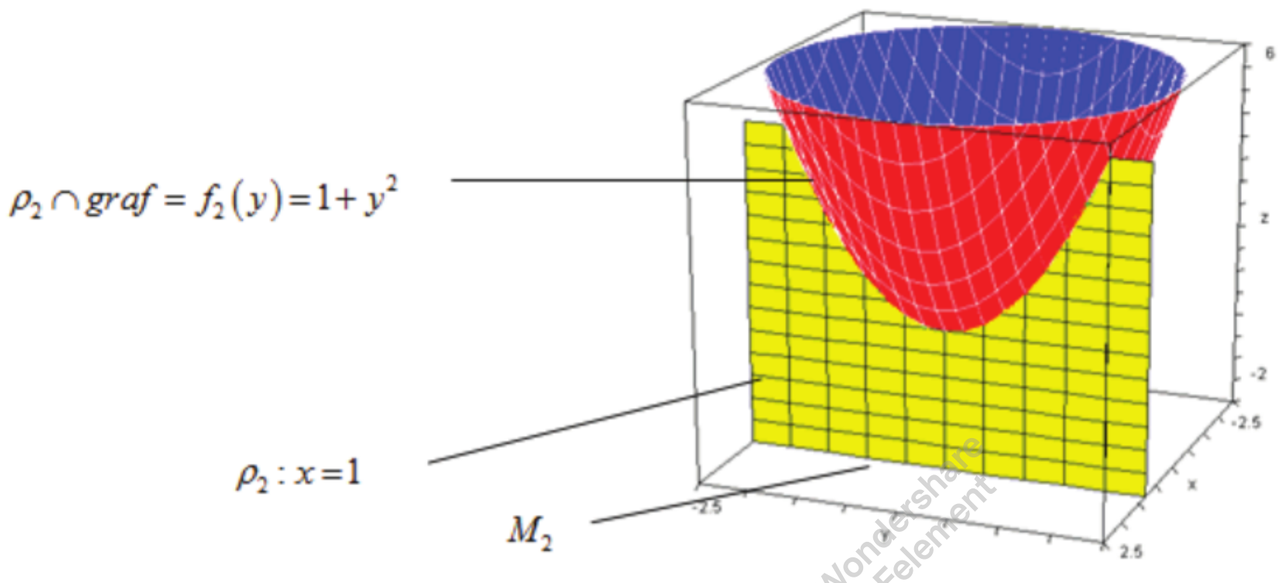
Na základe vzťahu (2) určíme parciálnu funkciu $f_2(y)$ pri konštantnej hodnote $x=1$, čo zapíšeme

$$f_2(y)=f(1,y)=1+y^2,\ D(f_2)=\{y\in R;\ [1,y]\in D(f)\}.$$

Parciálnu funkciu $f_2(y)$ graficky určíme ako prienik grafu funkcie $f:\ z=x^2+y^2$ s rovinou $\rho_2:\ x=1$ (obr. 4.2.20).



Obr. 4.2.19 Grafické znázornenie parciálnej funkcie $f_1(x)$ funkcie $f: z = x^2 + y^2$ v bode $A = [1, 2]$



Obr. 4.2.20 Grafické znázornenie parciálnej funkcie $f_2(y)$ funkcie $f: z = x^2 + y^2$ v bode $A = [1, 2]$

Využitie parciálnych funkcií v danom bode v rámci určenia zmeny funkčnej hodnoty funkcie dvoch premenných

Poznať informácie o správaní sa parciálnych funkcií je dôležité v rámci interpretácie zmeny funkčnej hodnoty funkcie dvoch premenných v určitých situáciách mikroekonomickej analýzy.

Príklad 4.2.8 Daná je funkcia $f: z = x^2 + y^2$ a bod $A = [1, 2]$. Pomocou parciálnej funkcie $f_1(x)$ vypočítajme, ako sa zmení funkčná hodnota funkcie f, ak

a) zvýšime hodnotu $x = 1$ o $0,05$ a hodnota $y = 2$ zostane nezmenená,

b) znížime hodnotu $y = 2$ o $0,05$ a hodnota $x = 1$ zostane nezmenená.

Riešenie.

a) Pre parciálnu funkciu $f_1(x)$ v bode $A = [1, 2]$ platí (pozri príklad 4.2.7)

$$f_1: z = x^2 + 4$$

Zmenu funkčnej hodnoty $\Delta f = f(1,05; 2) - f(1; 2)$ určíme na základe vzťahu $f_1(x) = f(x, 2)$ ako zmenu funkčnej hodnoty parciálnej funkcie $f_1(x)$

$$\Delta f = f_1(1{,}05) - f_1(1) = 5{,}1025 - 5 = 0{,}1025 > 0$$

Pre porovnanie vypočítajme zmenu Δf priamo prostredníctvom funkcie $f:\ z = x^2 + y^2$:

$$\Delta f = f(1{,}05;\, 2) - f(1;\, 2) = 5{,}1025 - 5 = 0{,}1025 > 0\,.$$

Funkčná hodnota funkcie dvoch premenných $f:\ z = f(x, y)$ sa zvýšila o $0{,}1025$ rovnako ako v prípade parciálnej funkcie $f_1(x)$.

b) Pre parciálnu funkciu $f_2(y)$ v bode $A = [1, 2]$ platí (pozri príklad 4.2.7)

$$f_2(y) = 1 + y^2$$

Zmenu funkčnej hodnoty $\Delta f = f(1;1{,}95) - f(1;2)$ určíme na základe vzťahu $f_2(y) = f(1, y)$ ako zmenu funkčnej hodnoty parciálnej funkcie $f_2(y)$:

$$\Delta f = f_2(1{,}95) - f_2(2) = 4{,}8025 - 5 = -0{,}1975 < 0$$

Pre porovnanie vypočítame zmenu Δf priamo prostredníctvom funkcie $f:\ z = x^2 + y^2$:

$$\Delta f = f(1;\, 1{,}95) - f(1;\, 2) = 4{,}8025 - 5 = -0{,}1975 < 0$$

Funkčná hodnota funkcie dvoch premenných $f:\ z = f(x, y)$ sa znížila o $0{,}1975$ rovnako ako v prípade parciálnej funkcie $f_2(y)$.

Limita a spojitosť funkcie dvoch reálnych premenných

Intuitívna predstava o limite funkcie dvoch premenných je analogická ako v prípade funkcie jednej reálnej premennej. Ak sa približovaním bodu $X = [x, y]$ „dostatočne blízko“ k bodu $A = [a_1, a_2]$ približujú funkčné hodnoty $f(x, y)$ k určitému číslu $b \in R^*$, tak číslo b sa nazýva limitou funkcie $f:\ z = f(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$. R^* je rozšírená množina reálnych čísel a platí $R^* = R \cup \{-\infty; \infty\}$ (pozri časť 2.5 o limite funkcie jednej reálnej premennej).

Definícia 4.2.5 Bod $A = [a_1, a_2] \in E_2$ sa nazýva ***hromadným bodom*** definičného oboru $D(f) \subset E_2$, ak každé jeho neúplné okolie $\tilde{O}_\delta(A)$ obsahuje aspoň jeden bod $D(f)$.

Definícia 4.2.6 Hovoríme, že funkcia $f: z = f(x, y)$ má v hromadnom bode $A = [a_1, a_2]$ definičného oboru $D(f) \subset E_2$ ***limitu*** $b \in R^*$ práve vtedy, ak pre každé ε-okolie $O_\varepsilon(b)$ existuje také neúplné δ-okolie $\tilde{O}_\delta(A)$, že platí

$$X \in \tilde{O}_\delta(A) \cap D(f) \Rightarrow f(X) \in O_\varepsilon(b)$$

Zapisujeme $\lim\limits_{X \to A} f(X) = b$ alebo $\lim\limits_{\substack{x \to a_1 \\ y \to a_2}} f(x, y) = b$.

Poznámka 4.2.5 Ak $b \in R$, tak hovoríme o ***vlastnej limite*** funkcie $f: z = f(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$. Ak $b = \infty$ alebo $b = -\infty$, tak hovoríme o ***nevlastnej limite*** funkcie $f: z = f(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$.

Definícia 4.2.7 Nech je daná funkcia $f: z = f(x, y)$, $M \subset D(f)$. Hovoríme, že funkcia f_M s definičným oborom M je ***parciálna funkcia*** funkcie f, ak pre každý bod $X \in M$ platí

$$f_M(X) = f(X)$$

Veta 4.2.1 Nech je daná funkcia $f: z = f(x, y)$, $M \subset D(f)$. Nech bod $A = [a_1, a_2]$ je hromadným bodom množiny M a nech f_M je parciálna funkcia funkcie f. Potom platí

$$\lim_{X \to A} f(X) = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{X \to A} f_M(X) = b.$$

Definícia 4.2.8 Nech je daná funkcia $f: z = f(x, y)$, $D(f) \subset E_2$ a bod $A = [a_1, a_2]$. Limita parciálnej funkcie $f_1(x)$ v bode a_1 (ak existuje) sa nazýva ***jednosmerná limita*** funkcie f v bode A ***podľa premennej x***. Označíme ju

$$\lim_{x \to a_1} f_1(x) = b_1.$$

Limita parciálnej funkcie $f_2(y)$ v bode a_2 (ak existuje) sa nazýva ***jednosmerná limita*** funkcie f v bode A ***podľa premennej y***. Označíme ju

$$\lim_{y \to a_2} f_2(y) = b_2.$$

Veta 4.2.2 *(dôsledok vety 4.2.1)* Nech $\lim_{X \to A} f(X) = b$ a nech existujú parciálne funkcie $f_1(x)$ $f_2(y)$ funkcie $f: z = f(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$. Potom platí

$$\lim_{x \to a_1} f_1(x) = \lim_{y \to a_2} f_2(y) = b$$

Poznámka 4.2.6 Tvrdenie uvedené vo vete 4.2.2 opačne neplatí. Existencia a rovnosť jednosmerných limít nie sú postačujúce na to, aby existovala limita funkcie v danom bode.

Poznámka 4.2.7 V prípade, že sa jednosmerné limity v danom bode nerovnajú, tak limita $\lim_{X \to A} f(X) = b$ neexistuje.

Príklad 4.2.9 Dokážte, že limita $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{3x^2 - 2y^2 + 4y - 2}{x^2 - y^2 + 2y - 1}$ neexistuje.

Riešenie. Pre parciálnu funkciu $f_1(x)$ v bode $A = [0, 1]$ platí $f_1(x) = \dfrac{3x^2}{x^2}$ a pre parciálnu funkciu $f_2(y)$ v bode $A = [0, 1]$ platí $f_2(y) = \dfrac{-2y^2 + 4y - 2}{-y^2 + 2y - 1}$.

Keďže sa jednostranná limita $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 3$ nerovná jednostrannej limite $\lim_{y\to 1} f_2(y) = 2$, limita

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{3x^2 - 2y^2 + 4y - 2}{x^2 - y^2 + 2y - 1}$$ neexistuje.

Definícia 4.2.9 Nech je daná funkcia $f: z = f(x, y)$ a nech bod $A = [a_1, a_2] \in D(f)$. Hovoríme, že funkcia f je ***spojitá*** v bode A práve vtedy, ak ku každému okoliu $O_\varepsilon(f(A))$ existuje také okolie $O_\delta(A)$, že platí

$$X \in O_\delta(A) \cap D(f) \Rightarrow f(x, y) \in O_\varepsilon(f(A))$$

Porovnaním definície spojitosti funkcie f v bode A a limity funkcie f v bode A dostaneme nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.2.3 Nech je daná funkcia $f: z = f(x, y)$ a nech bod $A = [a_1, a_2]$ je hromadným bodom $D(f)$. Potom funkcia f je spojitá v bode A práve vtedy, keď platí

$$\lim_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x, y) = f(a_1, a_2)$$

Wondershare PDFelement

ÚLOHY

4.2.1 Určte definičný obor funkcie *f* a graficky ho znázornite.

a) $f: z = \sqrt{3x + y - 5}$

b) $f: z = \dfrac{\log(x^2 + y^2 - 16)}{\sqrt{x + y}}$

c) $f: z = \ln(-x^2 - y^2 + 25) + \sqrt{2x + 1 - y}$

d) $f: z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{x}$

e) $f: z = \log_3\left(\dfrac{x}{y}\right)$

f) $f: z = \arcsin(2x + y)$

g) $f: z = e^{\sqrt{x}} + \ln(x)$

h) $f: z = \dfrac{\ln(1 - y)}{x} + \ln(y - x^2)$

i) $f: z = \sqrt{y^2 - 4} + \sqrt{9 - x^2}$

4.2.2 Určte definičný obor funkcie.

a) $f_1(x, y) = \ln(y - x^2) + 5 \cdot \sqrt{1 - x - y} + e^x - 3x^2 y^4$

b) $f_2(x, y) = -\ln(3 - x^2 - y) - 10 \cdot \sqrt[4]{x + y} + 124$

c) $f_3(x, y) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y - 4}} - \log(25 - x^2 - y^2)$

d) $f_4(x, y) = \log_5(25 - x^2 - y^2) - 4xy - 90e^x + y^5$

e) $f_5(x,y)=35+9^x-6y^4x^5-\sqrt[5]{y^3+x^3}$ **f)** $f_6: z=\dfrac{6}{\ln(y-x)}+10\cdot\sqrt[3]{1-x-y}$

4.2.3 Napíšte rovnicu kolmého priemetu vrstevníc funkcie f do roviny O_{xy}, graficky ju znázornite a určte obor funkčných hodnôt.

a) $f: z=x^2+y^2-9$ **b)** $f: z=\sqrt{-x^2-y^2+16}$ **c)** $f: z=-4x+2y-7$

4.2.4 Určte parciálne funkcie $f_1(x)$, $f_2(y)$ funkcie f v bode A.

a) $f:\ z=3x^2y+2yx-y^3+4x^2-105,\quad A=[3,-1]$

b) $f:\ z=\sqrt{x^2y^3-2y^2},\quad A=[1,2]$

Výsledky

4.2.1 a) $D(f)=\{[x,y]\in E_2,\ 3x+y-5\geq 0\}$, obr. 4.2.21;

b) $D(f)=\{[x,y]\in E_2,\ x^2+y^2-16>0\wedge x+y>0\}$, obr. 4.2.22;

c) $D(f)=\{[x,y]\in E_2,\ -x^2-y^2+25>0\wedge 2x+1-y\geq 0\}$, obr. 4.2.23;

d) $D(f)=\{[x,y]\in E_2,\ x^2+y^2-1\geq 0\wedge\ x\geq 0\}$, obr. 4.2.24;

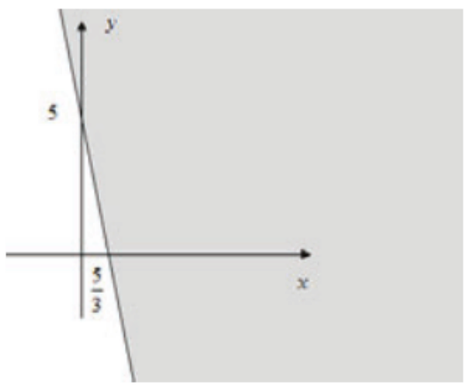
e) $D(f)=\left\{[x,y]\in E_2,\ \dfrac{x}{y}>0\wedge y\neq 0\right\}$, obr. 4.2.25;

f) $D(f)=\{[x,y]\in E_2,\ -1\leq 2x+y\leq 1\}$, obr. 4.2.26;

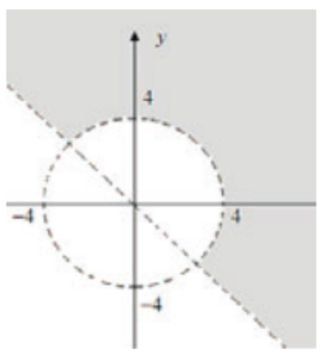
g) $D(f)=\{[x,y]\in E_2,\ y\geq 0\wedge x>0\}$, obr. 4.2.27;

h) $D(f)=\{[x,y]\in E_2,\ 1-y>0\wedge y-x^2>0\wedge x\neq 0\}$, obr. 4.2.28;

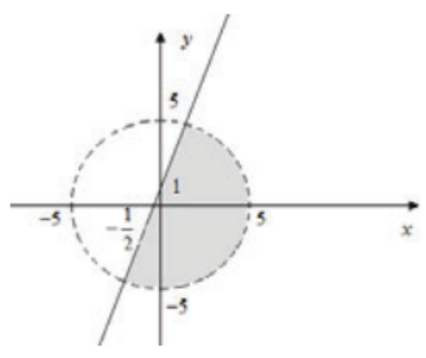
i) $D(f)=\{[x,y]\in E_2,\ y^2-4\geq 0\ \wedge\ 9-x^2\geq 0\}$, obr. 4.2.29



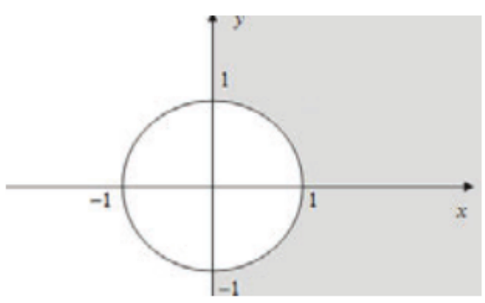
Obr. 4.2.21



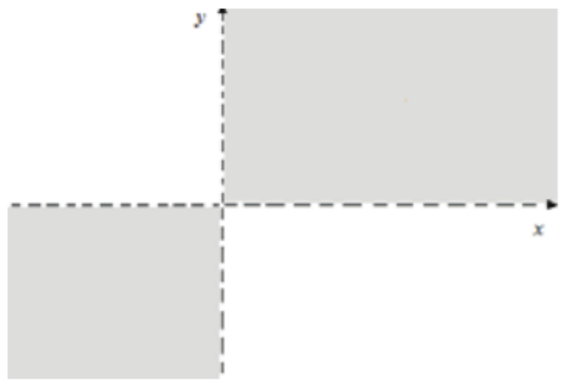
Obr. 4.2.22



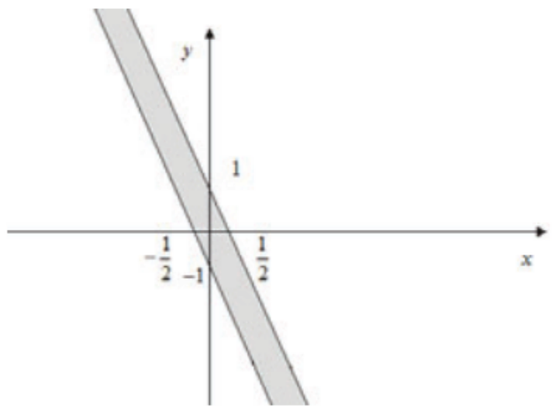
Obr. 4.2.23



Obr. 4.2.24



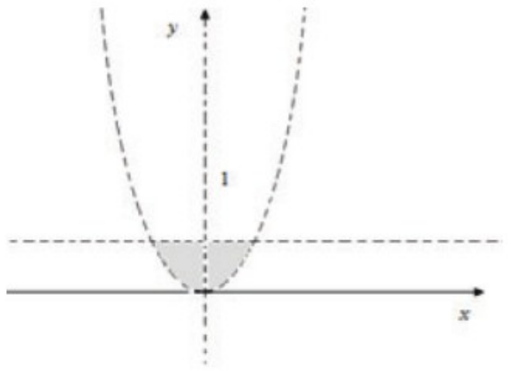
Obr. 4.2.25



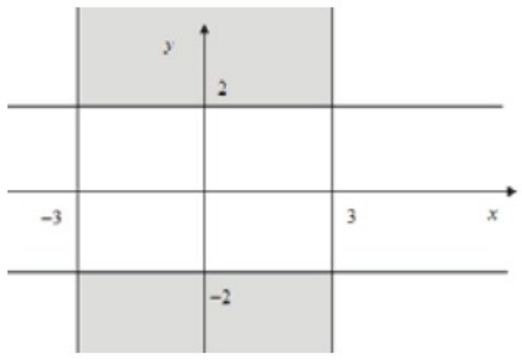
Obr. 4.2.26



Obr. 4.2.27



Obr. 4.2.28



Obr. 4.2.29

4.2.2 a) $D(f_1)=\{[x,y]\in E_2;(y-x^2>0)\wedge(1-x-y\geq 0)\}$;

b) $D(f_2)=\{[x,y]\in E_2;(3-x^2-y>0)\wedge(x+y\geq 0)\}$;

c) $D(f_3)=\{[x,y]\in E_2;(\sqrt{x^2+y-4}\neq 0)\wedge(x^2+y-4\geq 0)\wedge(25-x^2-y^2>0)\}$;

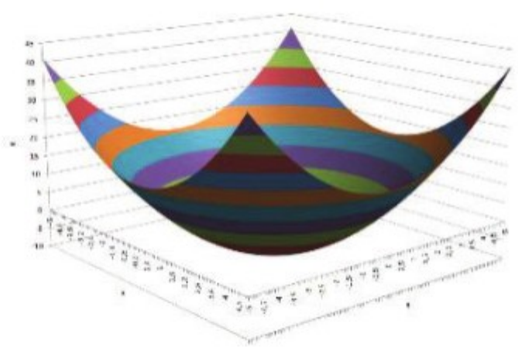
d) $D(f_4)=\{[x,y]\in E_2;\ 25-x^2-y^2>0\}$; **e)** $D(f_5)=\{[x,y]\in E_2\}=E_2$;

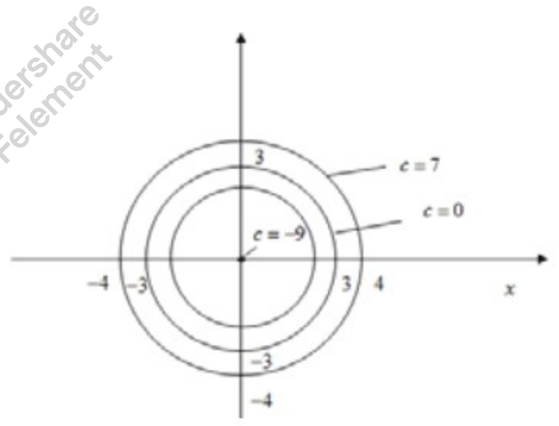
f) $D(f_6)=\{[x,y]\in E_2;(y-x>0)\wedge(\ln(y-x)\neq 0\}=\{[x,y]\in E_2;(y-x>0)\wedge(y-x\neq 1)\}$

4.2.3 a) $x^2+y^2=c+9,\ c\geq -9\Rightarrow H(f)=\langle -9,\infty)$, obr. 4.2.30;

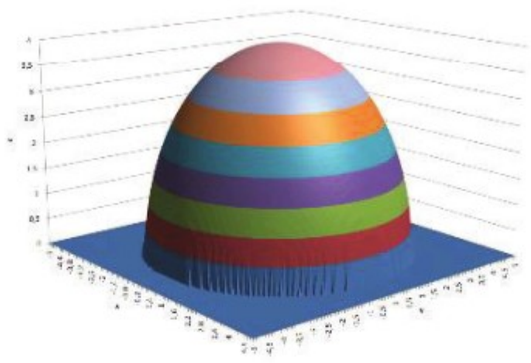
b) $x^2+y^2=16-c^2,\ c\in\langle 0,4\rangle\Rightarrow H(f)=\langle 0,4\rangle$, obr. 4.2.31;

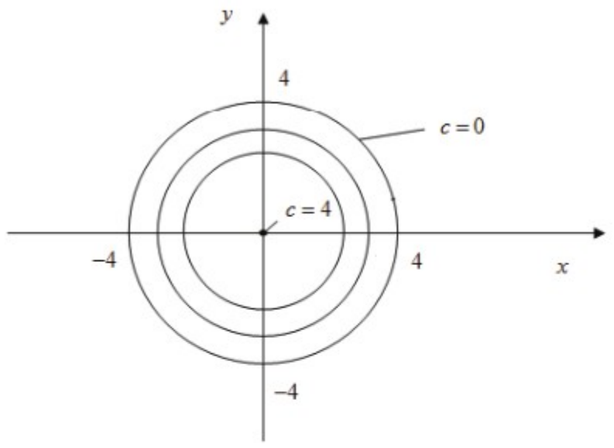
c) $-4x+2y-7-c=0,\ c\in R\Rightarrow H(f)=R$, obr. 4.2.32



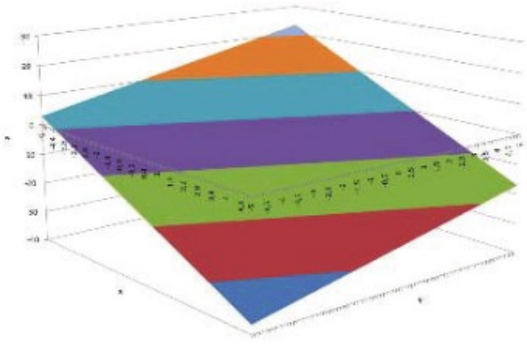


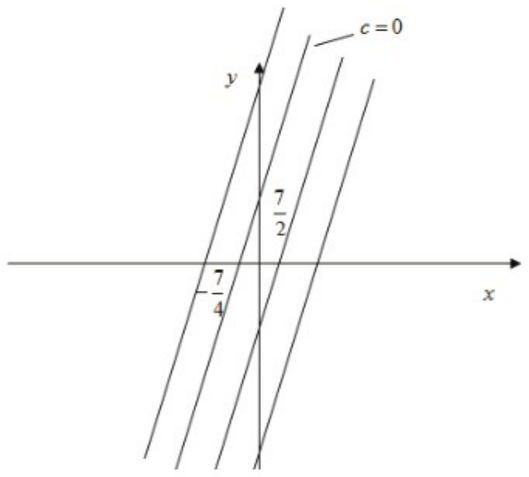
Obr. 4.2.30





Obr. 4.2.31





Obr. 4.2.32

4.2.4 a) $f_1(x)=x^2-2x-104$, $f_2(y)=-y^3+33y-69$;

b) $f_1(x)=\sqrt{8\cdot(x^2-1)}$, $f_2(y)=\sqrt{y^2\cdot(y-2)}$

4.3 Funkcie ekonomickej analýzy

V tejto časti uvedieme niektoré funkcie ekonomickej analýzy, na ktorých budeme v ďalších podkapitolách aplikovať problematiku diferenciálneho počtu funkcie dvoch premenných.

Pri určovaní definičného oboru ekonomických funkcií budeme brať do úvahy iba tie body ich matematicky určeného prirodzeného definičného oboru, v ktorých sú ekonomicky interpretovateľné.

Produkčná funkcia (production function)

Ak v ekonomickom procese predstavuje z počet jednotiek výstupu, ktorý je závislý od premenných x, y vstupov, tak funkciu

$$f: z = f(x, y) \tag{1}$$

nazývame produkčnou funkciou.

Možno ju charakterizovať ako funkciu vyjadrujúcu závislosť objemu produkcie z v určitom výrobnom procese od výrobných faktorov x, y.

Vstupmi môžu byť množstvo práce, materiál a podobne, výstupom je objem produkcie vyjadrený v jednotkách produkcie.

Funkcia celkových nákladov (total cost function)

$$TC = C(x, y) \tag{2}$$

určuje celkové náklady pri produkcii x jednotiek prvého druhu produktu a y jednotiek produkcie druhého druhu produktu.

Funkcia celkových nákladov na vstupy (total imputs cost function)

Ak $f: z = f(x, y)$ je produkčná funkcia vyjadrujúca počet jednotiek produkcie z pri použití x jednotiek vstupu X a y jednotiek vstupu Y, tak funkciu

$$TC_V = C_V(x, y) \tag{3}$$

nazývame funkciou celkových nákladov na vstupy.

Funkcia celkových príjmov (total revenue function)

$$TR = R(x, y) \tag{4}$$

určuje celkové príjmy, ak sa predá x jednotiek produkcie prvého druhu a y jednotiek produkcie druhého druhu.

Funkcia celkového zisku (total profit function)

$$TP = P(x, y) \tag{5}$$

je definovaná ako rozdiel funkcie celkových príjmov a funkcie celkových nákladov, t. j.

$$P(x, y) = R(x, y) - C(x, y) \tag{6}$$

Dopytová funkcia (demand function)

vyjadruje závislosť požadovaného množstva q_1 daného tovaru T_1 (resp. požadovaného množstva q_2 tovaru T_2) od jednotkovej ceny p_1 tovaru T_1 a jednotkovej ceny p_2 tovaru T_2. Zapisujeme

$$q_1 = d_1\left(p_1, p_2\right) \text{ alebo } d_1 : q_1 = q_1\left(p_1, p_2\right) \tag{7}$$

$$q_2 = d_2\left(p_1, p_2\right) \text{ alebo } d_2 : q_2 = q_2\left(p_1, p_2\right) \tag{8}$$

Poznámka 4.3.1

V prípade funkcie celkových nákladov sa používa označenie funkčnej hodnoty $C(x, y)$ namiesto $f(x, y)$. Keďže x, y predstavujú úroveň produkcie jednotlivých výrobkov, celkové náklady $C(x, y)$ sú definované v bodoch $[x, y] \in E_2$, pre ktoré platí $x \geq 0,\ y \geq 0$.

V prípade dopytovej funkcie sa používa označenie funkčnej hodnoty $q(p_1, p_2)$, t. j. neznámu x nahradíme neznámou p_1 a neznámu y nahradíme neznámou p_2. Keďže p_1, p_2 predstavujú úroveň cien jednotlivých tovarov, dopyt $q(p_1, p_2)$ po danom tovare je definovaný v bodoch $[p_1, p_2] \in E_2$, pre ktoré platí $p_1 > 0,\ p_2 > 0$.

V nasledujúcej časti sa oboznámime s homogénnou funkciou, ktorej vlastnosti možno využiť na efektívne určenie zmeny jej funkčnej hodnoty.

Definícia 4.3.1 (*homogénna funkcia k-tého stupňa*) Funkcia $f:\ z = f(x, y)$ s definičným oborom $D(f) \neq \emptyset$ sa nazýva ***homogénna funkcia k-tého stupňa*** práve vtedy, keď pre každé $t \in (0, \infty)$ a každý bod $[x, y] \in D(f)$ platí, že $[tx, ty] \in D(f)$ a súčasne platí

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \tag{9}$$

Poznámka 4.3.2

Pre $t > 1$ platí: Ak sa vstupy t-násobne zvýšia, tak sa produkcia zvýši t^k -násobne.

Pre $0 < t < 1$ platí: Ak sa vstupy $\frac{1}{t}$ - násobne znížia, tak sa produkcia zníži $\left(\frac{1}{t}\right)^k$ - násobne.

Príklad 4.3.1 Celkové množstvo vyrobeného tovaru daným podnikom za jeden týždeň závisí od počtu hodín práce x a množstva ton materiálu y a je dané produkčnou funkciou

$$f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 5xy$$

a) Zistime, či je daná produkčná funkcia homogénna. Ak áno, určme jej stupeň a ekonomicky interpretujme pre vstup $x = 40$ hodín práce, $y = 5$ ton materiálu a $t = 3$.

b) Ak uvažujeme, že náklady na hodinu práce sú 900 peňažných jednotiek a náklady na jednu tonu materiálu sú $10\,000$ peňažných jednotiek, zistime ako sa zmenia priemerné náklady na vstupy po trojnásobnom zvýšení vstupov zo zadania a).

Riešenie.

a) Definičným oborom produkčnej funkcie je množina bodov $[x, y] \in E_2$, pre ktoré platí $x > 0,\ y > 0$. Pre každé $t \in (0, \infty)$ a každý bod $[x, y] \in D(f)$ platí $t \cdot x > 0, t \cdot y > 0$, a teda aj bod $[tx, ty]$ patrí do definičného oboru produkčnej funkcie.

Zistime, či pre produkčnú funkciu platí vzťah (9).

$$f(tx,ty) = 4(tx)^2 + 9(ty)^2 - 5txty = 4t^2x^2 + 9t^2y^2 - 5t^2xy =$$
$$= t^2\left(4x^2 + 9y^2 - 5xy\right) = t^2 f(x, y)$$

Podľa definície 4.3.1 sme dokázali, že daná produkčná funkcia je homogénnou funkciou druhého stupňa. Pri trojnásobnom ($t = 3$) zvýšení vstupov x, y z hodnoty $[40;5]$ na hodnotu $[120;15]$ nastane deväťnásobné zvýšenie produkcie, čo zapíšeme

$$f(120,15) = 3^2 \cdot f(40,5).$$

Produkcia sa zvýšila z hodnoty 5 625 produkčných jednotiek na hodnotu 50 625 produkčných jednotiek.

b) Na základe zadania vytvoríme funkciu celkových nákladov na vstupy

$$C_V(x, y) = 900x + 10\,000y.$$

Vypočítame hodnotu celkových nákladov na vstupy pred zvýšením vstupov

$$C_V(40,5) = 86\,000\ p.\ j.$$

a po ich trojnásobnom zvýšení

$$C_V(120,15) = 258\,000\ p.\ j.$$

Pre vypočítané hodnoty nákladov na vstupy určíme priemerné náklady na vstupy, t. j. celkové náklady na vstupy pripadajúce na jednotku produkcie

$$\tilde{C}_V(40,5) = \frac{C_V(40,5)}{f(40,5)} = \frac{86\,000}{5625} \doteq 15,289\ p.\ j.$$

$$\tilde{C}_V(120,15) = \frac{C_V(120,15)}{f(120,15)} = \frac{258\,000}{50\,625} \doteq 5,096\ p.j.$$

Priemerné náklady na vstupy sa napriek trojnásobnému zvýšeniu vstupov znížili z hodnoty 15,289 peňažných jednotiek na hodnotu 5,096 peňažných jednotiek. Hovoríme, že ide ***o degresívny rast*** priemerných nákladov na vstupy. V prípade ich zvýšenia by sme hovorili ***o progresívnom raste*** priemerných nákladov na vstupy.

ÚLOHY

4.3.1 Dopyt q po tovare T_1 je daný dopytovou funkciou $d: q = 4p_1^2 - 6p_1p_2 + p_2^2 + 26$ (v tonách).

a) Vypočítajte dopyt q po tovare T_1, ak jednotková cena p_1 tovaru T_1 má hodnotu $p_1 = 2$ p. j. a jednotková cena p_2 tovaru T_2 má hodnotu $p_2 = 4$ peňažné jednotky.

b) Vypočítajte dopyt q po tovare T_1, ak jednotková cena p_1 tovaru T_1 má hodnotu $p_1 = 2$ p. j. a jednotková cena p_2 tovaru T_2 má hodnotu $p_2 = 5$ p. j.

c) Vypočítajte dopyt q po tovare T_1, ak jednotková cena p_1 tovaru T_1 má hodnotu $p_1 = 1$ p. j. a jednotková cena p_2 tovaru T_2 má hodnotu $p_2 = 2$ peňažné jednotky.

4.3.2 Podnik vyrába dva druhy výrobkov X, Y v množstve x, y (v tis. kusov). Závislosť celkových nákladov od množstva produkcie je daná funkciou celkových nákladov $C(x, y) = 10x^2 + 5y^2 - 12xy - 10x + 500$ (v tis. eur). Vypočítajte celkové náklady podniku, ak vyrába

a) 3 tisíc kusov výrobku X a 2 tisíc kusov výrobku Y,

b) 2 tisíc kusov výrobku X a 3 tisíc kusov výrobku Y.

4.3.3 a) Zistite, či produkčná funkcia $f(x, y) = 2\,x^{0,4}y^{0,6}$ je homogénna. Ak áno, určte jej stupeň a ekonomicky interpretujte.

b) Uvažujme v úlohe a) vstup $x = 100$ hodín práce a $y = 2$ tony materiálu, pričom náklady na hodinu práce sú 20 p.j. a náklady na jednu tonu materiálu sú 5 000 p.j. Zistite, ako sa zmenia priemerné náklady na vstupy po ich dvojnásobnom zvýšení.

4.3.4 Celkové množstvo produkcie vyrobenej spoločnosťou Glob, a.s. závisí od počtu hodín práce x, od množstva ton materiálu y a je vyjadrené produkčnou funkciou $f(x, y) = x^3 - 10x^2y + 2y^3$. Zistite, či je daná produkčná funkcia homogénna. Ak áno, určte jej stupeň a ekonomicky interpretujte pre vstupy $x = 100$, $y = 10$, $t = 2$.

4.3.5 Zistite, či je funkcia $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - xy$ homogénna. Ak áno, určte jej stupeň.

Výsledky

4.3.1 **a)** $q(2, 4) = 10$ ton; **b)** $q(2, 5) = 7$ ton; **c)** $q(1, 2) = 22$ ton

4.3.2 **a)** $C(3, 2) = 508$ tisíc eur; **b)** $C(2, 3) = 493$ tisíc eur

4.3.3 **a)** Ide o homogénnu funkciu prvého stupňa. Pre $t > 1$ platí: Ak sa vstupy t-násobne zvýšia, tak sa zvýši t-násobne aj produkcia. Pre $0 < t < 1$ platí: Ak sa vstupy $\frac{1}{t}$-násobne znížia, tak sa $\frac{1}{t}$-násobne zníži aj produkcia; **b)** priemerné náklady na vstupy sa nezmenia

4.3.4 Daná produkčná funkcia je homogénna tretieho stupňa, lebo $f(tx, ty) = t^3 \cdot f(x, y)$. Ak sa vstupy $x = 100$, $y = 10$ zvýšia dvojnásobne (t.j. na $x = 200$, $y = 20$), potom sa produkcia zvýši 2^3-násobne (t.j. osemnásobne) z úrovne 2 000 na 16 000 jednotiek produkcie.

4.3.5 homogénna funkcia druhého stupňa

Diferenciálny počet funkcie dvoch reálnych premenných

Diferenciálny počet funkcie dvoch a viac reálnych premenných má v ekonómii mnoho aplikácií. V podkapitolách 4.4 – 4.8 sa zameriame na diferenciálny počet funkcie dvoch premenných a na niektoré jeho aplikácie v ekonómii. Ukážeme jeho využitie pri približnom určovaní zmeny funkčnej hodnoty, marginálnej analýze, parciálnej elasticite a hľadaní ostrých lokálnych a viazaných extrémov funkcie dvoch premenných v rámci úloh mikroekonomického charakteru.

Budeme využívať analógie pojmov a princípov definovaných pri diferenciálnom počte funkcie jednej reálnej premennej v kapitole 3. Pripomeňme, že ak je funkcia jednej premennej f definovaná v istom úplnom okolí bodu x_0, tak deriváciou $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 rozumieme číslo definované vzťahom

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

za predpokladu, že limita vo vzťahu (1) existuje (definícia 3.1.1). Túto definíciu využijeme pri zavedení parciálnych derivácií funkcie dvoch premenných. Ďalej si pripomeňme vetu 3.4.5 o postačujúcej podmienke monotónnosti funkcie na intervale, na základe ktorej budeme určovať správanie sa parciálnych funkcií v súvislosti so zmenou ich funkčných hodnôt.

Poznámka 4.4.1 Nech funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O_\delta(x_0)$ bodu x_0 a nech má v tomto bode deriváciu $f'(x_0) \neq 0$. Ak $f'(x_0) > 0$ $\left[f'(x_0) < 0\right]$, tak existuje také $\delta_1 > 0$, že

$$\forall x \in \tilde{O}_{\delta_1^-}(x_0) : f(x) < f(x_0) \wedge \forall x \in \tilde{O}_{\delta_1^-}(x_0) : f(x) > f(x_0) \tag{2}$$

$$\left[\forall x \in \tilde{O}_{\delta_1}(x_0) : f(x) > f(x_0) \wedge \forall x \in \tilde{O}_{\delta_1'}(x_0) : f(x) < f(x_0)\right] \tag{3}$$

Ak pre funkciu f a bod $x_0 \in D(f)$ existuje $\tilde{O}_\delta(x_0)$, že platí (2), tak funkciu f nazývame ***rastúcou v bode*** x_0, ak platí vzťah (3), nazývame ju ***klesajúcou v bode*** x_0.

4.4 Parciálne derivácie funkcie dvoch premenných

Definícia 4.4.1 (*parciálna derivácia funkcie dvoch premenných v bode A podľa premennej x*)
Nech je daná funkcia $f: z = f(x, y)$ a bod $A = [a_1, a_2]$ z definičného oboru funkcie f. Predpokladáme, že funkcia f je definovaná v nejakom okolí bodu $A = [a_1, a_2]$. Vytvorme parciálnu funkciu

$$f_1: z = f_1(x), \text{ resp. } f_1: z = f(x, a_2)$$

Ak existuje vlastná derivácia $f_1'(a_1)$, tak táto derivácia sa nazýva ***parciálna derivácia*** funkcie $f: z = f(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$ ***podľa premennej x***, čo zapisujeme

$$\frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x} = \frac{\partial f(A)}{\partial x}, \quad \text{alebo} \quad f_x'(a_1, a_2) = f_x'(A).$$

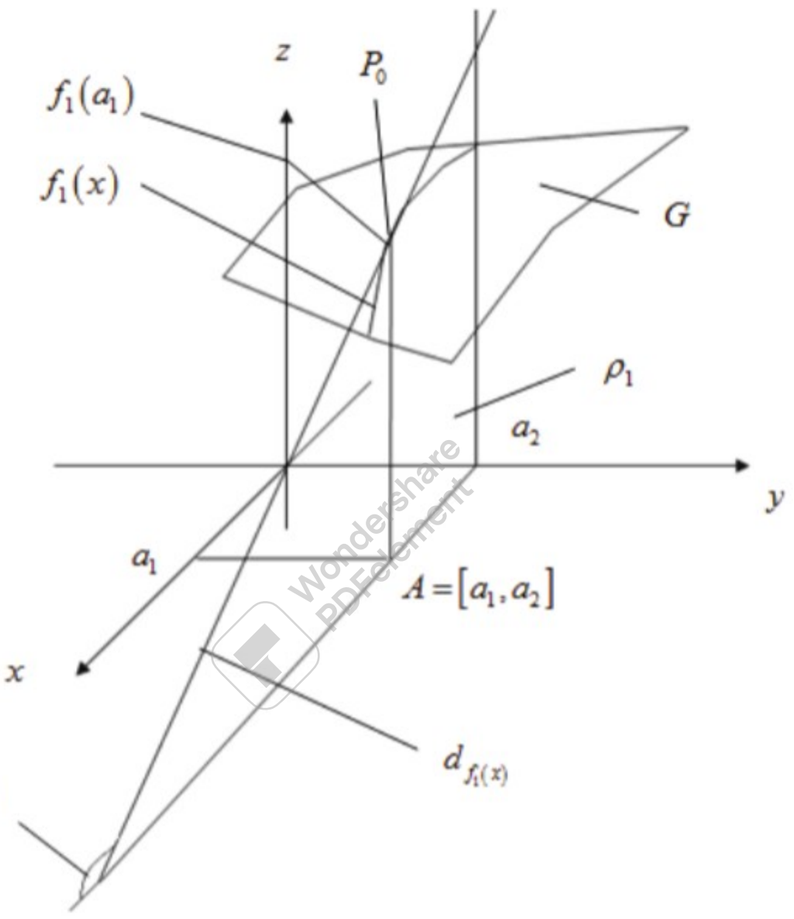
Poznámka 4.4.2 Analogicky s definíciou $f'(x_0)$ a jej geometrickým významom platí pre deriváciu parciálnej funkcie $f_1(x)$ v bode a_1 vzťah

$$f_1'(a_1) = \lim_{x \to a_1} \frac{f_1(x) - f_1(a_1)}{x - a_1} \tag{4}$$

podľa ktorého potom pre $f_x'(a_1, a_2)$ platí

$$f_x'(a_1, a_2) = f_1'(a_1) = \operatorname{tg} \varphi_1 \tag{5}$$

Vzťah (5) môžeme názorne geometricky interpretovať na obr. 4.4.1, kde pre uhol, ktorý zviera dotyčnica $d_{f_1(x)}$ zostrojená k parciálnej funkcii $f_1(x)$ v rovine ρ_1 v bode $P_0 = [a_1, a_2, f(a_1, a_2)]$ kde $f(a_1, a_2) = f_1(a_1)$ platí $\operatorname{tg} \varphi_1 = \boldsymbol{f_x'(a_1, a_2)}$.



Obr. 4.4.1 Geometrická interpretácia parciálnej derivácie $f_x'(a_1, a_2)$

Poznámka 4.4.3 ***Interpretácia významu*** $\boldsymbol{f_x'(a_1, a_2)}$

Parciálna derivácia $f_x'(a_1, a_2)$ poskytuje nasledujúce informácie:

1. Hodnota $f_x'(a_1, a_2) = \operatorname{tg} \varphi_1$ informuje o tom, ako ***„rýchlo“*** sa menia ***funkčné hodnoty parciálnej funkcie*** $f_1(x)$ v okolí bodu a_1, v ktorom sme k funkcii $f_1(x)$ zostrojili dotyčnicu $d_{f_1(x)}$.
2. Informáciu ***o zmene funkčných hodnôt funkcie*** $f_1(x)$ získame využitím poznámky 4.4.1, na základe ktorej môžeme tvrdiť, že:
   ak $f_x'(a_1, a_2) = f_1'(a_1) > 0$, tak je parciálna funkcia $f_1(x)$ v bode a_1 ***rastúca***,
   ak $f_x'(a_1, a_2) = f_1'(a_1) < 0$, tak je parciálna funkcia $f_1(x)$ v bode a_1 ***klesajúca***.

Definícia 4.4.2 (*parciálna derivácia funkcie dvoch premenných v bode A podľa premennej y*)
Nech je daná funkcia $f:\ z=f(x,y)$ a bod $A=[a_1,a_2]$ z definičného oboru funkcie f. Predpokladáme, že funkcia f je definovaná v nejakom okolí bodu $A=[a_1,a_2]$. Vytvorme parciálnu funkciu

$$f_2:\ z=f_2(y),\ \text{resp.}\ f_2:\ z=f(a_1,y)$$

Ak existuje vlastná derivácia $f_2'(a_2)$, tak táto derivácia sa nazýva ***parciálna derivácia*** funkcie $f:\ z=f(x,y)$ v bode $A=[a_1,a_2]$ ***podľa premennej y*** , čo zapisujeme

$$\frac{\partial f(a_1,a_2)}{\partial y}=\frac{\partial f(A)}{\partial y},\quad \text{resp.}\quad f_y'(a_1,a_2)=f_y'(A).$$

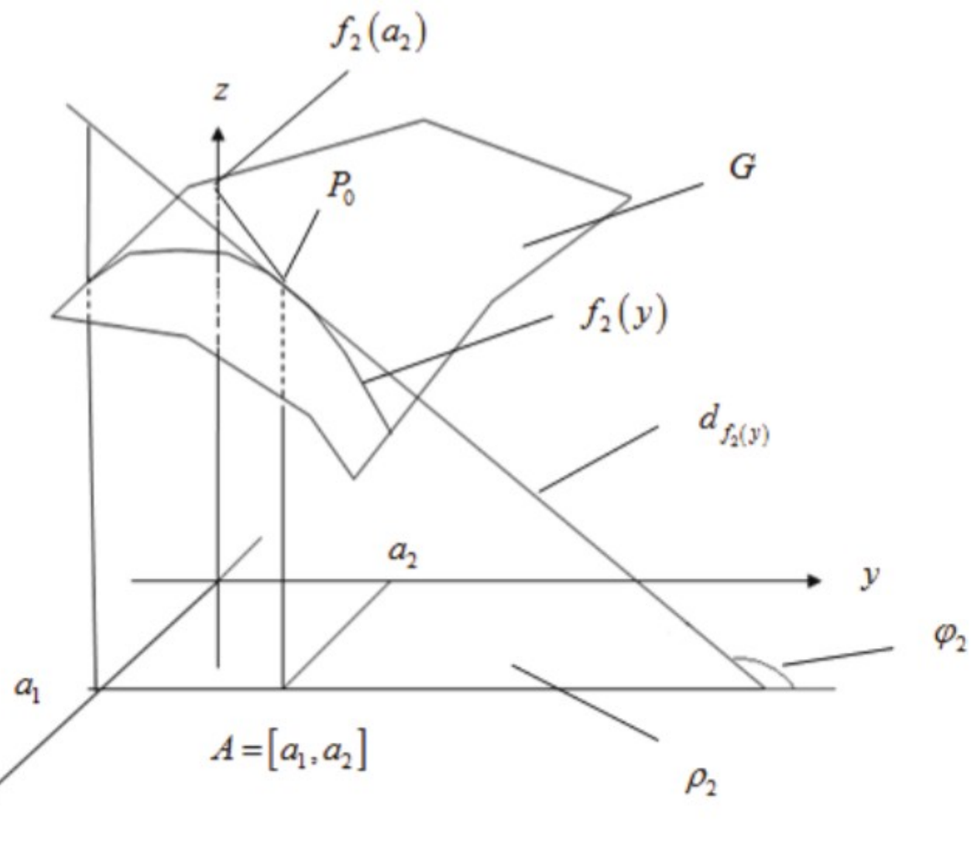
Poznámka 4.4.4 Analogicky s definíciou $f'(x_0)$ a jej geometrickým významom platí pre deriváciu parciálnej funkcie $f_2(y)$ v bode a_2 vzťah

$$f_2'(a_2)=\lim_{y\to a_2}\frac{f_2(y)-f_2(a_2)}{y-a_2} \tag{6}$$

podľa ktorého potom pre $f_y'(a_1,a_2)$ platí

$$f_y'(a_1,a_2)=f_2'(a_2)=\operatorname{tg}\varphi_2 \tag{7}$$

Vzťah (7) môžeme názorne geometricky interpretovať na obr. 6.1.2, kde pre uhol, ktorý zviera dotyčnica $d_{f_2(y)}$ zostrojená k parciálnej funkcii $f_2(y)$ v rovine ρ_2 v bode $P_0=[a_1,a_2,f(a_1,a_2)]$ kde $f(a_1,a_2)=f_2(a_2)$ platí $\operatorname{tg}\varphi_2=\boldsymbol{f_y'(a_1,a_2)}$.



Obr. 4.4.2 Geometrická interpretácia parciálnej derivácie $f_y'(a_1,a_2)$.

Poznámka 4.4.5 ***Interpretácia významu*** $f'_y(a_1, a_2)$

Parciálna derivácia $f'_y(a_1, a_2)$ poskytuje nasledujúce informácie:

1. Hodnota $f'_y(a_1, a_2) = \operatorname{tg} \varphi_2$ informuje o tom, ako ***„rýchlo“*** sa menia funkčné hodnoty parciálnej funkcie $f_2(y)$ v okolí bodu a_2, v ktorom sme ku funkcii $f_2(y)$ zostrojili dotyčnicu $d_{f_2(y)}$.
2. Informáciu ***o zmene funkčných hodnôt funkcie*** $f_2(y)$ získame využitím poznámky 4.4.1, na základe ktorej môžeme tvrdiť, že:
   ak $f'_y(a_1, a_2) = f'_2(a_2) > 0$, tak je parciálna funkcia $f_2(y)$ v bode a_2 ***rastúca***,
   ak $f'_y(a_1, a_2) = f'_2(a_2) < 0$, tak je parciálna funkcia $f_2(y)$ v bode a_2 ***klesajúca***.

Definícia 4.4.3 Nech je daná funkcia dvoch premenných $f: z = f(x, y)$ a nech $M_1 \subset D(f)$, resp. $M_2 \subset D(f)$ je množina všetkých tých bodov, v ktorých má funkcia f parciálnu deriváciu podľa premennej x, resp. y. Každému bodu $X \in M_1$, resp. $X \in M_2$ možno jednoznačne priradiť číslo $f'_x(X)$, resp. $f'_y(X)$. Tým sme na množine M_1, resp. M_2 definovali funkciu, ktorá sa nazýva ***parciálna derivácia*** funkcie f ***podľa premennej x*** resp. ***podľa premennej y***.
Zapisujeme

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_x(x, y), \text{ resp. } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Poznámka 4.4.6 Pri výpočte $f'_x(x, y)$ a $f'_y(x, y)$ môžeme postupovať podľa známych pravidiel derivovania funkcií jednej reálnej premennej. Pri výpočte $f'_x(x, y)$ hodnotu premennej y budeme považovať za konštantu a pri výpočte $f'_y(x, y)$ budeme považovať za konštantu hodnotu premennej x.

Poznámka 4.4.7 Parciálne derivácie funkcie $f: z = f(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$, t.j. $f'_x(a_1, a_2)$, $f'_y(a_1, a_2)$, môžeme vypočítať ako funkčnú hodnotu funkcií $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ v bode A.

Príklad 4.4.1 Vypočítajme parciálne derivácie $f'_x(a_1, a_2)$, $f'_y(a_1, a_2)$ v bode $A = [2, 5]$, ak $f: z = 3x^2 - 4xy + y^2$, a to

a) na základe definícií 4.4.1 a 4.4.2 parciálnych derivácií $f'_x(a_1, a_2)$ a $f'_y(a_1, a_2)$,

b) na základe definície 4.4.3 a poznámky 4.4.7.

Riešenie.

$$D(f) = \{[x, y] \in E_2\} = E_2$$

a) $f'_x(2, 5)$ určíme na základe existencie derivácie parciálnej funkcie $f_1(x)$ v bode $a_1 = 2$, t.j. $f'_1(2)$. Určíme parciálnu funkciu $f_1(x)$ a vypočítame $f'_1(x)$ použitím pravidiel derivovania definovaných pri funkcii jednej reálnej premennej.

$$f_1(x) = f(x,5) = 3x^2 - 20x + 25$$

$$f_1'(x) = 6x - 20$$

$$f_1'(2) = -8$$

Podľa vzťahu (5) platí $f_x'(2,5) = f_1'(2) = -8$.

Analogicky $f_y'(2,5)$ určíme na základe existencie derivácie parciálnej funkcie $f_2(y)$ v bode $a_2 = 5$ t. j. $f_2'(5)$. Určíme parciálnu funkciu $f_2(y)$ a vypočítame $f_2'(y)$ použitím pravidiel derivovania definovaných pri funkcii jednej reálnej premennej.

$$f_2(y) = f(2,y) = y^2 - 8y + 12$$

$$f_2'(y) = 2y - 8$$

$$f_2'(5) = 2$$

Podľa vzťahu (7) platí $f_y'(2,5) = f_2'(5) = 2$.

b) Parciálnu deriváciu $f_x'(x,y)$ vypočítame derivovaním funkcie f podľa premennej x, t. j. považujeme neznámu y za konštantu

$$f_x'(x,y) = 6x - 4y.$$

Parciálnu deriváciu funkcie f podľa premennej x v bode $A = [2,5]$ určíme ako funkčnú hodnotu $f_x'(x,y)$ v tomto bode, t. j. $f_x'(2,5) = 6 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = -8$.

Analogicky parciálnu deriváciu $f_y'(x,y)$ vypočítame derivovaním funkcie f podľa premennej y, t. j. považujeme neznámu x za konštantu

$$f_y'(x,y) = -4x + 2y.$$

Parciálnu deriváciu funkcie f podľa premennej y v bode $A = [2,5]$ určíme ako funkčnú hodnotu $f_y'(x,y)$ v tomto bode, t. j. $f_y'(2,5) = -4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 2$.

Príklad 4.4.2 Vypočítajme prvé parciálne derivácie funkcie $f: z = \left(2x^3 - 3xy^2 + 5y\right)^4$.

Riešenie.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2\}$$

Pri výpočte prvých parciálnych derivácií $f_x'(x,y)$ a $f_y'(x,y)$ použijeme princíp derivovania zloženej funkcie.

$$f_x'(x,y) = 4\left(2x^3 - 3xy^2 + 5y\right)^3 \left(6x^2 - 3y^2\right)$$

$$f_y'(x,y) = 4\left(2x^3 - 3xy^2 + 5y\right)^3 \left(-6xy + 5\right)$$

Wondershare PDFelement

Príklad 4.4.3 Vypočítajme prvé parciálne derivácie funkcie $f: z = \dfrac{x^2 y}{x+5y}$.

Riešenie.

$$D(f) = \{[x, y] \in E_2,\ x+5y \neq 0\}$$

Pri výpočte prvej parciálnej derivácie $f'_x(x, y)$ použijeme princíp derivovania podielu dvoch funkcií jednej reálnej premennej, pričom považujeme neznámu y za konštantu.

$$f'_x(x, y) = \frac{2xy \cdot (x+5y) - x^2 y \cdot 1}{(x+5y)^2} = \frac{x^2 y + 10xy^2}{(x+5y)^2}$$

Analogicky pri výpočte prvej parciálnej derivácie $f'_y(x, y)$ použijeme princíp derivovania podielu dvoch funkcií jednej reálnej premennej, pričom považujeme neznámu x za konštantu.

$$f'_y(x, y) = \frac{x^2 \cdot (x+5y) - x^2 y \cdot 5}{(x+5y)^2} = \frac{x^3}{(x+5y)^2}$$

Druhé parciálne derivácie funkcie dvoch premenných

Parciálne derivácie $f'_x(x, y)$ a $f'_y(x, y)$ sú funkciami dvoch premenných, a teda môžeme určiť podľa definície 4.4.3 ich parciálne derivácie podľa premennej x a podľa premennej y (ak existujú). Nazývame ich ***druhé parciálne derivácie*** funkcie f a zapisujeme

$$\frac{\partial\left(f'_x(x, y)\right)}{\partial x} = f''_{xx}(x, y) \tag{8}$$

$$\frac{\partial\left(f'_x(x, y)\right)}{\partial y} = f''_{xy}(x, y) \tag{9}$$

$$\frac{\partial\left(f'_y(x, y)\right)}{\partial x} = f''_{yx}(x, y) \tag{10}$$

$$\frac{\partial\left(f'_y(x, y)\right)}{\partial y} = f''_{yy}(x, y) \tag{11}$$

Poznámka 4.4.8 Druhé parciálne derivácie funkcie $f:\ z = f(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$, t. j. $f''_{xx}(a_1, a_2)$, $f''_{xy}(a_1, a_2)$, $f''_{yx}(a_1, a_2)$, $f''_{yy}(a_1, a_2)$ vypočítame ako funkčnú hodnotu funkcií $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{yy}(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$.

Veta 4.4.1 (***Schwarzova veta***) Ak funkcia f má v nejakom okolí $O_\delta(A)$ parciálne derivácie $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ a tieto sú v bode A spojité, potom platí

$$f''_{xy}(a_1, a_2) = f''_{yx}(a_1, a_2) \tag{12}$$

Príklad 4.4.4 Vypočítajme prvé a druhé parciálne derivácie funkcie f v bode $A=[3,1]$, ak $f:\ z=3x^2-5x^2y+70x-20xy^3-10y+5y^2-26$.

Riešenie.

$$D(f)=\{[x,y]\in E_2\}$$

Najskôr určíme dve prvé parciálne derivácie ako funkcie dvoch premenných a vypočítame ich funkčné hodnoty v bode $A=[3,1]$.

$$f'_x(x,y)=6x-10xy+70-20y^3 \qquad f'_y(x,y)=-5x^2-60xy^2-10+10y$$

$$f'_x(3,1)=6\cdot3-10\cdot3\cdot1+70-20\cdot1^3=38 \qquad f'_y(3,1)=-5\cdot3^2-60\cdot3\cdot1^2-10+10\cdot1=-225$$

Určíme štyri druhé parciálne derivácie ako funkcie dvoch premenných a vypočítame ich funkčné hodnoty v bode $A=[3,1]$.

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial\left(f'_x(x,y)\right)}{\partial x}=6-10y \qquad f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial\left(f'_y(x,y)\right)}{\partial x}=-10x-60y^2$$

$$f''_{xx}(3,1)=6-10\cdot1=-4 \qquad f''_{yx}(3,1)=-10\cdot3-60\cdot1^2=-90$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial\left(f'_x(x,y)\right)}{\partial y}=-10x-60y^2 \qquad f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial\left(f'_y(x,y)\right)}{\partial y}=-120xy+10$$

$$f''_{xy}(3,1)=-10\cdot3-60\cdot1^2=-90 \qquad f''_{yy}(3,1)=-120\cdot3\cdot1+10=-350$$

Aplikácia geometrického významu parciálnych derivácií v ekonomickej analýze

Príklad 4.4.5 Je daná funkcia celkových nákladov pri výrobe dvoch výrobkov X, Y

$$C(x,y)=2x^2+y^2-xy+70x+70y+100,\ \ x>0,\ y>0.$$

Rozhodnime, či je výhodnejšie zvyšovať produkciu výrobku X z hodnoty $x=10$ hl pri zachovaní pôvodnej produkcie výrobku Y na hodnote $y=20$ hl ($*$), alebo, naopak, zvyšovať produkciu výrobku Y z hodnoty $y=20$ hl pri zachovaní pôvodnej produkcie výrobku X na hodnote $x=10$ hl ($\square$). Svoje rozhodnutie zdôvodnime.

Riešenie. Využijeme geometrický význam parciálnych derivácií $C'_x(10,20)$ a $C'_y(10,20)$. Vypočítame $C'_x(10,20)$ a $C'_y(10,20)$

$$C'_x(x,y)=4x-y+70 \qquad C'_y(x,y)=2y-x+70$$

$$C'_x(10,20)=4\cdot10-20+70=90 \qquad C'_y(10,20)=2\cdot20-10+70=100$$

a určíme parciálne funkcie $C_1(x)$ a $C_2(y)$ v bode $A=[10,20]$ na základe definícií 4.4.1 a 4.4.2.

$$C_1(x)=C(x,20)=2x^2+50x+1900,\quad x>0$$
$$C_2(y)=C(10,y)=y^2+60y+1000,\quad y>0$$

Interpretácia významu $C'_x(10, 20)$

- Pre uhol, ktorý zviera dotyčnica zostrojená k parciálnej funkcii $C_1(x)$ v bode 10 platí

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = C'_x(10, 20) = 90 \Rightarrow \varphi_1 \doteq 89,36^\circ$$

- Keďže $C'_x(10, 20) = 90 > 0$, je parciálna funkcia $C_1(x)$ v bode 10 ***rastúca***, zvýšením (znížením) úrovne produkcie výrobku X z hodnoty $x = 10\,hl$ pri zachovaní produkcie výrobku Y na hodnote $y = 20\,hl$ sa zvýši (zníži) funkčná hodnota parciálnej funkcie $C_1(x)$, resp. sa zvýšia (znížia) celkové náklady.

Interpretácia významu $C'_y(10, 20)$

- Pre uhol, ktorý zviera dotyčnica zostrojená k parciálnej funkcii $C_2(y)$ v bode 20 platí

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = C'_y(10, 20) = 100 \Rightarrow \varphi_2 \doteq 89,43^\circ$$

- Keďže $C'_y(10, 20) = 100 > 0$, je parciálna funkcia $C_2(y)$ v bode 20 ***rastúca***, zvýšením (znížením) úrovne produkcie výrobku Y z hodnoty $y = 20\,hl$ pri zachovaní produkcie výrobku X na hodnote $x = 10\,hl$ sa zvýši (zníži) funkčná hodnota parciálnej funkcie $C_2(y)$, resp. sa zvýšia (znížia) celkové náklady.

Zhrnutie

Z uvedeného vyplývajú nasledujúce vzťahy:

$$C'_x(10, 20) < C'_y(10, 20), \quad 90 < 100$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 < \operatorname{tg}\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 < \varphi_2$$

Na základe porovnania uhlov $\varphi_1 \doteq 89,36^\circ$, $\varphi_2 \doteq 89,43^\circ$ pre jednotlivé dotyčnice $d_{C_1(x)}$, $d_{C_2(y)}$ je zrejmé, že v okolí bodu 20 parciálna funkcia $C_2(y)$ rastie „rýchlejšie“ ako v okolí bodu 10 parciálna funkcia $C_1(x)$.

Z ekonomického hľadiska to znamená, že v prípade zvyšovania produkcie výrobku X pri zachovaní pôvodnej produkcie výrobku Y budú celkové náklady $C(x, y)$ rásť pomalšie ($*$) ako v prípade zvyšovania produkcie výrobku Y pri zachovaní pôvodnej produkcie výrobku X ($\square$). Takže možnosť ($*$) môžeme považovať z pohľadu celkových nákladov za výhodnejšiu.

Toto konštatovanie potvrdzujú aj nasledujúce vypočítané zmeny celkových nákladov $C(x, y)$ pre rovnaký prírastok 0,3 meniacej sa neznámej v prípade možnosti ($*$), resp. ($\square$).

($*$) $C(10,3; 20) - C(10; 20) = 2627,18 - 2600 = 27,18$

Zvýšením produkcie výrobku X z hodnoty $x = 10$ hl o 0,3 hl pri zachovaní pôvodnej produkcie výrobku Y na hodnote $y = 20$ hl sa celkové náklady zvýšili o 27,18 peňažných jednotiek.

($\square$) $C(10; 20,3) - C(10; 20) = 2630,09 - 2600 = 30,09$

Zvýšením produkcie výrobku Y z hodnoty $y = 20$ hl o 0,3 hl pri zachovaní pôvodnej produkcie výrobku X na hodnote $x = 10$ hl sa celkové náklady zvýšili o 30,09 peňažných jednotiek.

ÚLOHY

4.4.1 Vypočítajte parciálne derivácie $f'_x(x, y)$ a $f'_y(x, y)$ funkcie *f*.

a) $f: z = 3x^2y + 5xy - 6x^2 + 10y^3 + 51$

b) $f: z = \dfrac{x^2y}{x+y}$

c) $f: z = x^2 y e^{3x-y}$

d) $f: z = \sqrt{x^2 + 3xy}$

e) $f: z = e^{3x^2+2y-xy}$

f) $f: z = \ln\left(2x^2 + 5x^3y\right)$

g) $f: z = \left(-xy^2 + 5x^2y^5 + 2x^3\right)^3$

h) $f: z = x^{3y^2}$

4.4.2 Vypočítajte parciálne derivácie $f'_x(a_1, a_2)$, $f'_y(a_1, a_2)$ funkcie *f* v bode $A = [a_1, a_2]$.

a) $f: z = x^2y^3 + 5xy^2 - 2x^3,\ A = [4, 1]$

b) $f: z = x^3e^y,\ A = [-1, 0]$

c) $f: z = \sqrt{3x^2 - xy^2},\ A = [-1, 2]$

4.4.3 Vypočítajte prvé parciálne derivácie funkcie *f* v bode $A = [1, 0]$ a v bode $B = [0, 1]$ ak platí $f(x, y) = 6x^2 - 10x^2y - 18x - 6xy - 80y + 16xy^2 + 5y^3 - 4$.

4.4.4 Určte parciálne funkcie $C_1(x), C_2(y)$ funkcie celkových nákladov $C(x, y) = 6x^2 + 8y^2 - 3xy - 84x - 40y + 200,\ x > 0,\ y > 0$ pri produkcii x = 10 $x = 10$ hl výrobku X a $y = 11$ hl výrobku Y t.j. v bode $A = [10, 11]$.

4.4.5 Určte parciálne funkcie $q_1(p_1), q_2(p_2)$ funkcie $d: q = p_1^2 - 4p_1 \cdot p_2 + 2p_2^2 + 12$ vyjadrujúcej závislosť dopytu po tovare T_1 od jednotkových cien p_1, p_2 tovarov T_1, T_2, ak cena tovaru T_1 má hodnotu $p_1 = 3$ p. j. a cena tovaru T_2 má hodnotu $p_2 = 2$ p. j., teda v bode $A = [3, 2]$.

4.4.6 Vypočítajte druhé parciálne derivácie $f''_{xx}(x, y), f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y), f''_{yy}(x, y)$ funkcie *f*.

a) $f: z = x^2y^3 + 3x^2y + y^2 + 51x + 4$

b) $f: z = \dfrac{x^2}{y}$

c) $f: z = \ln\left(2x^2 + y\right)$

4.4.7 Vypočítajte druhé parciálne derivácie $f''_{xx}(a_1, a_2), f''_{xy}(a_1, a_2), f''_{yx}(a_1, a_2), f''_{yy}(a_1, a_2)$ funkcie f v bode $A = [a_1, a_2]$.

a) $f: z = x^2y + 3xy - 6x^2 + 8y^3 - 25x + 17y - 56,\quad A = [-2, -4]$

b) $f: z = e^{3x^2+y^2},\ A = [0, 1]$

4.4.8 Na základe významu derivácií $f'_x(a_1, a_2)$, $f'_y(a_1, a_2)$ zistite, či je parciálna funkcia $f_1(x)$, resp. $f_2(y)$ funkcie f rastúca alebo klesajúca v a_1, resp. a_2, ak $f: z = 2x^2y + 3xy - 12x^3,\quad A = [2, 3]$

4.4.9 Počas určitého obdobia výrobca produkuje x hektolitrov benzínu typu A a y hektolitrov benzínu typu B. Je daná funkcia celkových nákladov výrobcu $C(x,y) = 2x^2 - xy + 3y^2 - 6x - 10y$. Rozhodnite, či je výhodnejšie zvyšovať produkciu benzínu typu A pri zachovaní produkcie benzínu typu B, alebo zvyšovať produkciu benzínu typu B pri zachovaní produkcie benzínu typu A. Svoje rozhodnutie zdôvodnite využitím geometrického významu $C'_x(10,5)$ a $C'_y(10,5)$.

4.4.10 Dopyt q po tovare T_1 je daný dopytovou funkciou $d: q = p_1^2 - 4p_1 \cdot p_2 + 2p_2^2 + 12$ (v tisícoch kusov). Jednotková cena p_1 tovaru T_1 je $p_1 = 3$ p. j. a jednotková cena p_2 tovaru T_2 je $p_2 = 2$ p. j. Zistite, či je parciálna funkcia $q_1(p_1)$, resp. $q_2(p_2)$ funkcie q rastúca alebo klesajúca v bode 3, resp. 2 pomocou parciálnych derivácií $q'_{p_1}(3,2)$, $q'_{p_2}(3,2)$. Ekonomicky interpretujte.

Výsledky

4.4.1 a) $f'_x(x,y) = 6xy + 5y - 12x$, $f'_y(x,y) = 3x^2 + 5x + 30y^2$;

b) $f'_x(x,y) = \dfrac{2xy^2 + x^2y}{(x+y)^2}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{x^3}{(x+y)^2}$;

c) $f'_x(x,y) = e^{3x-y}(2xy + 3x^2y)$, $f'_y(x,y) = e^{3x-y}(x^2 - x^2y)$;

d) $f'_x(x,y) = \dfrac{2x+3y}{2\sqrt{x^2+3xy}}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{3x}{2\sqrt{x^2+3xy}}$;

e) $f'_x(x,y) = e^{3x^2+2y-xy}(6x - y)$, $f'_y(x,y) = e^{3x^2+2y-xy}(2 - x)$;

f) $f'_x(x,y) = \dfrac{4x + 15x^2y}{2x^2 + 5yx^3}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{5x^3}{2x^2 + 5yx^3}$;

g) $f'_x(x,y) = 3(-xy^2 + 5x^2y^5 + 2x^3)^2(-y^2 + 10xy^5 + 6x^2)$,

$f'_y(x,y) = 3(-xy^2 + 5x^2y^5 + 2x^3)^2(-2xy + 25x^2y^4)$;

h) $f'_x(x,y) = 3y^2x^{3y^2-1}$, $f'_y(x,y) = x^{3y^2} 6y \ln x$

4.4.2 a) $f'_x(4,1) = -83$, $f'_y(4,1) = 88$; **b)** $f'_x(-1,2) = -\dfrac{5}{\sqrt{7}}$, $f'_y(-1,2) = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$;

c) $f'_x(-1,0) = 3$, $f'_y(-1,0) = -1$

4.4.3 $f'_x(x,y) = 12x - 20xy - 18 - 6y + 16y^2$ $\quad f'_x(1;0) = -6$ $\quad f'_x(0;1) = -8$

$f'_y(x,y) = -10x^2 - 6x - 80 + 32xy + 15y^2$ $\quad f'_y(1;0) = -96$ $\quad f'_y(0;1) = -65$

4.4.4 $C_1(x) = 6x^2 - 117x + 728$, $C_2(y) = 8y^2 - 70y - 40$

4.4.5 $q_1(p_1) = p_1^2 - 8p_1 + 20$, $q_2(p_2) = 2p_2^2 - 12p_2 + 21$

4.4.6 a) $f''_{xx}(x,y) = 2y^3 + 2y$, $f''_{xy}(x,y) = 6xy^2 + 2x$, $f''_{yy}(x,y) = 6x^2y + 2$,

$f''_{yx}(x,y) = 6xy^2 + 2x$;

b) $f''_{xx}(x,y)=\dfrac{4y-8x^2}{(2x^2+y)^2}$, $f''_{xy}(x,y)=\dfrac{-4x}{(2x^2+y)^2}$, $f''_{yy}(x,y)=\dfrac{-1}{(2x^2+y)^2}$;

c) $f''_{xx}(x,y)=\dfrac{2}{y}$, $f''_{xy}(x,y)=\dfrac{-2x}{y^2}$, $f''_{yy}(x,y)=\dfrac{2x^2}{y^3}$, $f''_{yx}(x,y)=\dfrac{-2x}{y^2}$

4.4.7 a) $f''_{xx}(-2,-4)=-20$, $f''_{xy}(-2,-4)=-1$, $f''_{yy}(-2,-4)=-192$, $f''_{yx}(-2,-4)=-1$;

b) $f''_{xx}(0,1)=6e$, $f''_{xy}(0,1)=0$, $f''_{yy}(0,1)=6e$, $f''_{yx}(0,1)=0$

4.4.8 $f_1(x)$ je v bode 2 klesajúca ($f'_x(2,3)=-111<0$),
$f_2(y)$ je v bode 3 rastúca ($f'_y(2,3)=14>0$)

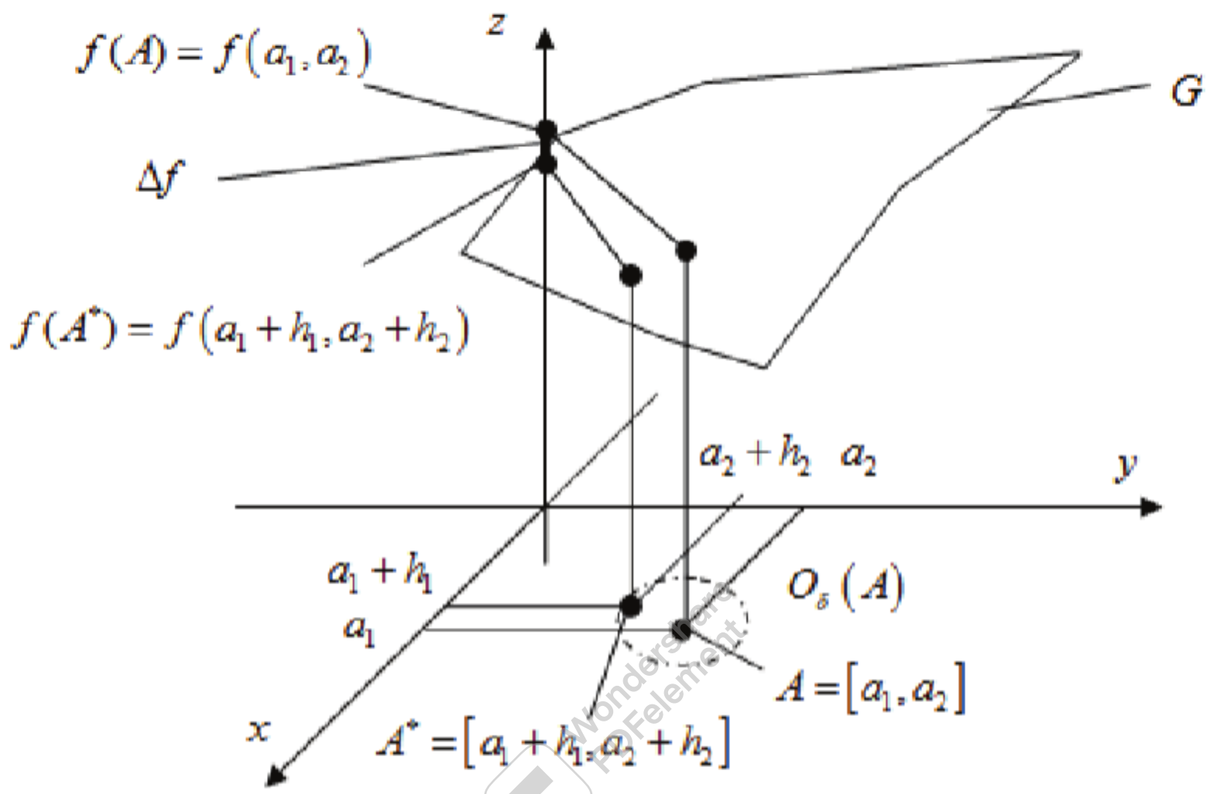
4.4.9 Výhodnejšie je zvyšovať produkciu benzínu typu B pri zachovaní produkcie benzínu typu A, pretože v tomto prípade rastú celkové náklady pomalšie ako pri zvyšovaní produkcie benzínu typu A pri zachovaní produkcie benzínu typu B.
($C'_x(10,5)=29=\operatorname{tg}\varphi_1>C'_y(10,5)=10=\operatorname{tg}\varphi_2\Rightarrow\varphi_1>\varphi_2$)

4.4.10 $q_1(p_1)$ je v bode 3 klesajúca ($q'_{p_1}(3,2)=-2<0$), zvýšením (znížením) ceny p_1 z hodnoty 3 $p.j.$ pri zachovaní ceny p_2 na hodnote 2 $p.j.$ sa zníži (zvýši) funkčná hodnota parciálnej funkcie $q_1(p_1)$, resp. sa zníži (zvýši) dopyt po tovare T_1;
$q_2(p_2)$ je v bode 2 klesajúca ($q'_{p_2}(3,2)=-4<0$), zvýšením (znížením) ceny p_2 z hodnoty 2 $p.j.$ pri zachovaní ceny p_1 na hodnote 3 $p.j.$ sa zníži (zvýši) funkčná hodnota parciálnej funkcie $q_2(p_2)$, resp. sa zníži (zvýši) dopyt po tovare T_1.

4.5 Úplný diferenciál funkcie dvoch premenných

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať problematikou približného určovania zmeny funkčnej hodnoty funkcie dvoch premenných v okolí bodu $A=[a_1, a_2]$. Ukážeme aproximatívny prístup určenia funkčnej hodnoty na základe nahradenia grafu funkcie f dotykovou rovinou α. Tento prístup umožňuje efektívnejšiu analýzu správania funkcie $f: z=f(x,y)$ v okolí bodu $A=[a_1, a_2]$.

Nech funkcia $f: z=f(x,y)$ je definovaná v nejakom okolí $O_\delta(A)$ bodu $A=[a_1, a_2]$ a nech bod $A^*=[a_1+h_1, a_2+h_2]\in O_\delta(A)$, kde h_1, h_2 sú prírastky premenných x, y, obr. 4.5.1.



Obr. 4.5.1 Zmena funkčnej hodnoty $\Delta f = f(A^*) - f(A)$

Definícia 4.5.1 Nech funkcia $f: z=f(x,y)$ je definovaná v okolí bodu $A=[a_1, a_2]$. Funkcia f je v bode A ***diferencovateľná*** práve vtedy, ak prírastok funkcie

$$\Delta f = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2)$$

môžeme vyjadriť v tvare

$$\Delta f = K_1 h_1 + K_2 h_2 + \sqrt{h_1^2+h_2^2}\cdot\tau(h_1, h_2) \qquad (1)$$

kde K_1 a K_2 sú konštanty a pre funkciu τ platí

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \tau(h_1, h_2) = 0$$

Lineárnu funkciu dvoch premenných h_1, h_2

$$\mathrm{d}f(A) = K_1 h_1 + K_2 h_2 \qquad (2)$$

nazývame ***úplný (totálny) diferenciál*** funkcie f v bode A a označujeme $\mathbf{d}f(A)$.

Poznámka 4.5.1 Ak je funkcia f diferencovateľná v každom bode množiny $M \subset D(f)$, tak hovoríme, že je ***diferencovateľná na množine M***.

Veta 4.5.1 Nech $f: z = f(x, y)$ je diferencovateľná v bode $A = [a_1, a_2]$. Potom pre K_1, K_2 vo vzťahu (2) platí

$$K_1 = f'_x(a_1, a_2), \quad K_2 = f'_y(a_1, a_2). \tag{3}$$

Veta 4.5.2 (*dôsledok vety 4.5.1*) Ak je $f: z = f(x, y)$ diferencovateľná v bode $A = [a_1, a_2]$, tak podľa (3) je úplný diferenciál $\mathrm{d}f(A)$ daný vzťahom

$$\mathbf{d}f(A) = f'_x(a_1, a_2) \cdot h_1 + f'_y(a_1, a_2) \cdot h_2 \tag{4}$$

Poznámka 4.5.2 Za predpokladu, že funkcia $f: z = f(x, y)$ je diferencovateľná v bode $A = [a_1, a_2]$, potom pre zmenu funkčných hodnôt Δf platí

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \mathrm{d}f(A) + \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \tau(h_1, h_2) \tag{5}$$

Pre dostatočne malé prírastky $h_1 \to 0$ a $h_2 \to 0$ dostaneme po zanedbaní výrazu $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \tau(h_1, h_2)$ na pravej strane vzťahu (5) približný vzťah medzi zmenou funkčnej hodnoty Δf a diferenciálom funkcie $\mathrm{d}f(A)$

$$\Delta f \doteq \mathrm{d}f(A) \tag{6}$$

resp.

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \doteq f'_x(a_1, a_2)\, h_1 + f'_y(a_1, a_2)\, h_2 \tag{7}$$

Veta 4.5.3 (***nutná podmienka diferencovateľnosti***) Nech funkcia $f: z = f(x, y)$ je v bode $A = [a_1, a_2]$ diferencovateľná. Potom je v tomto bode spojitá.

Veta 4.5.4 (***postačujúca podmienka diferencovateľnosti***) Ak má funkcia $f: z = f(x, y)$ na nejakom $O_\delta(A)$ parciálne derivácie $f'_x(A)$, $f'_y(A)$ a tieto sú spojité v bode $A = [a_1, a_2]$, tak funkcia f je v bode A diferencovateľná.

Geometrický význam úplného diferenciálu funkcie dvoch premenných

Geometrickým významom diferenciálu funkcie jednej reálnej premennej je nahradenie grafu funkcie $f: y = f(x)$ v okolí bodu x_0 dotyčnicou d, ktorú sme v tomto bode ku grafu funkcie f zostrojili. Smernicový tvar rovnice dotyčnice predstavuje funkčný predpis lineárnej funkcie jednej reálnej premennej, ktorou aproximujeme v okolí bodu x_0 funkciu f.

Na základe analogického odvodenia použitého pri funkcii jednej reálnej premennej ukážeme, v čom spočíva geometrický význam diferenciálu funkcie dvoch premenných $f: z = f(x, y)$.

Budeme vychádzať zo vzťahu (7), z ktorého po zavedení substitúcie

$$h_1 = x - a_1, \quad h_2 = y - a_2$$

dostaneme vzťah

$$f(x,y)-f(a_1,a_2)\doteq f'_x(a_1,a_2)(x-a_1)+f'_y(a_1,a_2)(y-a_2)$$

ktorý upravíme na tvar

$$f(x,y)\doteq f'_x(a_1,a_2)\cdot(x-a_1)+f'_y(a_1,a_2)\cdot(y-a_2)+f(a_1,a_2) \qquad (8)$$

Pravá strana vzťahu (8) predstavuje rovnicu roviny α v tvare

$$\alpha:\ z=ax+by+c\,.$$

Na základe vzťahu (8) je rovina α dotykovou rovinou zostrojenou ku grafu funkcie $f: z=f(x,y)$ v dotykovom bode $T=\left[a_1,a_2,f(a_1,a_2)\right]$. Rovnica dotykovej roviny α je daná vzťahom

$$\alpha:\ z=f'_x(a_1,a_2)\cdot(x-a_1)+f'_y(a_1,a_2)\cdot(y-a_2)+f(a_1,a_2) \qquad (9)$$

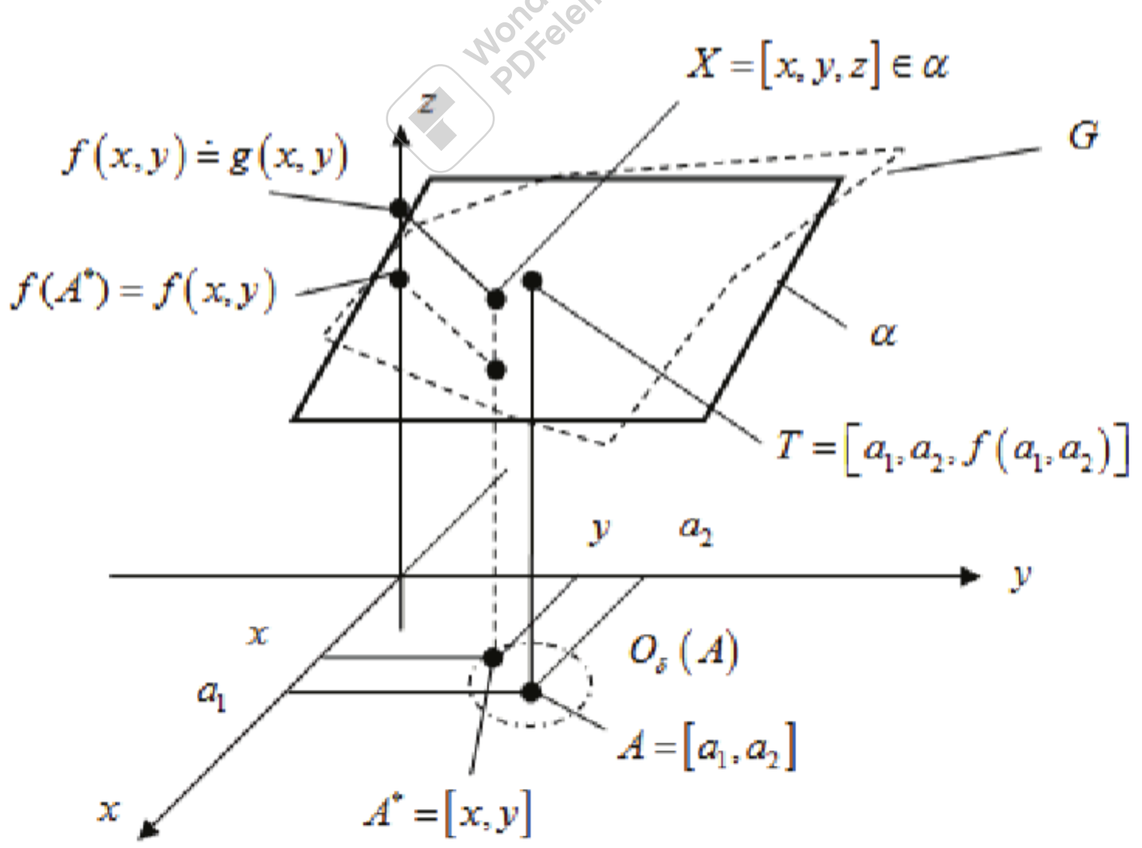
Rovnica dotykovej roviny α predstavuje funkčný predpis lineárnej funkcie dvoch premenných, ktorú označíme

$$g: z=g(x,y),\ \text{resp.}\ g:\ z=ax+by+c\,.$$

Dotyková rovina α je teda grafom lineárnej funkcie dvoch premenných $g:\ z=g(x,y)$.

Na základe vzťahu (8) je možné formulovať ***geometrický význam úplného diferenciálu*** funkcie f v bode A, ktorým ***je aproximácia funkcie*** $f:\ z=f(x,y)$ ***v okolí bodu*** $A=[a_1,a_2]$ ***lineárnou funkciou dvoch premenných g, resp. nahradenie grafu funkcie f v okolí bodu A dotykovou rovinou*** α (obr. 4.5.2), čo zapíšeme

$$f(x,y)\doteq g(x,y) \qquad (10)$$



Obr. 4.5.2 Aproximácia grafu funkcie f rovinou α v dotykovom bode $T=\left[a_1,a_2,f(a_1,a_2)\right]$

Poznámka 4.5.3 Na základe odvodenia geometrického významu úplného diferenciálu funkcie dvoch premenných $\mathrm{d}f(A)$ v bode $A=[a_1,a_2]$ je zrejmé, že vzťah (7) možno použiť na výpočet zmeny funkčnej hodnoty nielen pre hodnoty $h_1\to 0$ a $h_2\to 0$, ale aj pre prírastky, ktoré túto podmienku „úplne“ nespĺňajú. Závisí to od správania funkcie $f: z=f(x,y)$ v okolí bodu A. Ak funkcia mení „rýchlo“ funkčnú hodnotu v okolí bodu A, len „málo“ bodov na grafe je „blízko“ zostrojenej dotykovej roviny α, čo si vyžaduje „prísnejšie“ dodržanie podmienky

$h_1 \to 0$ a $h_2 \to 0$ pre dané prírastky.

V riešených príkladoch je splnená postačujúca podmienka diferencovateľnosti funkcie f v bode A.

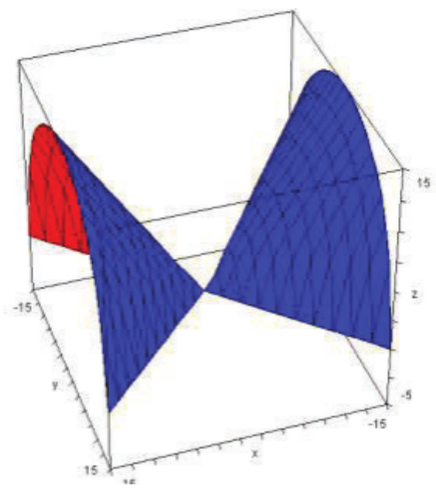
Príklad 4.5.1 Je daná funkcia $f: z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

a) Odhadnime zmenu funkčnej hodnoty $f(4,95; 4,1) - f(5; 4)$ pomocou úplného diferenciálu a výsledok porovnajme s presným výpočtom.

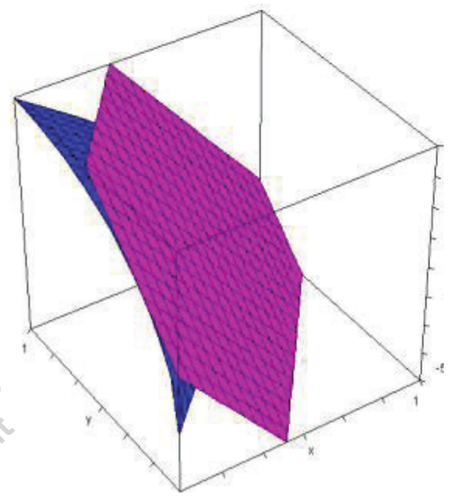
b) Odhadnime funkčnú hodnotu $f(4,95; 4,1)$ pomocou úplného diferenciálu.

c) Aproximujme funkciu f v okolí bodu $A = [5, 4]$ lineárnou funkciou dvoch premenných g.

d) Odhadnime funkčnú hodnotu $f(4,95; 4,1)$ pomocou dotykovej roviny α, zostrojenej ku grafu funkcie f v dotykovom bode $T = [5, 4, 3]$ (obr. 4.5.4) a pomocou lineárnej funkcie g z úlohy c).



Obr. 4.5.3 Graf funkcie f



Obr. 4.5.4 Dotyková rovina α grafu funkcie f v bode dotyku $T = [5, 4, f(5, 4)]$

Riešenie.

a) Definičný obor funkcie f je množina $D(f) = \{[x, y] \in E_2, x^2 - y^2 \geq 0\}$.

Platí $A = [5, 4] \in D(f)$, $A^* = [4,95; 4,1] \in D(f)$, $h_1 = -0,05$, $h_2 = 0,1$.

Vypočítame funkčné hodnoty prvých parciálnych derivácií v bode $A = [5, 4]$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

z čoho $f'_x(5, 4) = \frac{5}{3}$ a $f'_y(5, 4) = -\frac{4}{3}$. Dosadením týchto hodnôt do vzťahu (7) odhadneme požadovanú zmenu funkčnej hodnoty

$$f(4,95; 4,1) - f(5; 4) \doteq f'_x(5; 4)\, h_1 + f'_y(5; 4)\, h_2$$

$$f(4,95; 4,1) - f(5; 4) \doteq \frac{5}{3} \cdot (-0,05) + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 0,01$$

$$f(4,95; 4,1) - f(5; 4) \doteq -0,216666667$$

Znížením hodnoty argumentu x z hodnoty $a_1 = 5$ o 0,05 a zvýšením hodnoty argumentu y z hodnoty $a_2 = 4$ o 0,1 sa funkčná hodnota funkcie f zníži približne o 0,216666667.
Pre porovnanie presnú zmenu funkčnej hodnoty vypočítame podľa vzťahu

$$\Delta f = f(4{,}95;\ 4{,}1) - f(5;4) = 2{,}77353565 - 3 = -0{,}22646435,$$

a teda funkčná hodnota funkcie f sa zníži presne o 0,22646435.

b) Na približné určenie funkčnej hodnoty $f(4{,}95;\ 4{,}1)$ použijeme vzťah (8)

$$f(4{,}95;\ 4{,}1) \doteq f'_x(5;4)\cdot(-0{,}05) + f'_y(5;4)\cdot 0{,}1 + f(5;4) = 2{,}783333334\,.$$

Funkčná hodnota $f(4{,}95;\ 4{,}1)$ sa rovná približne 2,783333334.

Pre porovnanie presná hodnota $f(4{,}95;4{,}1)$ sa rovná 2,77353565.

c) Zopakujeme postup odvodenia rovnice dotykovej roviny α zostrojenej v dotykovom bode $T = [5, 4, f(5,4)]$ využitím vzťahu (7). Platí

$$f(5+h_1, 4+h_2) - f(5,4) \doteq f'_x(5,4)\,h_1 + f'_y(5,4)\,h_2$$

Po zavedení substitúcie

$$x = 5 + h_1,\quad y = 4 + h_2,\quad \text{resp.}\quad h_1 = x - 5,\ h_2 = y - 4$$

dostaneme vzťah

$$f(x,y) - f(5,4) \doteq f'_x(5,4)(x-5) + f'_y(5,4)(y-4),$$

po úprave ktorého dostaneme vyjadrenie aproximácie danej funkcie f, teda

$$f(x,y) \doteq f'_x(5,4)(x-5) + f'_y(5,4)(y-4) + f(5,4).$$

Pravá strana vyjadruje rovnicu dotykovej roviny α zostrojenej v bode dotyku $T = [5, 4, f(5,4)]$

$$\alpha:\ z = f'_x(5,4)(x-5) + f'_y(5,4)(y-4) + f(5,4)\,.$$

Po dosadení hodnôt parciálnych derivácii $f'_x(5,4), f'_y(5,4)$ a $f(5,4)$ upravíme rovnicu dotykovej roviny α na tvar

$$\alpha:\ z = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y\,.$$

Rovnica dotykovej roviny α predstavuje funkčný predpis hľadanej lineárnej funkcie dvoch premenných g

$$g:\ z = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y\,.$$

Funkciou g aproximujeme v okolí bodu A funkciu $f: z = \sqrt{x^2 - y^2}$, čo zapíšeme

$$f(x,y) \doteq g(x,y)\ \text{ resp. }\ \sqrt{x^2 - y^2} \doteq \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y$$

d) Graf funkcie $f:\ z = \sqrt{x^2 - y^2}$ môžeme v okolí bodu $A = [5, 4]$ nahradiť dotykovou rovinou $\alpha:\ z = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y$ (obr. 4.5.4) odvodenou v úlohe c). To znamená, že funkčnú hodnotu $f(4{,}95;4{,}1)$ odhadneme tak, že vypočítame z-ovú súradnicu bodu X, ktorý leží v rovine α,

pričom jeho x-ová súradnica má hodnotu $x = 4,95$ a y-ová súradnica hodnotu $y = 4,1$, teda

$$f(4,95;\,4,1) \doteq z = \frac{5}{3}\cdot 4,95 - \frac{4}{3}\cdot 4,1 = 2,783333334$$

Keďže dotyková rovina α je grafom funkcie $g:\ z = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y$, ktorou sme aproximovali funkciu f v okolí bodu $A = [5,4]$ v úlohe c), môžeme $f(4,95;\,4,1)$ odhadnúť na základe vzťahu

$$f(4,95;\,4,1) \doteq g(4,95;\,4,1) = \frac{5}{3}\cdot 4,95 - \frac{4}{3}\cdot 4,1 = 2,783333334$$

Funkčná hodnota $f(4,95;\,4,1)$ sa rovná približne 2,783333334.

Príklad 4.5.2 Je daná funkcia $f: z = x^2 + 5xy - 2y^2$. Odhadnime $f(1,1;\ 1,95)$ a $f(1,2;2,1)$ využitím dotykovej roviny α zostrojenej ku grafu funkcie f v dotykovom bode $T = [1,2, f(1,2)]$ a dosiahnuté výsledky interpretujme.

Riešenie. $D(f) = \{[x, y] \in E_2\}$, $[1;2], [1,1;\ 1,95], [1,2;\ 2,1] \in D(f)$

Rovnicu dotykovej roviny α zostrojenej v dotykovom bode $T = [1,2,3]$ získame využitím vzťahu (7). Platí :

$$f(1+h_1, 2+h_2) - f(1,2) \doteq f'_x(1,2)h_1 + f'_y(1,2)h_2,$$

po zavedení substitúcie

$$x = 1 + h_1,\quad y = 2 + h_2, \text{ resp. } h_1 = x - 1,\ h_2 = y - 2$$

dostaneme vzťah

$$f(x, y) - f(1,2) \doteq f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2),$$

po ktorého úprave a dosadení $f'_x(1,2)$, $f'_y(1,2)$ a $f(1,2)$ získame rovnicu dotykovej roviny α zostrojenej ku grafu funkcie $f:\ z = x^2 + 5xy - 2y^2$ v dotykovom bode $T = [1,2,3]$

$$\alpha:\ z = 12x - 3y - 3.$$

Výpočet $f(1,1;\ 1,95)$ pomocou dotykovej roviny $\boldsymbol{\alpha}$

$$f(1,1;\ 1,95) \doteq z = 12\cdot 1,1 - 3\cdot 1,95 - 3$$

$$f(1,1;\ 1,95) \doteq 4,35$$

Funkčná hodnota $f(1,1;\ 1,95)$ sa rovná približne 4,35. Pre porovnanie presná hodnota $f(1,1;\ 1,95)$ sa rovná 4,33.

Výpočet $f(1,2;\ 2,1)$ pomocou dotykovej roviny α

$$f(1,2;\ 2,1) \doteq z = 12\cdot 1,2 - 3\cdot 2,1 - 3$$

$$f(1,2;\ 2,1) \doteq 5,1$$

Funkčná hodnota $f(1,2;2,1)$ sa rovná približne 5,1. Pre porovnanie presná hodnota $f(1,2;\ 2,1)$ sa rovná 5,22.

Definícia 4.5.2 Nech funkcia $f:\ z=f(x,y)$ má v okolí bodu $A=[a_1,a_2]$ úplný diferenciál a nech parciálne derivácie $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ sú diferencovateľné v bode $A=[a_1,a_2]$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode A ***úplný diferenciál druhého rádu*** $\mathbf{d^2 f(A)}$ a je definovaný vzťahom

$$\mathrm{d}^2 f(A)=f''_{xx}(a_1,a_2)h_1^{\,2}+f''_{xy}(a_1,a_2)h_1h_2+f''_{yx}(a_1,a_2)h_2h_1+f''_{yy}(a_1,a_2)h_2^{\,2}$$

Úplný diferenciál druhého rádu môžeme úpravou na základe vety 2.1.1 zapísať v tvare

$$\mathrm{d}^2 f(A)=f''_{xx}(a_1,a_2)\cdot h_1^{\,2}+2\cdot f''_{xy}(a_1,a_2)\cdot h_1h_2+f''_{yy}(a_1,a_2)\cdot h_2^{\,2} \qquad (11)$$

Ak existuje $\mathrm{d}^2 f(A)$, hovoríme, že funkcia f je ***dvakrát diferencovateľná.***

Poznámka 4.5.4 Úplný diferenciál druhého rádu využijeme v súvislosti s kvadratickou formou v podkapitole týkajúcej sa určovania ostrých lokálnych extrémov.

Príklad 4.5.3 Vypočítajte diferenciál druhého rádu funkcie f v bode $A=[3,1]$, ak

$$f:\ z=3x^2-5x^2y+70x-20y^3x-10y+5y^2-26$$

Riešenie.

$$D(f)=\{[x,y]\in E_2\},\ [3,1]\in D(f)$$

Využitím derivácií vypočítaných v príklade 4.4.4 a na základe vzťahu (11) pre $\mathrm{d}^2 f(A)$ platí

$$\mathrm{d}^2 f([3,1])=-4h_1^{\,2}-90h_1h_2-90h_1h_2-350h_2^{\,2}=-4h_1^{\,2}-180h_1h_2-350h_2^{\,2}.$$

ÚLOHY

4.5.1 Vypočítajte približne pomocou úplného diferenciálu v bode $A=[2,-1]$ zmenu funkčnej hodnoty funkcie $f:\ z=x^3-2xy+y^3$ a výsledok porovnajte s presnou zmenou funkčnej hodnoty Δf, ak

a) $h_1=-0,05$, $h_2=0,01$ b) $h_1=-0,15$, $h_2=0,1$

4.5.2 Vypočítajte približne pomocou úplného diferenciálu v bode A funkčnú hodnotu:

a) $f(-2,98;3,95)$, ak $f:\ z=x^3+3xy-y^3,\quad A=[-3;4]$

b) $f(3,02;3,97)$, ak $f:\ z=\sqrt{x^2+y^2},\quad A=[3;4]$

c) $f(1,98;-0,05)$, ak $f:\ z=x^3e^y,\quad A=[2;0]$

4.5.3 Napíšte rovnicu dotykovej roviny α zostrojenej ku grafu funkcie f v bode A a pomocou nej odhadnite funkčnú hodnotu:

a) $f(-2,98;3,95)$, ak $f:\ z=x^3+3xy-y^3,\quad A=[-3;4]$

b) $f(3,02;3,97)$, ak $f:\ z=\sqrt{x^2+y^2},\quad A=[3;4]$

c) $f(1,98;-0,05)$, ak $f:\ z=x^3e^y,\quad A=[2;0]$

4.5.4 Aproximujte funkciu f v okolí bodu A lineárnou funkciou dvoch premenných g a pomocou nej odhadnite funkčnú hodnotu, ak

a) $f: z = 2x^2 + 3y^2, \quad A = [3;1], \quad f(2{,}95; 0{,}97)$

b) $f: z = x^y, \quad A = [1;2], \quad f(0{,}99; 2{,}1)$

c) $f: z = x^3 y, \quad A = [-1;2], \quad f(-1{,}1; 1{,}95)$

4.5.5 Vypočítajte využitím úplného diferenciálu funkcie f v bode A približne hodnotu

a) $(0{,}996)^3 \cdot 1{,}03$ b) $1{,}02^{1{,}98}$

4.5.6 Vypočítajte diferenciál druhého rádu funkcie $f: z = e^{2x+4y}$ v bode $A = [2,1]$.

Výsledky

4.5.1 a) $\Delta f = f(1{,}95; -0{,}99) - f(2; -1) = -0{,}694424$, funkčná hodnota sa znížila presne o 0,694424, $f(1{,}95; -0{,}99) - f(2; -1) \doteq -0{,}71$, funkčná hodnota sa znížila približne o 0,71;

b) $\Delta f = f(1{,}85; -0{,}9) - f(2; -1) = -2{,}067375$, funkčná hodnota sa znížila presne o $2{,}067375$, $f(1{,}85; -0{,}9) - f(2; -1) \doteq -2{,}2$, funkčná hodnota sa znížila približne o 2,2

4.5.2 a) $f(-2{,}98; 3{,}95) \doteq -123{,}37$; **b)** $f(3{,}02; 3{,}97) \doteq 4{,}988$; **c)** $f(1{,}98; -0{,}05) \doteq 7{,}36$

4.5.3 a) $\alpha: z = 39x + 57y + 218, \quad f(-2{,}98; 3{,}95) \doteq -123{,}37$;

b) $\alpha: z = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \quad f(3{,}02; 3{,}97) \doteq 4{,}988$;

c) $\alpha: z = 12x + 8y - 16, \quad f(1{,}98; -0{,}05) \doteq 7{,}36$

4.5.4 a) $g: z = 12x + 6y - 21, \quad f(2{,}95; 0{,}97) \doteq g(2{,}95; 0{,}97) = 20{,}22$;

b) $g: z = 2x - 1, \quad f(0{,}99; 2{,}1) \doteq g(0{,}99; 2{,}1) = 0{,}98$;

c) $g: z = 6x - y + 6, \quad f(-1{,}1; 1{,}95) \doteq g(-1{,}1; 1{,}95) = -2{,}55$

4.5.5 a) $(0{,}996)^3 \cdot 1{,}03 \doteq 1{,}018$; **b)** $1{,}02^{1{,}98} \doteq 1{,}04$

4.5.6 $\mathrm{d}^2 f([-2,1]) = 4h_1^2 + 16h_1h_2 + 16h_2^2$

4.6 Úplný diferenciál a parciálne derivácie v ekonomickej analýze

V tejto časti sa budeme zaoberať využitím úplného diferenciálu a parciálnych derivácií funkcie dvoch premenných v ekonomickej analýze. Predovšetkým sa budeme venovať približnému určovaniu zmeny funkčnej hodnoty funkcií mikroekonomickej analýzy pomocou úplného diferenciálu funkcie dvoch premenných. V rámci ekonomickej interpretácie využijeme aj vlastnosti parciálnych derivácií.

Poznámka 4.6.1 ***Zhrnutie interpretácie pri určovaní zmeny funkčnej hodnoty***

Pri posunutí z bodu $A=[a_1, a_2]$ do bodu $A^*=[a_1+h_1, a_2+h_2]$ v rovine O_{xy} dochádza k zmene funkčnej hodnoty funkcie f.

Pri ***presnom určení zmeny funkčnej hodnoty*** použijeme vzťah

$$\Delta f = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2)$$

- ak $\Delta f > 0$, tak funkčná hodnota sa ***zvýši o*** Δf
- ak $\Delta f < 0$, tak funkčná hodnota sa ***zníži o*** $|\Delta f|$

Pri ***približnom určení zmeny funkčnej hodnoty*** použijeme vzťah

$$\mathrm{d}f(A) = f_x'(a_1, a_2)h_1 + f_x'(a_1, a_2)h_2$$

- ak $\mathrm{d}f(A) > 0$, tak funkčná hodnota sa ***zvýši približne o*** $\mathrm{d}f(A)$
- ak $\mathrm{d}f(A) < 0$, tak funkčná hodnota sa ***zníži približne o*** $|\mathrm{d}f(A)|$

Poznatky o určovaní zmeny funkčnej hodnoty funkcie $f: z=f(x,y)$ využitím $\mathrm{d}f(A)$ budeme aplikovať na funkcii celkových nákladov $C(x,y)$, funkcii celkového zisku $P(x,y)$ a funkcii dopytu po danom tovare $q(p_1, p_2)$.

Príklad 4.6.1 Spoločnosť vyrába dva typy výrobkov *X, Y*. Závislosť celkových nákladov od úrovne produkcie výrobkov x a y je daná funkciou

$$C(x,y) = 6x^2 + 8y^2 - 3xy - 84x - 40y + 200, \quad x>0, y>0$$

Vypočítajme, ako sa približne zmenia celkové náklady, ak množstvo tovaru X sa zníži z úrovne $x=10$ ton o 0,2 tony a množstvo tovaru Y sa zvýši z úrovne $y=11$ ton o 0,1tony. Výsledok ekonomicky interpretujme a porovnajme ho s presnou zmenou celkových nákladov.

Riešenie. Približnú zmenu celkových nákladov určíme využitím vzťahu (7) z podkapitoly 4.5, do ktorého dosadíme súradnice bodu $A=[10,11]$ a na základe zadaných prírastkov $h_1=-0,2$, $h_2=0,1$ súradnice bodu $A^*=[9,8;11,1]$, t. j.

$$C(9,8;11,1) - C(10;11) \doteq C_x'(10;11)h_1 + C_y'(10;11)h_2$$

Pre približné určenie zmeny $C(9,8;11,1)-C(10;11)$ je treba vypočítať úplný diferenciál funkcie $C(x,y)$ v bode $A=[10,11]$, t. j.

$$\mathrm{d}C(10,11) = C_x'(10,11)h_1 + C_y'(10,11)h_2$$

Parciálne derivácie $C_x'(10,11)$ a $C_y'(10,11)$ vypočítame ako funkčné hodnoty $C_x'(x,y)$, $C_y'(x,y)$ v bode $A=[10,11]$ t. j.

$$C'_x(x,y)=12x-3y-84 \qquad C'_y(x,y)=16y-3x-40$$

$$C'_x(10,11)=12\cdot 10-3\cdot 11-84=3 \qquad C'_y(10,11)=16\cdot 11-3\cdot 10-40=106$$

Dosadením prírastkov $h_1=-0,2$, $h_2=0,1$ a vypočítaných parciálnych derivácií $C'_x(10,11)$ a $C'_y(10,11)$ dostaneme pre približnú zmenu celkových nákladov vyjadrenie

$$C(9,8;11,1)-C(10;11)\doteq 3\cdot(-0,2)+106\cdot 0,1$$

$$C(9,8;11,1)-C(10;11)\doteq 10$$

Pre porovnanie vypočítame presnú zmenu celkových nákladov

$$\Delta C=C(9,8;11,1)-C(10;11)=168,38-158=10,38$$

Ekonomická interpretácia: Ak množstvo tovaru X znížime z úrovne $x=10$ ton o 0,2 tony a množstvo tovaru Y zvýšime z úrovne $y=11$ ton o 0,1 tony, tak sa celkové náklady zvýšia približne o 10 p. j., presne o 10,38 peňažných jednotiek.

Príklad 4.6.2 Dopyt q po tovare T_1 je daný dopytovou funkciou

$$d:\ q=p_1^2-4p_1p_2+2p_2^2+12,\ \ p_1>0,\ p_2>0 \ \text{(v tisícoch kusov)}$$

Vypočítajme približne zmenu dopytu q po tovare T_1, ak jednotkovú cenu p_1 tovaru T_1 zvýšime z hodnoty $p_1=3$ p.j. o 0,05 p.j. a jednotkovú cenu p_2 tovaru T_2 znížime z hodnoty $p_2=2$ p.j. o 0,1 p.j. Výsledok ekonomicky interpretujme a porovnajme ho s presnou zmenou dopytu po tovare T_1 .

Riešenie. Približné určenie zmeny $q(3,05;1,9)-q(3;2)$ vypočítame pomocou úplného diferenciálu funkcie $q(p_1,p_2)$ v bode $A=[3,2]$,

$$\mathrm{d}q(3,2)=q'_{p_1}(3,2)h_1+q'_{p_2}(3,2)h_2$$

Parciálne derivácie $q'_{p_1}(3,2)$ a $q'_{p_2}(3,2)$ vypočítame ako funkčné hodnoty $q'_{p_1}(p_1,p_2)$ a $q'_{p_2}(p_1,p_2)$ v bode $A=[3,2]$,

$$q'_{p_1}(p_1,p_2)=2p_1-4p_2 \qquad q'_{p_2}(p_1,p_2)=-4p_1+4p_2$$

$$q'_{p_1}(3,2)=2\cdot 3-4\cdot 2=-2 \qquad q'_{p_2}(3,2)=-4\cdot 3+4\cdot 2=-4$$

Dosadením prírastkov $h_1=0,05$, $h_2=-0,1$ a vypočítaných parciálnych derivácií $q'_{p_1}(3,2)$ a $q'_{p_2}(3,2)$ dostaneme pre približnú zmenu dopytu po tovare T_1 vyjadrenie

$$q(3,05;1,9)-q(3;2)\doteq(-2)\cdot 0,05+(-4)\cdot(-0,1)$$

$$q(3,05;1,9)-q(3;2)\doteq 0,3$$

Presnú zmenu dopytu po tovare T_1 vypočítame

$$\Delta q=q(3,05;1,9)-q(3;2)=5,34-5=0,34$$

Ekonomická interpretácia: Ak sa jednotková cena p_1 tovaru T_1 zvýši z hodnoty $p_1=3$ p.j. o 0,05 p.j. a jednotková cena p_2 tovaru T_2 sa zníži z hodnoty $p_2=2$ p.j. o 0,1 p.j., tak sa dopyt po tovare T_1 zvýši približne o 0,3 tisíc (t.j. 300) kusov, presne o 0,34 tisíc (t.j. 340) kusov.

Parciálna elasticita funkcie dvoch premenných

Interpretácia a odvodenie parciálnej elasticity funkcie dvoch premenných je analogické s interpretáciou a odvodením elasticity funkcie jednej reálnej premennej, ktorá vyjadrovala približnú percentuálnu zmenu funkčnej hodnoty funkcie f pri zmene argumentu x o 1 percento.

Parciálna elasticita funkcie $f: z = f(x, y)$ ***v bode*** $A = [a_1, a_2]$ ***vzhľadom na argument*** x

Nech funkcia $f: z = f(x, y)$ je definovaná v okolí bodu $A = [a_1, a_2]$ a má v bode A úplný diferenciál. Dosadíme vo vzťahu (7) z podkapitoly 4.5 za $h_1 = \frac{a_1}{100}$ a za $h_2 = 0$, t. j. posunieme v rovine O_{xy} bod $A = [a_1, a_2]$ do bodu $A^* = \left[a_1 + \frac{a_1}{100}, a_2\right]$. Dostaneme vzťah

$$f(a_1 + \frac{a_1}{100}, a_2) - f(a_1, a_2) \doteq f'_x(a_1, a_2).\frac{a_1}{100}. + f'_y(a_1, a_2).0 \qquad (1)$$

Ak $f(a_1, a_2) \neq 0$, tak vynásobením vzťahu (1) hodnotou $\frac{100}{f(a_1, a_2)}$ dostaneme

$$\frac{f(a_1 + \frac{a_1}{100}, a_2) - f(a_1, a_2)}{f(a_1, a_2)} \cdot 100 \doteq f'_x(a_1, a_2).\frac{a_1}{f(a_1, a_2)}. \qquad (2)$$

Ľavá strana vzťahu (2) vyjadruje percentuálnu zmenu funkčnej hodnoty funkcie *f*, ak sa argument x zvýši z hodnoty $x = a_1$ o 1 % a argument $y = a_2$ zostane nezmenený.

Pravá strana vzťahu (2) je približným určením tejto zmeny a nazýva sa ***parciálna elasticita*** funkcie $f: z = f(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$ ***vzhľadom na argument*** x

$$\eta_x(f(a_1, a_2)) \doteq \frac{f'_x(a_1, a_2).a_1}{f(a_1, a_2)} \qquad (3)$$

Poznámka 4.6.2 Znamienko parciálnej elasticity $\eta_x(f(a_1, a_2))$ závisí iba od znamienka $f'_x(a_1, a_2)$, pretože hodnoty $f(a_1, a_2)$ a a_1 sú pri ekonomických funkciách kladné. Pri interpretácii vypočítanej parciálnej elasticity $\eta_x(f(a_1, a_2))$ budeme využívať význam $f'_x(a_1, a_2)$ popísaný v podkapitole 4.4.

Poznámka 4.6.3 ***Interpretácia parciálnej elasticity*** $\eta_x(f(a_1, a_2))$

- Ak je $\eta_x(f(a_1, a_2)) > 0$, tak zvýšením hodnoty $x = a_1$ o 1 percento a nezmenením hodnoty $y = a_2$ sa funkčná hodnota funkcie f približne zvýši o $\eta_x\left(f\left(a_1, a_2\right)\right)$ percent.
- Ak je $\eta_x(f(a_1, a_2)) < 0$, tak zvýšením hodnoty $x = a_1$ o 1 % a nezmenením hodnoty $y = a_2$ sa funkčná hodnota funkcie f približne zníži o $\left|\eta_x\left(f\left(a_1, a_2\right)\right)\right|$ percent.

Parciálna elasticita funkcie $f: z = f(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$ vzhľadom na argument y

Nech funkcia $f: z = f(x, y)$ je definovaná v okolí bodu $A = [a_1, a_2]$ a má v bode A úplný diferenciál. Položme vo vzťahu (7) z podkapitoly 4.5 za $h_1 = 0$ a za $h_2 = \frac{a_2}{100}$, t. j. posunieme v rovine O_{xy} bod $A = [a_1, a_2]$ do bodu $A^* = \left[a_1, a_2 + \frac{a_2}{100}\right]$. Dostaneme vzťah

$$f(a_1, a_2 + \frac{a_2}{100}) - f(a_1, a_2) \doteq f'_x(a_1, a_2).0 + f'_y(a_1, a_2).\frac{a_2}{100}. \qquad (4)$$

Ak $f(a_1, a_2) \neq 0$, tak vynásobením vzťahu (4) hodnotou $\frac{100}{f(a_1, a_2)}$ dostaneme

$$\frac{f(a_1, a_2 + \frac{a_2}{100}) - f(a_1, a_2)}{f(a_1, a_2)} \cdot 100 \doteq f'_y(a_1, a_2).\frac{a_2}{f(a_1, a_2)} \qquad (5)$$

Ľavá strana vzťahu (5) vyjadruje percentuálnu zmenu funkčnej hodnoty funkcie *f*, ak sa argument y zvýši z hodnoty $y = a_2$ o 1 % a argument *x* zostane nezmenený na $x = a_1$.

Pravá strana vzťahu (5) je približným určením tejto zmeny a nazýva sa ***parciálna elasticita*** funkcie $f: z = f(x, y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$ ***vzhľadom na argument y***

$$\eta_y(f(a_1, a_2)) \doteq \frac{f'_y(a_1, a_2).a_2}{f(a_1, a_2)} \qquad (6)$$

Poznámka 4.6.4 Znamienko parciálnej elasticity $\eta_y(f(a_1, a_2))$ závisí iba od znamienka $f'_y(a_1, a_2)$, pretože hodnoty $f(a_1, a_2)$ a a_2 sú pri ekonomických funkciách kladné. Pri interpretácii vypočítanej parciálnej elasticity $\eta_y(f(a_1, a_2))$ budeme využívať význam $f'_y(a_1, a_2)$ opísaný v podkapitole 4.4.

Poznámka 4.6.5 ***Interpretácia parciálnej elasticity $\eta_y(f(a_1, a_2))$***

- Ak je $\eta_y(f(a_1, a_2)) > 0$, tak zvýšením hodnoty $y = a_2$ o 1 % a nezmenením hodnoty $x = a_1$ sa funkčná hodnota funkcie *f* približne zvýši o $\eta_y(f(a_1, a_2))$ percent.
- Ak je $\eta_y(f(a_1, a_2)) < 0$, tak zvýšením hodnoty $y = a_2$ o 1 % a nezmenením hodnoty $x = a_1$ sa funkčná hodnota funkcie *f* približne zníži o $|\eta_y(f(a_1, a_2))|$ percent.

Príklad 4.6.3 Spoločnosť vyrába dva typy výrobkov *X, Y*. Závislosť celkových nákladov od úrovne produkcie x a y je daná funkciou

$$C(x, y) = 6x^2 + 8y^2 - 3xy - 84x - 40y + 200,\ x > 0,\ y > 0$$

Vypočítajme a ekonomicky interpretujme elasticitu funkcie celkových nákladov vzhľadom na produkciu výrobku *Y*. Spoločnosť produkuje $x = 10$ ton výrobku X a $y = 11$ ton výrobku *Y*.

Riešenie. Parciálnu elasticitu $\eta_y(C(10, 11))$ zistíme na základe vzťahu (6). Produkcia výrobku

X sa nezmení, zostane na úrovni $x = 10$ ton a produkcia výrobku Y sa zvýši z hodnoty $y = 11$ ton o 1 percento.

$$\eta_y(C(10,11)) \doteq \frac{C'_y(10;11)\cdot 11}{C(10;11)}$$

Dosadením hodnôt $C'_y(10,11)$ a $C(10,11)$, ktoré sme vypočítali v príklade 4.6.1, dostaneme

$$\eta_y(C(10,11)) \doteq \frac{106\cdot 11}{158} = 7,3797468$$

Keďže $C'_y(10,11) = 106 > 0$, tak parciálna funkcia $C_2(y)$ je v bode 11 rastúca. Zvýšením produkcie výrobku Y z hodnoty $y = 11$ ton o 1 % sa zvýši funkčná hodnota $C_2(y)$. Tým sa zvýšia celkové náklady $C(x,y)$, a to približne o 7,3797468 % pri nezmenenej produkcii výrobku X.

Príklad 4.6.4 Vypočítajme parciálne elasticity dopytu q po tovare T_1

$$d:\ q = p_1^2 - 4p_1p_2 + 2p_2^2 + 12 \quad \text{(v tisícoch kusov)}$$

vzhľadom na jednotkovú cenu p_1 tovaru T_1 a vzhľadom na jednotkovú cenu p_2 tovaru T_2. Hodnota jednotkovej ceny tovaru T_1 je $p_1 = 3$ p. j. a hodnota jednotkovej ceny tovaru T_2 je $p_2 = 2$ p. j. Ekonomicky ich interpretujme.

Riešenie. Parciálnu elasticitu $\eta_{p_1}(q(3,2))$ vypočítame zo vzťahu (3), pričom platí, že cena tovaru T_1 sa zvýši z hodnoty $p_1 = 3$ p. j. o 1 % a cena tovaru T_2 sa nezmení, zostane na hodnote $p_2 = 2$ p. j.

$$\eta_{p_1}(q(3,2)) \doteq \frac{q'_{p_1}(3,2)\cdot 3}{q(3,2)}$$

Dosadením hodnôt $q'_{p_1}(3,2)$ a $q(3,2)$ vypočítaných v príklade 4.6.2 dostaneme

$$\eta_{p_1}(q(3,2)) \doteq \frac{(-2)\cdot 3}{5} = -1,2$$

Keďže $q'_{p_1}(3,2) = -2 < 0$, tak parciálna funkcia $q_1(p_1)$ je v bode 3 klesajúca. Zvýšením ceny tovaru T_1 z hodnoty $p_1 = 3$ p. j. o 1 % sa zníži funkčná hodnota $q_1(p_1)$. To znamená, že sa tým zníži dopyt $q(p_1,p_2)$ po tovare T_1, a to približne o 1,2 % pri nezmenenej cene tovaru T_2.

Parciálnu elasticitu $\eta_{p_2}(q(3,2))$ vypočítame zo vzťahu (6), pričom platí, že cena tovaru T_2 sa zvýši z hodnoty $p_2 = 2$ p.j. o 1 % a cena tovaru T_1 zostane nezmenená na hodnote $p_1 = 3$ peňažné jednotky.

$$\eta_{p_2}(q(3,2)) \doteq \frac{q'_{p_2}(3,2)\cdot 2}{q(3,2)}$$

Dosadením hodnôt $q'_{p_2}(3,2)$ a $q(3,2)$, ktoré sme vypočítali v príklade 4.6.2 dostaneme

$$\eta_{p_2}(q(3,2)) \doteq \frac{(-4)\cdot 2}{5} = -1,6$$

Keďže $q'_{p_2}(3,2) = -4 < 0$, tak parciálna funkcia $q_2(p_2)$ je v bode 2 klesajúca. Zvýšením ceny tovaru T_2 z hodnoty $p_2 = 2$ peňažné jednotky o 1 percento, sa zníži funkčná hodnota $q_2(p_2)$. To znamená, že sa tým zníži dopyt $q(p_1, p_2)$ po tovare T_1, a to približne o 1,6 % pri nezmenenej cene tovaru T_1.

Marginálne veličiny funkcie dvoch premenných

Marginálnu veličinu funkcie dvoch premenných budeme definovať analogicky ako v prípade funkcie jednej premennej, kde marginálna veličina vyjadrovala zmenu určitej veličiny pripadajúcej na jednotkový prírastok jej argumentu. V prípade funkcie dvoch premenných predstavujú skúmanú veličinu parciálne funkcie $f_1(x)$ a $f_2(y)$ v bode $A = [a_1, a_2]$. Za predpokladu, že sú parciálne funkcie diferencovateľné, je možné (nahradením diferenčného podielu deriváciou) určiť marginálnu veličinu prostredníctvom parciálnych derivácií.

Marginálna veličina funkcie f: $z = f(x, y)$ vzhľadom na argument x v bode $A = [a_1, a_2]$

Nech funkcia $f: z = f(x, y)$ je definovaná v okolí bodu $A = [a_1, a_2]$ a nech existuje vlastná derivácia $f_1'(a_1)$. Potom pre marginálnu veličinu parciálnej funkcie $f_1(x)$ platí

$$Mf_1(a_1) = \frac{\Delta f_1}{\Delta x} \doteq f_1'(a_1),$$

označuje sa $Mf_x(a_1, a_2)$ a nazýva sa ***marginálna veličina*** funkcie dvoch premenných ***vzhľadom na argument x*** v bode $A = [a_1, a_2]$. Na základe definície 4.4.1 ju vypočítame podľa vzťahu

$$Mf_x(a_1, a_2) \doteq f_x'(a_1, a_2) \tag{7}$$

Poznámka 4.6.6 ***Interpretácia marginálnej veličiny*** $Mf_x(a_1, a_2)$

- Ak je $\boldsymbol{f_x'(a_1, a_2) > 0}$ $\left(\textit{parciálna funkcia } \boldsymbol{f_1(x)} \textit{ je v bode } a_1 \textit{ rastúca}\right)$, tak zvýšením hodnoty $x = a_1$ o ***1*** jednotku a nezmenením hodnoty $y = a_2$ sa funkčná hodnota funkcie f približne zvýši o $\boldsymbol{f_x'(a_1, a_2)}$ funkčných jednotiek.
- Ak je $\boldsymbol{f_x'(a_1, a_2) < 0}$ $\left(\textit{parciálna funkcia } \boldsymbol{f_1(x)} \textit{ je v bode } a_1 \textit{ klesajúca}\right)$, tak zvýšením hodnoty $x = a_1$ o 1 jednotku a nezmenením hodnoty $y = a_2$ sa funkčná hodnota funkcie f približne zníži o $\left|\boldsymbol{f_x'(a_1, a_2)}\right|$ funkčných jednotiek.

Poznámka 4.6.7 Marginálnu veličinu $Mf_x(a_1, a_2)$ možno prezentovať aj z iného uhla pohľadu na základe vzťahu (7) z podkapitoly 4.5 dosadením za $h_1 = 1$ a $h_2 = 0$

$$f(a_1 + 1, a_2) - f(a_1, a_2) \doteq f_x'(a_1, a_2) \cdot 1 + f_y'(a_1, a_2) \cdot 0,$$

$$\frac{f(a_1 + 1, a_2) - f(a_1, a_2)}{1} \doteq f_x'(a_1, a_2)$$

Marginálna veličina funkcie f: $z = f(x, y)$ vzhľadom na argument y v bode $A = [a_1, a_2]$

Nech funkcia $f: z = f(x, y)$ je definovaná v okolí bodu $A = [a_1, a_2]$ a nech existuje vlastná derivácia $f_2'(a_2)$. Potom pre marginálnu veličinu parciálnej funkcie $f_2(y)$ platí

$$Mf_2(a_2) = \frac{\Delta f_2}{\Delta y} \doteq f_2'(a_2)$$

označuje sa $Mf_y(a_1, a_2)$ a nazýva sa ***marginálna veličina*** funkcie dvoch premenných ***vzhľadom na argument y*** v bode $A = [a_1, a_2]$. Na základe definície 4.4.2 ju vypočítame podľa vzťahu

$$Mf_y(a_1, a_2) \doteq f_y'(a_1, a_2) \tag{8}$$

Poznámka 4.6.8 ***Interpretácia marginálnej veličiny*** $Mf_y(a_1, a_2)$

- Ak je $\boldsymbol{f_y'(a_1, a_2) > 0}$ $\left(\textit{parciálna funkcia } \boldsymbol{f_2(y)} \textit{ je v bode } a_2 \textit{ rastúca}\right)$, tak zvýšením hodnoty $y = a_2$ o 1 jednotku a nezmenením hodnoty $x = a_1$ sa funkčná hodnota funkcie f približne zvýši o $\boldsymbol{f_y'(a_1, a_2)}$ funkčných jednotiek.
- Ak je $\boldsymbol{f_y'(a_1, a_2) < 0}$ $\left(\textit{parciálna funkcia } \boldsymbol{f_2(y)} \textit{ je v bode } a_2 \textit{ klesajúca}\right)$, tak zvýšením hodnoty $y = a_2$ o 1 jednotku a nezmenením hodnoty $x = a_1$ sa funkčná hodnota funkcie f približne zníži o $\left|\boldsymbol{f_y'(a_1, a_2)}\right|$ funkčných jednotiek.

Poznámka 4.6.9 Marginálnu veličinu $Mf_y(a_1, a_2)$ možno prezentovať aj z iného uhla pohľadu na základe vzťahu (7) z podkapitoly 4.5 dosadením za $h_1 = 0$ a $h_2 = 1$

$$f(a_1, a_2 + 1) - f(a_1, a_2) \doteq f_x'(a_1, a_2) \cdot 0 + f_y'(a_1, a_2) \cdot 1$$

$$\frac{f(a_1, a_2 + 1) - f(a_1, a_2)}{1} \doteq f_y'(a_1, a_2)$$

Príklad 4.6.5 Je daná produkčná funkcia $f: z = 50x - x^2 + 40y - 3y^2 - 120$, ktorá určuje závislosť produkcie (vyjadrenej v tisícoch kusov) od vstupov x a y. Vstup x predstavuje prácu v hodinách a y materiál v tonách.

a) Vypočítajme marginálnu produkciu vzhľadom na úroveň vstupu x, ak sme do výroby investovali 15 hodín práce a 5 ton materiálu. Ekonomicky interpretujme.

b) Vypočítajme približne zmenu produkcie v tisícoch kusov, ak zvýšime použitý materiál z 5 ton o 1 tonu a úroveň práce zostane nezmenená na hodnote 15 hodín.

Riešenie.

a) Marginálnu produkciu vzhľadom na úroveň vstupu x vypočítame podľa vzťahu (7), parciálnu deriváciu $f_x'(15, 5)$ vypočítame ako funkčnú hodnotu $f_x'(x, y)$ v $A = [15; 5]$,

$$f_x'(x, y) = 50 - 2x$$

$$f_x'(15, 5) = 20$$

$$Mf_x(15,5) \doteq f'_x(15,5) = 20$$

Keďže $f'_x(15,5) = 20 > 0$, tak parciálna funkcia $f_1(x)$ je v bode 15 rastúca. Zvýšením množstva práce z hodnoty $x = 15$ hodín o 1 hodinu sa zvýši funkčná hodnota funkcie $f_1(x)$. To znamená, že tým sa zvýši celková produkcia $\boldsymbol{f(x, y)}$ a to približne o 20 tisíc kusov pri nezmenenom množstve materiálu $y = 5$ ton.

b) Približnú zmenu produkcie určíme tak, že vypočítame marginálnu produkciu vzhľadom na úroveň vstupu y podľa vzťahu (8). Parciálnu deriváciu $f'_y(15,5)$ vypočítame ako funkčnú hodnotu $f'_y(x, y)$ v bode $A = [15; 5]$

$$f'_y(x, y) = 40 - 6y$$

$$f'_y(15, 5) = 10$$

$$Mf_y(15,5) \doteq f'_y(15,5) = 10$$

Keďže $f'_y(15,5) = 10 > 0$, tak parciálna funkcia $f_2(y)$ je v bode 5 rastúca. Zvýšením množstva materiálu z hodnoty $y = 5$ ton o 1 tonu sa zvýši funkčná hodnota funkcie $f_2(y)$. To znamená, že tým sa zvýši celková produkcia $f(x, y)$ a to približne o 10 tisíc kusov pri nezmenenom množstve práce $x = 15$ hodín.

ÚLOHY

4.6.1 Počas určitého obdobia výrobca produkuje x hektolitrov benzínu typu A a y hektolitrov benzínu typu B. Závislosť celkových nákladov od úrovne produkcie benzínu typu A a benzínu typu B je daná funkciou

$$C(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2 - 6x - 10y$$

a) Vypočítajte približne zmenu celkových nákladov, ak produkciu benzínu typu A znížime z úrovne $x = 10$ hl o 0,05 hl a produkciu benzínu typu B zvýšime z úrovne $y = 5$ hl o 0,1 hl. Výsledok porovnajte s presnou zmenou celkových nákladov.

b) Vypočítajte približne zmenu celkových nákladov, ak produkcia benzínu typu A ostane nezmenená na úrovni $x = 10$ hl a produkciu benzínu typu B zvýšime z úrovne $y = 5$ hl o 0,2 hl. Ekonomicky interpretujte. Výsledok porovnajte s presnou zmenou celkových nákladov.

c) Vypočítajte parciálne elasticity funkcie celkových nákladov vzhľadom na produkciu benzínu typu A a vzhľadom na produkciu benzínu typu B, a to pre úroveň produkcie benzínu typu A $x = 10$ hl a benzínu typu B $y = 5$ hl. Ekonomicky ich interpretujte.

4.6.2 Je daná funkcia celkového zisku pri výrobe dvoch druhov výrobkov V_1, V_2

$$P(x, y) = -9x^2 - y^2 - 6xy + 210x + 70y - 612$$

a úroveň produkcie výrobku V_1 s hodnotou $x = 8\,t$ a výrobku V_2 s hodnotou $y = 2\,t$.

a) Vypočítajte približne ako sa zmení celkový zisk, ak produkcia V_1 klesne o 0,1 tony a produkcia V_2 sa zvýši o 0,2 tony. Ekonomicky interpretujte.

b) Vypočítajte parciálnu elasticitu celkového zisku vzhľadom na produkciu výrobku V_2. Ekonomicky interpretujte.

4.6.3 Je daná funkcia celkového zisku pri výrobe dvoch druhov výrobkov V_1, V_2

$P(x,y) = -3x^2 - y^2 - 2xy + 200x + 100y$,

a úroveň produkcie výrobku V_1 s hodnotou $x = 20\,t$ a výrobku V_2 s hodnotou $y = 15\,t$.

a) Vypočítajte približne ako sa zmení zisk, ak produkciu V_1 nezmeníme a produkciu V_2 zvýšime o 1 tonu. Ekonomicky interpretujte!

b) Vypočítajte marginálny zisk vzhľadom na produkciu výrobku V_1. Ekonomicky interpretujte.

4.6.4 Je daná funkcia celkových nákladov $C(x,y) = 6x^2 + 5y^2 - 3xy - 21x - 41y + 250$ pri výrobe dvoch druhov výrobkov *X* a *Y*, kde *x* resp. *y* je množstvo výrobku *X* resp. *Y* v kusoch.

a) Vypočítajte marginálne náklady vzhľadom na produkciu výrobku X pre úroveň produkcie $x = 30\,ks$ a $y = 35\,ks$ a ekonomicky interpretujte.

b) Vypočítajte marginálne náklady vzhľadom na produkciu výrobku Y pre úroveň produkcie $x = 30\,ks$ a $y = 35\,ks$ a ekonomicky interpretujte.

4.6.5 Dopyt po tovare T_1 je daný dopytovou funkciou

$d: q = p_1^2 - 7p_1 \cdot p_2 + p_2^2 + 19$ (v tonách)

a) Vypočítajte približne zmenu dopytu po tovare T_1 v tonách, ak jednotková cena $p_1 = 2$ p. j. tovaru T_1 zostane nezmenená a jednotkovú cenu tovaru T_2 zvýšime z hodnoty $p_2 = 1$ p. j. o 1 %. Ekonomicky interpretujte. Výsledok porovnajte s presnou zmenou dopytu po tovare T_1.

b) Vypočítajte parciálnu elasticitu dopytu po tovare T_1 vzhľadom na jednotkovú cenu p_2 tovaru T_2 (krížovú), ak jednotková cena tovaru T_1 má hodnotu $p_1 = 2$ p. j. a jednotková cena p_2 tovaru T_2 má hodnotu $p_2 = 1$ *p. j.* Ekonomicky interpretujte.

4.6.6 Je daný dopyt po tovare T_2 dopytovou funkciou *d*: $q = 2p_1^2 - 5p_1 \cdot p_2 + 4p_2^2 + 2$ (v hl).

a) Vypočítajte približne zmenu dopytu po tovare T_2, ak jednotkovú cenu p_1 tovaru T_1 zvýšime z hodnoty $p_1 = 2$ p. j. o 0,1 p. j. a jednotkovú cenu p_2 tovaru T_2 znížime z hodnoty $p_2 = 1$ p. j. o 0,05 p. j. Výsledok porovnajte s presnou zmenou dopytu po tovare T_2 a ekonomicky interpretujte.

b) Vypočítajte parciálnu elasticitu dopytu po tovare T_2 vzhľadom na jednotkovú cenu p_1 tovaru T_1 (tzv. krížovú elasticitu), ak jednotková cena tovaru T_1 má hodnotu $p_1 = 2$ p. j. a jednotková cena tovaru T_2 má hodnotu $p_2 = 1$ p. j. Ekonomicky interpretujte.

4.6.7 Vypočítajte parciálnu elasticitu dopytu po tovare T_2 pre $p_1 = 18$ p. j., $p_2 = 10$ p. j. vzhľadom na cenu tovaru T_1, ak $d: q = \sqrt{11300 + 28p_1^2 - 18p_2^2}$ (v tonách). Ekonomicky interpretujte.

4.6.8 Dopyt po tovare T_1 a T_2 je daný dopytovými funkciami

$$T_1: \quad q_{T_1} = 6100 - 24p_1 + 12p_2$$

$$T_2: \quad q_{T_2} = 5900 + 20p_1 - 27p_2$$

kde p_1, q_1 je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare T_1 a p_2, q_2 je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare T_2, pričom cenová úroveň je $p_1 = 40$ p.j. a $p_2 = 31$ p.j.

a) Vypočítajte parciálnu elasticitu dopytu po tovare T_2 vzhľadom na cenu p_1 (t.j. krížovú elasticitu), resp. vzhľadom na cenu p_2 a ekonomicky interpretujte.

b) Vypočítajte parciálnu elasticitu dopytu po tovare T_1 vzhľadom na cenu p_2 (t.j. krížovú elasticitu), resp. vzhľadom na cenu p_1 a ekonomicky interpretujte.

Výsledky

4.6.1 a) $dC(10,5)$, ak produkciu benzínu typu A znížime z úrovne $x = 10$ hl o 0,05 hl a produkciu benzínu typu B zvýšime z úrovne $y = 5$ hl o 0,1 hl, tak sa celkové náklady približne znížia o 0,45 p. j., presne o 0,41 p. j.;

b) $dC(10,5)$, ak produkcia benzínu typu A zostane nezmenená na úrovni $x = 10\,hl$ a produkciu benzínu typu B zvýšime z úrovne $y = 5$ hl o 0,2 hl, tak sa celkové náklady približne zvýšia o 2 p. j., presne o 2,12 p. j.;

c) $\eta_x(C(10,5))$, ak produkciu benzínu typu A zvýšime z úrovne $x = 10$ hl o 1 % a produkcia benzínu typu B zostane nezmenená na úrovni $y = 5$ hl, tak sa celkové náklady približne zvýšia o 2,522 %, resp. $\eta_y(C(10,5))$, ak produkcia benzínu typu A zostane nezmenená na úrovni $x = 10$ hl a produkcia benzínu typu B sa zvýši z úrovne $y = 5$ hl o 1%, tak sa celkové náklady približne zvýšia o 0,435 %.

4.6.2 a) $dP(8,2)$, ak znížime úroveň produkcie výrobku V_1 z hodnoty $x = 8t$ o 0,1 tony a produkciu výrobku V_2 zvýšime z hodnoty $y = 2t$ o 0,2 tony, celkový zisk sa približne zníži o 1,8 p.j.;

b) $\eta_y(P(8,2))$, ak úroveň produkcie výrobku V_1 zostane nezmenená $x = 8t$ a produkciu výrobku V_2 zvýšime z hodnoty $y = 2t$ o 1 %, potom sa celkový zisk približne zvýši o 0,0677 %

4.6.3 a) $MP_y(20,15)$, ak úroveň produkcie výrobku V_1 zostane nezmenená $x = 20t$ a produkciu výrobku V_2 zvýšime z hodnoty $y = 15t$ o 1 tonu, potom sa celkový zisk približne zvýši o 30 peňažných jednotiek;

b) $MP_x(20,15)$, ak úroveň produkcie výrobku V_1 zvýšime z hodnoty $x = 20t$ o $1t$ a produkcia výrobku V_2 zostane nezmenená na úrovni $y = 15t$, potom sa celkový zisk približne zvýši o 50 peňažných jednotiek

4.6.4 a) $MC_x(30,35)$, ak zvýšime úroveň produkcie výrobku X z hodnoty $x = 30\ ks$ o jeden kus a produkcia výrobku Y zostane nezmenená na úrovni $y = 35\,ks$ potom sa celkové náklady približne zvýšia o 234 p.j.;

b) $MC_y(30,35)$, ak zvýšime úroveň produkcie výrobku Y z hodnoty $y = 35\,ks$ o jeden kus a produkcia výrobku X zostane nezmenená na úrovni $x = 30\,ks$, potom sa celkové náklady približne zvýšia o 219 p.j.

4.6.5 a) $dq(2,1)$, ak jednotková cena $p_1 = 2$ p. j. tovaru T_1 zostane nezmenená a jednotková cena p_2 tovaru T_2 sa zvýši z hodnoty $p_2 = 1$ p. j. o 1 %, tak dopyt po tovare T_1 sa približne zníži o 0,12 tony, presne o 0,1199 tony;

b) $\eta_{p_2}(q(2,1))$, ak jednotková cena $p_1 = 2$ p. j. tovaru T_1 ostane nezmenená a jednotkovú cenu p_2 tovaru T_2 zvýšime z hodnoty $p_2 = 1$ p. j. o 1%, tak dopyt po tovare T_1 sa približne zníži o 1,2 %

4.6.6 a) $dq(2,1)$, ak jednotkovú cenu p_1 tovaru T_1 zvýšime z hodnoty $p_1 = 2$ *p. j.* o 0,1 *p. j.* a jednotkovú cenu p_2 tovaru T_2 znížime z hodnoty $p_2 = 1$ *p. j.* o 0,05 *p. j.*, tak dopyt po tovare T_2 sa približne zvýši o 0,4 hl, presne o 0,455 hl;

b) $\eta_{p_1}(q(2,1))$, ak jednotkovú cenu p_1 tovaru T_1 zvýšime z hodnoty $p_1 = 2$ p. j. o 1 % a jednotková cena $p_2 = 1$ p. j. tovaru T_2 zostane nezmenená , tak dopyt po tovare T_2 sa približne zvýši o 1,5 percenta

4.6.7 $\eta_{p_1}(q(18,10))$, ak jednotkovú cenu p_1 tovaru T_1 zvýšime z hodnoty $p_1 = 18$ p. j. o 1 % a jednotková cena $p_2 = 10$ *p. j.* tovaru T_2 ostane nezmenená , tak dopyt po tovare T_2 sa približne zvýši o 0,977 %

4.6.8 a) $\eta_{p_1}(q_{T_2}(40,31))$, ak jednotkovú cenu p_1 tovaru T_1 zvýšime z hodnoty $p_1 = 40$ p. j. o 1 % a jednotková cena $p_2 = 31$ *p. j.* tovaru T_2 ostane nezmenená, tak dopyt po tovare T_2 sa približne zvýši o 0,136 %., resp. $\eta_{p_2}(q_{T_2}(40,31))$ ak jednotková cena p_1 tovaru T_1 ostane nezmenená $p_1 = 40$ *p. j.* a jednotkovú cenu $p_2 = 31$ *p. j.* tovaru T_2 zvýšime o 1 %, tak dopyt po tovare T_2 sa približne zníži o 0,143 %

b) $\eta_{p_2}(q_{T_1}(40,31))$, ak jednotková cena p_1 tovaru T_1 ostane nezmenená $p_1 = 40$ p. j. a jednotkovú cenu $p_2 = 31$ p. j. tovaru T_2 zvýšime o 1 %, tak dopyt po tovare T_1 sa približne zvýši o 0,067 %, resp. $\eta_{p_1}(q_{T_1}(40,31))$, ak jednotkovú cenu p_1 tovaru T_1 zvýšime z hodnoty $p_1 = 40$ p. j. o 1 % a jednotková cena $p_2 = 31$ p. j. tovaru T_2 zostane nezmenená, tak dopyt po tovare T_1 sa približne zníži o 0,174 percenta

4.7 Lokálne extrémy funkcie dvoch premenných

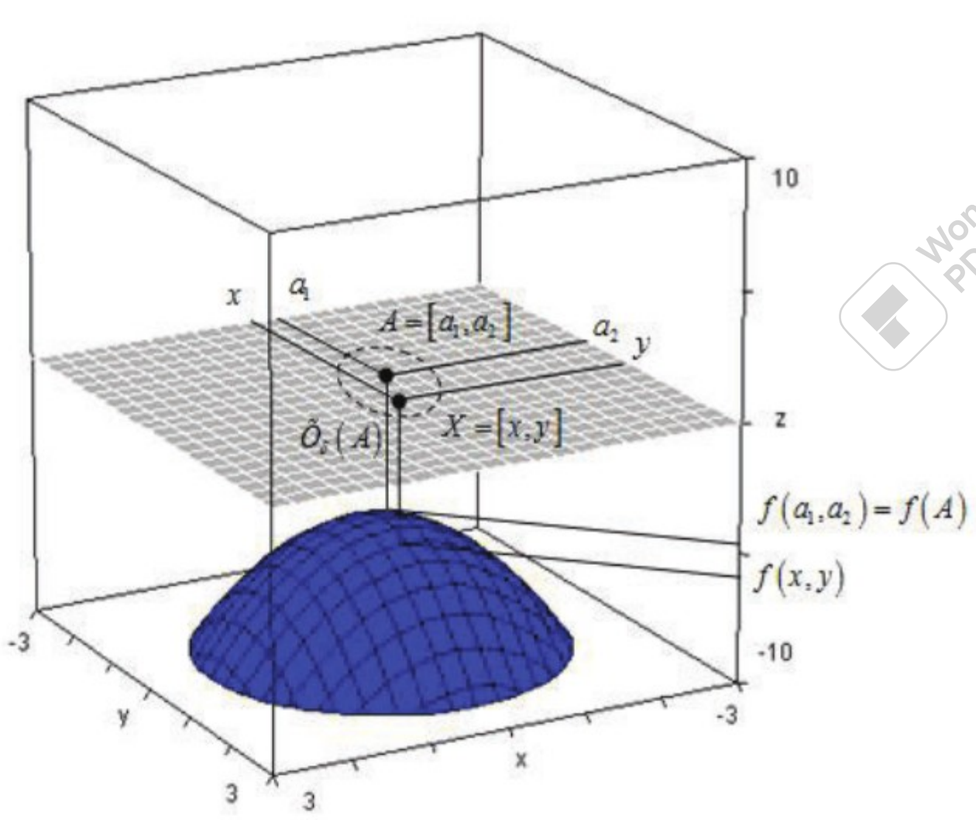
V tejto časti sa budeme zaoberať určovaním lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných a ukážeme si ich využitie v rámci riešenia optimalizačných úloh mikroekonomickej analýzy.

Definícia 4.7.1 ***(ostré lokálne maximum funkcie f v bode A)*** Hovoríme, že funkcia $f: z = f(x, y)$ má v bode $A = [a_1, a_2] \in D(f)$ ***ostré lokálne maximum*** rovnajúce sa $f(A)$, ak existuje také neúplné okolie $\tilde{O}_\delta(A)$, že pre každý bod $X = [x, y] \in \tilde{O}_\delta(A) \cap D(f)$ platí

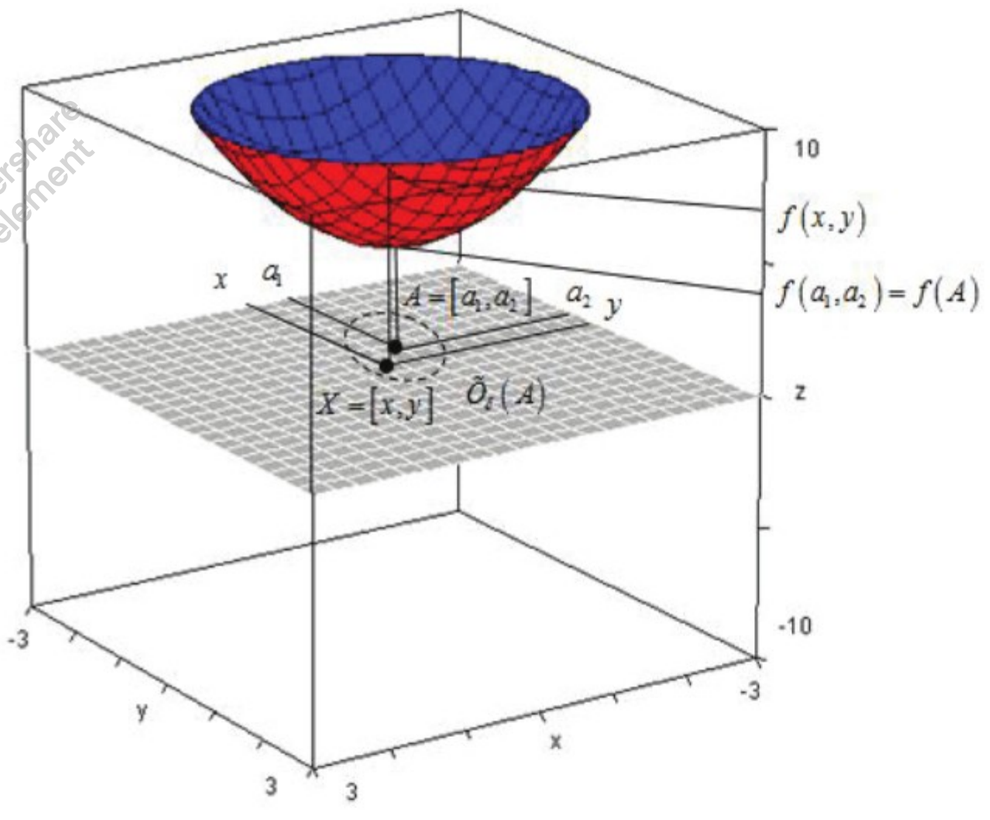
$$f(X) < f(A), \text{ resp. } f(x, y) < f(a_1, a_2) \tag{1}$$

Definícia 4.7.2 ***(ostré lokálne minimum funkcie f v bode A)*** Hovoríme, že funkcia $f: z = f(x, y)$ má v bode $A = [a_1, a_2] \in D(f)$ ***ostré lokálne minimum*** rovnajúce sa $f(A)$, ak existuje také neúplné okolie $\tilde{O}_\delta(A)$, že pre každý bod $X = [x, y] \in \tilde{O}_\delta(A) \cap D(f)$ platí

$$f(X) > f(A), \text{ resp. } f(x, y) > f(a_1, a_2). \tag{2}$$



Obr. 4.7.1 Ostré lokálne maximum funkcie f v bode $A = [a_1, a_2]$



Obr. 4.7.2 Ostré lokálne minimum funkcie f v bode $A = [a_1, a_2]$

Poznámka 4.7.1 Ak vo vzťahoch (1), (2) pridáme znak rovnosti, teda $f(X) \leq f(A)$ resp. $f(X) \geq f(A)$, hovoríme o lokálnom maxime resp. lokálnom minime. Hovoríme teda o lokálnych extrémoch, nie o ostrých lokálnych extrémoch.

Veta 4.7.1 ***(nutná podmienka existencie lokálneho extrému)*** Nech funkcia $f: z = f(x, y)$ je definovaná v okolí $O_\delta(A)$ bodu A a má v tomto bode lokálny extrém. Potom platí

$$f'_x(a_1, a_2) = 0 \wedge f'_y(a_1, a_2) = 0 \tag{3}$$

ak parciálne derivácie existujú.

Definícia 4.7.3 Bod $A=[a_1,a_2]\in D(f)$, pre ktorý platí $f'_x(a_1,a_2)=0, f'_y(a_1,a_2)=0$ sa nazýva ***stacionárny bod funkcie*** f: $z=f(x,y)$.

Poznámka 4.7.2 V stacionárnom bode funkcia f môže, resp. nemusí mať ostrý lokálny extrém.

Poznámka 4.7.3 Funkcia f: $z=f(x,y)$ môže mať lokálny extrém okrem stacionárnych bodov i v takom bode, v ktorom obidve prvé parciálne derivácie neexistujú alebo jedna z týchto derivácií sa rovná nule a druhá neexistuje. Či v takomto bode je lokálny extrém, určíme na základe jeho definície, t. j. vyšetrenia funkcie f v okolí tohto bodu. Takýmito prípadmi určenia lokálnych extrémov sa však nebudeme zaoberať.

Pri zisťovaní, či funkcia f má, alebo nemá v stacionárnom bode lokálny extrém má dôležitú úlohu kvadratická forma.

Definícia 4.7.4 (*kvadratická forma* $Q(h_1,h_2)$) Funkcia

$$Q:\ Q(H)=Q(h_1,h_2)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}h_ih_j \tag{4}$$

kde $a_{ij}=a_{ji}, a_{ij}\in R,\ H=[h_1,h_2]$

sa nazýva ***kvadratická forma*** dvoch premenných h_1, h_2.

Poznámka 4.7.4 Diferenciál druhého rádu funkcie f: $z=f(x,y)$ v bode $A=[a_1,a_2]$ je kvadratická forma dvoch premenných $Q(h_1,h_2)$

$$\mathrm{d}^2 f(A,H)=Q(h_1,h_2)=f''_{xx}(a_1,a_2)\cdot h_1^2+2f''_{xy}(a_1,a_2)\cdot h_1h_2+f''_{yy}(a_1,a_2)\cdot h_2^2 \tag{5}$$

Definícia 4.7.5 (*definitnosť kvadratickej formy*)
Kvadratická forma Q sa nazýva

pozitívne definitná, ak pre všetky $H\neq[0,0]$ je $Q(H)>0$,

negatívne definitná, ak pre všetky $H\neq[0,0]$ je $Q(H)<0$,

pozitívne semidefinitná, ak pre všetky $H\neq[0,0]$ je $Q(H)\geq 0$,

negatívne semidefinitná, ak pre všetky $H\neq[0,0]$ je $Q(H)\leq 0$,

indefinitná, ak existujú také body A, B, že $Q(A)\cdot Q(B)<0$.

Veta 4.7.2 (*postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému*) Nech bod $A=[a_1,a_2]$ je stacionárny bod funkcie f: $z=f(x,y)$ a nech funkcia f je dvakrát diferencovateľná v okolí bodu $O_\delta(A)$. Ak je kvadratická forma $\mathrm{d}^2 f(A,H)$

pozitívne definitná, tak funkcia f má v bode A ***ostré lokálne minimum*,**

negatívne definitná, tak funkcia f má v bode A ***ostré lokálne maximum*,**

indefinitná, tak funkcia f ***nemá*** v bode A lokálny extrém,

semidefinitná, tak funkcia f ***môže, ale nemusí*** mať lokálny extrém v bode A.

Poznámka 4.7.5 Určovanie lokálnych extrémov na základe priameho dokazovania definitnosti kvadratickej formy v zmysle definície 4.7.5 v stacionárnych bodoch nemusí byť niekedy jednoduché. Pri vyšetrovaní existencie lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných v stacionárnych bodoch budeme využívať nasledujúcu vetu.

Veta 4.7.3 Nech bod $A=(a_1, a_2)$ je stacionárnym bodom funkcie f: $z=f(x,y)$ a nech funkcia f je dvakrát diferencovateľná v okolí bodu $O_\delta(A)$. Označme

$$D(A)=f''_{xx}(a_1,a_2)\cdot f''_{yy}(a_1,a_2)-\left(f''_{xy}(a_1,a_2)\right)^2$$

Potom platí:

a) ak $D(A)>0$, tak funkcia f ***má*** v bode A ***lokálny extrém,*** a to:

ostré lokálne minimum rovnajúce sa $\boldsymbol{f(a_1,a_2)}$, ak $f''_{xx}(a_1,a_2)>0$,

ostré lokálne maximum rovnajúce sa $\boldsymbol{f(a_1,a_2)}$, ak $f''_{xx}(a_1,a_2)<0$,

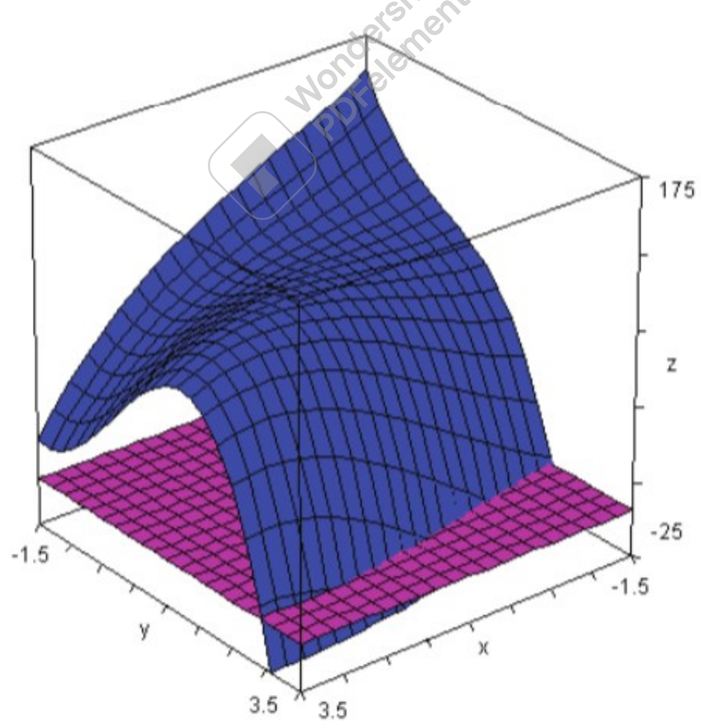
b) ak $D(A)<0$, tak funkcia f ***nemá*** v bode A ***lokálny extrém***,

c) ak $D(A)=0$, tak funkcia f v bode A ***môže, ale nemusí mať lokálny extrém***.

Príklad 4.7.1 Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$f:\ z=-x^3+12xy-8y^3+100$$

Riešenie. $D(f)=\{[x,y]\in E_2\}$



Obr. 4.7.3 Graf funkcie $f:\ z=-x^3+12xy-8y^3+100$

Funkcia f má všetky parciálne derivácie prvého a druhého rádu a všetky sú spojité v každom bode $[x,y]\in E_2$. Funkcia je dvakrát diferencovateľná v každom bode $[x,y]\in E_2$ a lokálne extrémy môže mať iba v stacionárnych bodoch.

Na základe nutnej podmienky existencie lokálneho extrému (veta 4.7.1) sa prvé parciálne derivácie funkcie f

$$f'_x(x,y)=-3x^2+12y \quad \text{a} \quad f'_y(x,y)=12x-24y^2$$

musia rovnať nule a stacionárne body nájdeme riešením sústavy rovníc

$$-3x^2+12y=0$$
$$12x-24y^2=0$$

Vyjadrením neznámej x z druhej rovnice a jej dosadením do prvej rovnice dostaneme rovnicu s jednou neznámou y

$$-12y\cdot(y^3-1)=0,$$

ktorá má dve riešenia $y_1=0$ a $y_2=1$. Tieto predstavujú y-ové súradnice dvoch stacionárnych bodov, ktoré označíme K a M. Príslušné x-ové súradnice stacionárnych bodov vypočítame dosadením hodnôt $y_1=0$ a $y_2=1$ napríklad do prvej rovnice: $x_1=0,\ x_2=2$. Stacionárne body sú $K=[0,0],\ M=[2,1]\in D(f)$ a spĺňajú nutnú podmienku existencie lokálneho extrému

$$f'_x(0,0)=0\wedge f'_y(0,0)=0$$

$$f'_x(2,1)=0\wedge f'_y(2,1)=0$$

čo však ešte nezaručuje, že funkcia f má v týchto bodoch lokálne extrémy. To musíme vyšetriť na základe postačujúcej podmienky existencie lokálneho extrému, a to priamo na základe vety 4.7.2 alebo využitím vety 4.7.3. Ukážeme oba postupy, neskôr budeme používať predovšetkým postup založený na vete 4.7.3.

Na overenie postačujúcej podmienky existencie lokálneho extrému vypočítame druhé parciálne derivácie a ich funkčné hodnoty v stacionárnych bodoch K a M.

	$K=[0,0]$	$M=[2,1]$
$f''_{xx}(x,y)=-6x$	$f''_{xx}(0,0)=0$	$f''_{xx}(2,1)=-12$
$f''_{xy}(x,y)=12$	$f''_{xy}(0,0)=12$	$f''_{xy}(2,1)=12$
$f''_{yx}(x,y)=12$	$f''_{yx}(0,0)=12$	$f''_{yx}(2,1)=12$
$f''_{yy}(x,y)=-48y$	$f''_{yy}(0,0)=0$	$f''_{yy}(2,1)=-48$

Postup na základe vety 4.7.2:

Pre kvadratickú formu funkcie f v bode $M=[2,1]$ podľa (5) platí

$$Q(h_1,h_2)=-12h_1^2+24h_1h_2-48h_2^2$$

$$Q(h_1,h_2)=-12\left(h_1^2-2h_1h_2+4h_2^2\right)$$

$$Q(h_1,h_2)=-12\left(h_1^2-2h_1h_2+h_2^{\,2}-h_2^{\,2}+4h_2^2\right)$$

$$Q(h_1,h_2)=-12\left(\left[h_1-h_2\right]^2+3h_2^2\right)$$

Z vyjadrenia kvadratickej formy $Q(h_1,h_2)$ je zrejmé, že $\forall[h_1,h_2]\neq[0,0]$ platí $Q(h_1,h_2)<0$. Podľa definície 4.7.5 je $Q(h_1,h_2)$ ***negatívne definitná*** a podľa vety 4.7.2 funkcia f má **v bode** $M=[2,1]$ ***ostré lokálne maximum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{f(2,1)=108}$.

Pre kvadratickú formu funkcie f v bode $K=[0,0]$ podľa (5) platí

$$Q(h_1,h_2)=0\cdot h_1^2+24\cdot h_1h_2+0\cdot h_2^2=24h_1h_2$$

Existujú také body $[1,3]$ a $[2,-1]$, že $Q(1,3)\cdot Q(2,-1)<0$. Podľa definície 4.7.5 je $Q(h_1,h_2)$ ***indefinitná*** a podľa vety 4.7.2 funkcia f ***nemá*** v bode $K=[0,0]$ ***lokálny extrém.***

Postup na základe vety 4.7.3:

V bode $M=[2,1]$ funkcia f ***má lokálny extrém***, lebo platí

$$D(M)=f''_{xx}(2,1)\cdot f''_{yy}(2,1)-\left(f''_{xy}(2,1)\right)^2=(-12)\cdot(-48)-(12)^2=432>0$$

Keďže $f''_{xx}(2,1)=-12<0$ funkcia f má v bode $M=[2,1]$ ***ostré lokálne maximum***, rovnajúce sa $\boldsymbol{f(2,1)=108}$.

V bode $K=[0,0]$ funkcia f ***nemá lokálny extrém***, pretože $D(K)<0$.

$$D(K)=f''_{xx}(0,0)\cdot f''_{yy}(0,0)-\left(f''_{xy}(0,0)\right)^2=0\cdot 0-(12)^2=-144<0$$

Záver: Funkcia f má ostré lokálne maximum $[2,\,1,\,108]$.

Príklad 4.7.2 Je daná funkcia celkového zisku pri výrobe dvoch druhov výrobkov X a Y $P(x,y)=-2x^2+30x-y^2+25y-xy-75$, kde $x>0$, resp. $y>0$ je množstvo produkcie v tisícoch kusov výrobku X resp. Y. Určme, aké množstvo výrobkov X,Y by mal podnik vyrobiť, aby dosiahol maximálny zisk a vypočítajme výšku tohto zisku.

Riešenie. V tomto príklade musíme dokázať, že funkcia celkového zisku $P(x,y)$ nadobúda v nejakom bode $A=[a_1,a_2]$ ostré lokálne maximum, pričom jeho hodnota predstavuje hodnotu maximálneho zisku. Súradnica a_1 bodu A reprezentuje úroveň produkcie výrobku X, t. j. $x=a_1$ tisíc kusov, súradnica a_2 bodu A reprezentuje úroveň produkcie výrobku Y, t. j. $y=a_2$ tisíc kusov. Vzhľadom na ekonomickú interpretáciu je zrejmé, že súradnice bodu A musia spĺňať podmienky $a_1>0$ a $a_2>0$.

Na základe nutnej podmienky existencie lokálneho extrému sa prvé parciálne derivácie funkcie $P(x,y)$

$$P'_x(x,y)=-4x+30-y,\quad P'_y(x,y)=-2y+25-x$$

musia rovnať nule, a teda stacionárne body nájdeme riešením sústavy rovníc

$$-4x+30-y=0$$
$$-2y+25-x=0$$

Ak z prvej rovnice vyjadríme $y=-4x+30$ a dosadíme do druhej rovnice, dostaneme rovnicu s jednou neznámou $-2(-4x+30)+25-x=0$, ktorej riešením je $x=5$. Tým sme určili x-ovú súradnicu stacionárneho bodu, ktorý označíme S. Jeho y-ovú súradnicu vypočítame dosadením hodnoty $x=5$ do vzťahu $y=-4x+30$. Stacionárny bod $S=[5,10]$ spĺňa nutnú podmienku existencie lokálneho extrému $P'_x(5,10)=0$ a súčasne $P'_y(5,10)=0$.

Chceme dokázať, že v bode $S=[5,10]$ funkcia $P(x,y)$ nadobúda ostré lokálne maximum na základe vety 4.7.3. Vypočítame potrebné druhé parciálne derivácie v stacionárnom bode S.

$$S=[5,10]$$

$P''_{xx}(x,y)=-4$	$P''_{xx}(5,10)=-4$
$P''_{xy}(x,y)=-1$	$P''_{xy}(5,10)=-1$
$P''_{yy}(x,y)=-2$	$P''_{yy}(5,10)=-2$

V stacionárnom bode $S=[5,10]$ funkcia $P(x,y)$ ***má lokálny extrém***, pretože

$$D(S)=P''_{xx}(5,10)\cdot P''_{yy}(5,10)-\left(P''_{xy}(5,10)\right)^2=(-4)\cdot(-2)-(-1)\cdot(-1)=7>0$$

Keďže pre $P''_{xx}(5,10)$ platí

$$P''_{xx}(5,10)=-4<0$$

funkcia $P(x,y)$ má v bode $S=[5,10]$ ***ostré lokálne maximum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{P(5,10)=25}$.

Ak chce podnik dosiahnuť maximálny zisk, musí vyrobiť 5 tisíc kusov výrobku X a 10 tisíc kusov výrobku Y. Výška maximálneho zisku bude 25 peňažných jednotiek.

ÚLOHY

4.7.1 Nájdite lokálne extrémy funkcie f a určte ich hodnoty.

a) $f:\ z=-3x^2-3y^2+2xy-28x+4y+7$

b) $f:\ z=-x^2-y^3+6xy-24y$

c) $f:\ z=3x^2+y^3-18xy$

d) $f:\ z=x^3+3xy-y^3+52$

e) $f:z=x^3+y^2-6xy+9x+5y+2$

f) $f:z=24-x^2-y^2+yx+36y$

g) $f:z=-2x^3-4y^3-x^2-3y^2$

h) $f:\ z=x^3+xy^2+6x^2+y^2$

i) $f:\ z=x^3+3xy^2-15x-12y$

j) $f:\ z=-2x^2+y^2+xy-3y$

k) $f:z=x^4-2x^2+y^3-3y^2$

l) $f:z=y^3+3x^2y-18x-30y$

m) $f:z=x^2+y^2+6xy+16x$

n) $f:z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$

4.7.2 Je daná funkcia $f:\ z=x^3+xy^2-3x^2-y^2-7$ a body $A=[0,0]$ a $B=[2,1]$, $C=[2,0]$. Zistite, či má funkcia f v týchto bodoch ostré lokálne extrémy. Ak áno, určte ich hodnoty.

4.7.3 Je daná funkcia celkového zisku $P(x,y)=-x^3-y^2+6xy$ pri výrobe dvoch druhov výrobkov V_1,V_2, kde $x>0$ a $y>0$ je množstvo produkcie výrobkov V_1, resp. V_2 v tonách. Zistite aké množstvo produkcie výrobkov V_1,V_2 maximalizuje zisk a určte jeho hodnotu. Ekonomicky interpretujte.

4.7.4 Daná je funkcia celkových príjmov $R(x,y)=-4y^2-2x^2+51x+60y$ a funkcia celkových nákladov $C(x,y)=x^2+y^2+5xy+135$, kde x, y sú množstvá vyrobených výrobkov X, Y v hektolitroch. Zistite, aké množstvo výrobkov X, Y maximalizuje zisk a určte jeho hodnotu. Ekonomicky interpretujte.

4.7.5 Dopyt po dvoch druhoch výrobkov je daný vzťahmi $x=120-p_x$ a $p_y=145-2y$, kde p_x, p_y sú jednotkové ceny týchto výrobkov. Celkové náklady sú dané vzťahom $C(x,y)=x^2+xy+y^2+50$. Určte počet výrobkov x a y, ktoré maximalizujú zisk a určte veľkosť tohto zisku. (pomôcka $R(x,y)=x\times p_x(x)+y\times p_y(y)$)

Výsledky

4.7.1 **a)** ostré lokálne maximum $[-5, -1, 75]$; **b)** ostré lokálne maximum $[12, 4, -16]$;
c) ostré lokálne minimum $[54, 18, -2916]$; **d)** ostré lokálne minimum $[1, -1, 51]$;
e) ostré lokálne minimum $[4; 9,5; 11,75]$; **f)** ostré lokálne maximum $[12, 24, 456]$;
g) ostré lokálne maximum $[0, 0, 0]$, ostré lokálne minimum $\left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -0,287\right]$;
h) ostré lokálne minimum $[0, 0, 0]$, ostré lokálne maximum $[-4, 0, 32]$;
i) ostré lokálne minimum $[2, 1, -28]$, ostré lokálne maximum $[-2, -1, 28]$;
j) nemá ostrý lokálny extrém; **k)** ostré lokálne minimum $[1, 2, -5]$, ostré lokálne minimum $[-1, 2, -5]$, ostré lokálne maximum $[0, 0, 0]$; **l)** ostré lokálne minimum $[1, 3, -72]$, ostré lokálne maximum $[-1, -3, 72]$; **m)** nemá ostrý lokálny extrém;
n) ostré lokálne minimum $[0, 0, 0]$, ostré lokálne maximum $\left[-\frac{5}{3}; 0; 4,63\right]$

4.7.2 v bode A má funkcia f ostré lokálne maximum rovnajúce sa $f(0,0) = -7$, v bode B funkcia f nemá lokálny extrém, v bode C má funkcia f ostré lokálne minimum rovnajúce sa $f(2,0) = -11$.

4.7.3 Pri produkcii výrobku X na úrovni $x = 6t$ a produkcii výrobku Y na úrovni $y = 18t$ bude zisk $P(x, y)$ maximálny a jeho hodnota je $108 p. j.$

4.7.4 Pri produkcii výrobku X na úrovni $x = 6 hl$ a produkcii výrobku Y na úrovni $y = 3 hl$ bude zisk $P(x, y)$ maximálny a jeho hodnota je $108 p.j.$

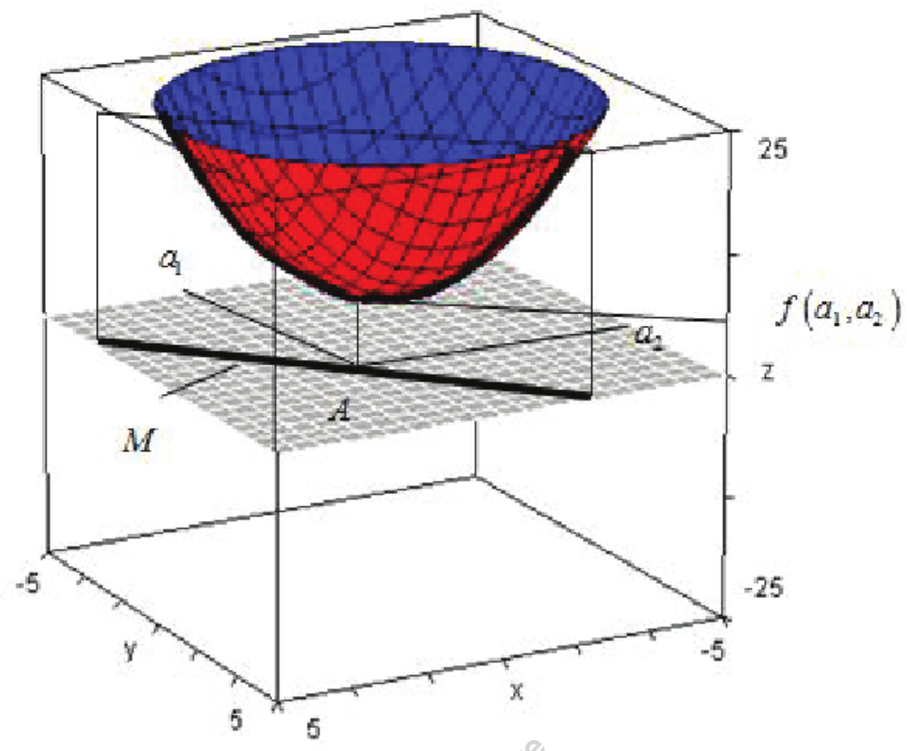
4.7.5 Pri produkcii výrobku X na úrovni $x = 25$ a produkcii výrobku Y na úrovni $y = 20$ bude zisk $P(x, y)$ maximálny a jeho hodnota je $2900 p.j.$

4.8 Viazané lokálne extrémy funkcie dvoch premenných

Definícia 4.8.1 Nech je daná funkcia $f: z = f(x, y)$ a nech množinu $M \subset D(f)$ tvoria body $X = [x, y] \in E_2$ vyhovujúce podmienke (väzbe)

$$g(x, y) = 0 \tag{1}$$

Lokálne extrémy funkcie f na množine M sa nazývajú ***viazané lokálne extrémy funkcie*** f.



Obr. 4.8.1 Viazaný lokálny extrém funkcie f v bode A

Na určenie viazaných lokálnych extrémov funkcie $f: z = f(x, y)$ budeme používať dve metódy:

1. substitučnú metódu,

2. metódu Lagrangeových multiplikátorov.

Substitučná metóda

V prípade jednoznačného vyjadrenia neznámej x, resp. y ***z rovnice väzby*** možno na hľadanie viazaných lokálnych extrémov použiť substitučnú metódu, založenú na nasledujúcom postupe.

Nech je daná funkcia dvoch premenných

$$f: z = f(x, y)$$

pričom hľadáme lokálne extrémy funkcie f na množine bodov $X = [x, y] \in E_2$, ktoré spĺňajú podmienku väzby

$$g(x, y) = 0.$$

V prípade možného jednoznačného vyjadrenia neznámej x z rovnice väzby získame výraz $x = \varphi(y)$. Jeho dosadením za neznámu x do funkčného predpisu $f: z = f(x, y)$ vznikne funkcia jednej reálnej premennej, ktorú označíme

$$F: z = f(\varphi(y), y) \text{ resp. } F: z = F(y)$$

- Ak funkcia $F(y)$ má v bode a_2 ***ostré lokálne maximum***, tak funkcia $f: z = f(x, y)$ pri väzbe $g(x, y) = 0$ má v bode $A = [a_1, a_2]$, kde $a_1 = \varphi(a_2)$, ***viazané ostré lokálne maximum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{f(a_1, a_2)}$.
- Ak funkcia $F(y)$ má v bode a_2 ***ostré lokálne minimum***, tak funkcia $f: z = f(x, y)$ pri väzbe $g(x, y) = 0$ má v bode $A = [a_1, a_2]$, kde $a_1 = \varphi(a_2)$, ***viazané ostré lokálne minimum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{f(a_1, a_2)}$.

Analogicky v prípade možného jednoznačného vyjadrenia neznámej y z rovnice väzby získame výraz $y = \varphi(x)$. Jeho dosadením za neznámu y do funkčného predpisu $f: z = f(x, y)$ vznikne funkcia jednej reálnej premennej, ktorú označíme

$$F: z = f(x, \varphi(x)) \text{ resp. } F: z = F(x)$$

- Ak funkcia $F(x)$ má v bode a_1 ***ostré lokálne maximum***, tak funkcia $f: z = f(x, y)$ pri väzbe $g(x, y) = 0$ má v bode $A = [a_1, a_2]$, kde $a_2 = \varphi(a_1)$, ***viazané ostré lokálne maximum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{f(a_1, a_2)}$.
- Ak funkcia $F(x)$ má v bode a_1 ***ostré lokálne minimum***, tak funkcia $f: z = f(x, y)$ pri väzbe $g(x, y) = 0$ má v bode $A = [a_1, a_2]$, kde $a_2 = \varphi(a_1)$, ***viazané ostré lokálne minimum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{f(a_1, a_2)}$.

Príklad 4.8.1 Nájdime viazané lokálne extrémy funkcie $f: z = x^2 + xy + y^2$ pri väzbe $x + y - 1 = 0$.

Riešenie. Hľadáme viazané lokálne extrémy funkcie $f: z = x^2 + xy + y^2$ s definičným oborom $D(f) = \{[x, y] \in E_2\}$ na množine $M = \{[x, y] \in E_2, \ x + y - 1 = 0\}$.

Vzhľadom na jednoznačnosť vyjadrenia neznámej x resp. neznámej y z rovnice väzby použijeme pri hľadaní viazaných extrémov tejto funkcie substitučnú metódu. Vyjadrením neznámej x z rovnice väzby $x + y - 1 = 0$ získame výraz

$$x = -y + 1$$

ktorý dosadíme do funkčného predpisu $f: z = x^2 + xy + y^2$. Dostaneme funkčný predpis funkcie jednej reálnej premennej

$$F: z = y^2 - y + 1$$

V rámci hľadania viazaných lokálnych extrémov touto metódou treba určiť ostré lokálne extrémy funkcie $F(y)$. Na základe nutnej podmienky existencie lokálneho extrému funkcie jednej reálnej premennej platí

$$F'(y) = 2y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \in D(F)$$

Overíme existenciu ostrého lokálneho extrému funkcie $F(y)$ v stacionárnom bode $\frac{1}{2}$ na základe postačujúcej podmienky existencie ostrého lokálneho extrému funkcie jednej reálnej

premennej. Keďže $F''\left(\frac{1}{2}\right)=2>0$, tak funkcia $F:\ z=y^2-y+1$ má v bode $y=\frac{1}{2}$ ostré lokálne minimum. Znamená to, že funkcia $f:\ z=x^2+xy+y^2$ pri väzbe $x+y-1=0$ má v bode $A=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ viazané ostré lokálne minimum, ktorého hodnota je $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$, pričom x-ovú súradnicu bodu A sme vypočítali dosadením $y=\frac{1}{2}$ do vzťahu $x=1-y$. Funkcia f má teda viazané ostré lokálne minimum $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$.

Metóda Lagrangeových multiplikátorov

Ak nevieme jednoznačne vyjadriť neznámu x resp. y z rovnice väzby, použijeme metódu Lagrangeových multiplikátorov, ktorá je všeobecnejšia ako substitučná metóda.

Nech je daná funkcia dvoch premenných

$$f: z=f(x,y)$$

pričom hľadáme lokálne extrémy na množine bodov $X=[x,y]\in E_2$, ktoré spĺňajú podmienku väzby

$$g(x,y)=0.$$

V rámci tejto metódy hľadáme ostré lokálne extrémy tzv. ***Lagrangeovej funkcie*** $\boldsymbol{F}$, ktorá je definovaná vzťahom

$$F:\ z=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y) \tag{2}$$

kde parameter λ nazývame ***Lagrangeov multiplikátor.***

Body, v ktorých môže, ale nemusí Lagrangeova funkcia nadobúdať ostré lokálne extrémy, získame na základe nutnej podmienky existencie ostrého lokálneho extrému funkcie dvoch premenných

$$F'_x(x,y)=0\ \wedge\ F'_y(x,y)=0$$

a rovnice väzby

$$g(x,y)=0.$$

O existencii ostrého lokálneho maxima, resp. ostrého lokálneho minima Lagrangeovej funkcie F v stacionárnom bode $A=[a_1,a_2]$ rozhodneme na základe vety 4.7.3.

Ak Lagrangeova funkcia F má v stacionárnom bode $A=[a_1,a_2]$ ostré lokálne maximum, resp. minimum, tak funkcia $f: z=f(x,y)$ pri väzbe $g(x,y)=0$ má v bode $A=[a_1,a_2]$ viazané ostré lokálne maximum rovnajúce sa $\boldsymbol{f(a_1,a_2)}$, resp. viazané ostré lokálne minimum rovnajúce sa $\boldsymbol{f(a_1,a_2)}$.

Poznámka 4.8.1 Ak zistíme, že v stacionárnom bode $A=[a_1,a_2]$ Lagrangeova funkcia F nemá ostrý lokálny extrém, neznamená to, že funkcia $f: z=f(x,y)$ v bode $A=[a_1,a_2]$ nemá viazaný ostrý lokálny extrém. V takomto prípade musíme pokračovať vo vyšetrovaní viazaných lokálnych extrémov diferencovaním rovnice väzby

$$g'_x(a_1, a_2)\,h_1 + g'_y(a_1, a_2)\,h_2 = 0$$

z ktorej vyjadrením prírastku h_1, resp. h_2 a dosadením do kvadratickej formy $\mathrm{d}^2 f(A,H)$ vznikne ***nová kvadratická forma*** $Q^*(h_2)$, resp. $Q^*(h_1)$. Interpretáciu uvedieme pre kvadratickú formu $Q^*(h_1)$.

- Ak $\forall h_1 \neq 0$ je $Q^*(h_1) < 0$ ($Q^*(h_1)$ je ***negatívne definitná***), tak funkcia f pri väzbe $g(x,y)=0$ má v bode $A=[a_1, a_2]$ ***viazané ostré lokálne maximum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{f(a_1, a_2)}$.
- Ak $\forall h_1 \neq 0$ je $Q^*(h_1) > 0$ ($Q^*(h_1)$ je ***pozitívne definitná***), tak funkcia f pri väzbe $g(x,y)=0$ má v bode $A=[a_1, a_2]$ ***viazané ostré lokálne minimum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{f(a_1, a_2)}$.
- Ak $\forall h_1 \neq 0$ je $Q^*(h_1) \geq 0 \vee Q^*(h_1) \leq 0$ ($Q^*(h_1)$ je ***semidefinitná***), tak funkcia f ***môže***, ale ***nemusí*** mať viazaný ostrý lokálny extrém v bode A.
- Ak existujú také body C, D, že $Q^*(C)\cdot Q^*(D) < 0$ ($Q^*(h_1)$ je ***indefinitná***), tak funkcia f ***nemá*** viazaný ostrý lokálny extrém v bode A.

Príklad 4.8.2 Nájdime viazané lokálne extrémy funkcie $f:\ z = 2x - 4y$ pri väzbe $x^2 + y^2 = 5$

Riešenie. Hľadáme viazané lokálne extrémy funkcie $f:\ z = 2x - 4y$ s definičným oborom $D(f) = \{[x, y] \in E_2\}$ na množine $M = \{[x, y] \in E_2, x^2 + y^2 = 5\}$. Vzhľadom na nejednoznačnosť vyjadrenia neznámej x, resp. y z rovnice väzby, použijeme pri hľadaní viazaných extrémov tejto funkcie metódu Lagrangeových multiplikátorov. Vytvoríme Lagrangeovu funkciu

$$F:\ z = 2x - 4y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 5\right).$$

Na základe nutnej podmienky existencie lokálneho extrému sa prvé parciálne derivácie Lagrangeovej funkcie $F'_x(x, y) = 2 + 2x\lambda$, $F'_y(x, y) = -4 + 2y\lambda$ rovnajú nule. Stacionárne body Lagrangeovej funkcie nájdeme riešením rovníc

$$2 + 2x\lambda = 0$$
$$-4 + 2y\lambda = 0$$

a rovnice väzby

$$x^2 + y^2 = 5$$

Z prvých dvoch rovníc vyjadríme $x = -\frac{1}{\lambda}$, $y = \frac{2}{\lambda}$ a ich dosadením do rovnice väzby dostaneme

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 5$$
$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

Dosadením hodnôt Lagrangeových multiplikátorov λ_1, λ_2 do vyjadrení neznámych x a y dostaneme súradnice stacionárnych bodov Lagrangeovej funkcie F.

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow x = -1,\ y = 2$$
$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow x = 1,\ y = -2$$

Lagrangeova funkcia F má dva stacionárne body $K = [-1, 2]$, $M = [1, -2]$.

Vyšetríme existenciu lokálnych extrémov Lagrangeovej funkcie v stacionárnych bodoch

K, M použitím vety 4.7.3.

$$K=[-1,2] \qquad M=[1,-2]$$

$$F''_{xx}(x,y)=2\lambda \qquad F''_{xx}(-1,2)=2 \qquad F''_{xx}(1,-2)=-2$$
$$F''_{xy}(x,y)=0 \qquad F''_{xy}(-1,2)=0 \qquad F''_{xy}(1,-2)=0$$
$$F''_{yy}(x,y)=2\lambda \qquad F''_{yy}(-1,2)=2 \qquad F''_{yy}(1,-2)=-2$$

$$D(K)=F''_{xx}(-1,2)\cdot F''_{yy}(-1,2)-\left(F''_{xy}(-1,2)\right)^2=2\cdot 2-(0)^2=4>0\,.$$

Lagrangeova funkcia F ***má*** v bode $K=[-1,2]$ ***lokálny extrém***, konkrétne ***ostré lokálne minimum***, keďže $F''_{xx}(-1,2)=2>0$. To znamená, že funkcia $f:\ z=2x-4y$ pri väzbe $x^2+y^2=5$ má v bode $K=[-1,2]$ ***viazané ostré lokálne minimum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{f(-1,2)=-10}$.

$$D(M)=F''_{xx}(1,-2)\cdot F''_{yy}(1,-2)-\left(F''_{xy}(1,-2)\right)^2=(-2)\cdot(-2)-(0)^2=4>0\,.$$

Lagrangeova funkcia F ***má*** v bode $M=[1,-2]$ ***lokálny extrém***, konkrétne **ostré *lokálne maximum***, keďže $F''_{xx}(1,-2)=-2<0$. To znamená, že funkcia $f:\ z=2x-4y$ pri väzbe $x^2+y^2=5$ má v bode $M=[1,-2]$ ***viazané ostré lokálne maximum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{f(1,-2)=10}$.

Príklad 4.8.3 Je daná produkčná funkcia $f:\ z=6x+2y$ a funkcia celkových nákladov na vstupy $C_V(x,y)=2x^2+y^2$. Vypočítajme, pre aké hodnoty vstupov x a y bude produkcia výrobkov maximálna, ak do vstupov investujeme $220\,000$ peňažných jednotiek.

Riešenie. Musíme dokázať, že produkčná funkcia $f:\ z=6x+2y$ nadobúda v nejakom bode $A=[a_1,a_2]$, ktorého súradnice vyhovujú rovnici väzby $2x^2+y^2=220\,000$, viazané ostré lokálne maximum, pričom jeho hodnota predstavuje hodnotu maximálnej produkcie. Súradnica a_1 bodu A reprezentuje hodnotu vstupu x a súradnica a_2 bodu A reprezentuje hodnotu vstupu y. Vzhľadom na ekonomickú interpretáciu je zrejmé, že súradnice bodu A musia spĺňať podmienky $a_1>0$ a $a_2>0$.

Vzhľadom na nejednoznačnosť vyjadrenia neznámej x, resp. y z rovnice väzby, použijeme pri hľadaní viazaných ostrých lokálnych extrémov produkčnej funkcie metódu Lagrangeových multiplikátorov. Vytvoríme Lagrangeovu funkciu

$$F:\ z=6x+2y+\lambda\left(2x^2+y^2-220\,000\right)$$

Na základe nutnej podmienky existencie lokálneho extrému sa musia prvé parciálne derivácie Lagrangeovej funkcie $F'_x(x,y)=6+4x\lambda$, $F'_y(x,y)=2+2y\lambda$ rovnať nule, a teda stacionárne body Lagrangeovej funkcie nájdeme riešením rovníc

$$6+4x\lambda=0$$
$$2+2y\lambda=0$$

a rovnice väzby

$$2x^2+y^2=220\,000.$$

Z druhej rovnice vyjadríme Lagrangeov multiplikátor $\lambda = -\frac{1}{y}$ a jeho dosadením do prvej rovnice dostaneme $6 - \frac{4x}{y} = 0$. Vyjadrením neznámej y a jej dosadením do rovnice väzby získame po úprave rovnicu $22x^2 = 1\,980\,000$, ktorá má dve riešenia

$$x_1 = 300, \quad x_2 = -300.$$

Tieto hodnoty predstavujú x-ové súradnice dvoch stacionárnych bodov, ktoré označíme T, R. Ich y-ové súradnice vypočítame dosadením hodnôt $x_1 = 300$ a $x_2 = -300$ do vzťahu $6 - \frac{4x}{y} = 0$, a teda Lagrangeova funkcia F má dva stacionárne body

$$T = [300, 200], \quad R = [-300, -200].$$

Vzhľadom na ekonomickú interpretáciu stacionárny bod $R = [-300, -200]$ nebudeme vyšetrovať. Musíme dokázať, že v stacionárnom bode $T = [300, 200]$ Lagrangeova funkcia F nadobúda ostré lokálne maximum. Použijeme vetu 4.7.3. Vypočítame potrebné druhé parciálne derivácie v T, pričom platí $\lambda = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{200}$.

$$T = [300, 200]$$

$$F''_{xx}(x, y) = 4\lambda \qquad F''_{xx}(300, 200) = -\frac{1}{50}$$

$$F''_{xy}(x, y) = 0 \qquad F''_{xy}(300, 200) = 0$$

$$F''_{yy}(x, y) = 2\lambda \qquad F''_{yy}(300, 200) = -\frac{1}{100}$$

$$D(T) = F''_{xx}(300, 200) \cdot F''_{yy}(300, 200) - \left(F''_{xy}(300, 200)\right)^2 = \frac{1}{5\,000} > 0.$$

Lagrangeova funkcia F má v bode $T = [300, 200]$ lokálny extrém, konkrétne ostré lokálne maximum, keďže $F''_{xx}(300, 200) = -\frac{1}{50} < 0$. To znamená, že funkcia $f: z = 6x + 2y$ pri väzbe $2x^2 + y^2 = 220\,000$ má v bode $T = [300, 200]$ ***viazané ostré lokálne maximum*** rovnajúce sa $\boldsymbol{f(300, 200) = 2\,200}$.

Maximálnu produkciu pri investovaní **220 000** peňažných jednotiek do vstupov dosiahneme pri zabezpečení vstupov $\boldsymbol{x = 300}$ a $\boldsymbol{y = 200}$. Veľkosť tejto produkcie bude **2 200** produkčných jednotiek.

ÚLOHY

4.8.1 Nájdite viazané lokálne extrémy funkcie *f* pri danej väzbe a určte ich hodnoty substitučnou metódou :

a) $f: z = y^2 - 4x^3$ pri väzbe $2x - y + 1 = 0$,

b) $f: z = x^2 + 2xy + y^2 + 4x$ pri väzbe $x + 3y - 5 = 0$,

c) $f: z = x^2 + y^2$ pri väzbe $xy - 1 = 0$.

d) $f: z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ pri väzbe $2y - x = 0$

e) $f: z = x^3 + y^3$ pri väzbe $x + y - 3 = 0$

f) $f: z = 4 - x^2 - y^2 - 2x$ pri väzbe $y - x - 1 = 0$

g) $f: z = x^2 + y^2 + xy + 5x - 5y + 3$ pri väzbe $y - x = 10$

h) $f: z = x^3 + y^3 + yx$ pri väzbe $x + y = 4$

4.8.2 Nájdite viazané lokálne extrémy funkcie *f* pri danej väzbe a určte ich hodnoty metódou Lagrangeových multiplikátorov:

a) $f: \ z = 3x + 2y$ pri väzbe $x^2 + 2y^2 = 11,$

b) $f: \ z = 2x + 4y$ pri väzbe $x^2 + y^2 = 5,$

c) $f: \ z = x^3 + y^3$ pri väzbe $x + y - 1 = 0,$

d) $f: z = x - 2y + 3$ pri väzbe $x^2 + y^2 = 5,$

e) $f: z = 16 - 10x - 24y$ pri väzbe $x^2 + y^2 = 169,$

f) $f: z = 8 - 2x - 4y$ pri väzbe $x^2 + 2y^2 = 12,$

g) $f: z = 5 + 2x + 4y$ pri väzbe $x^2 + y^2 = 20$

h) $f: z = 100 - x^2 - y^2 - 2x$ pri väzbe $4y - 4x - 4 = 0$

4.8.3 Firma produkuje týždenne $11\,hl$ **kofoly a** $7\,hl$ **viney pri funkcii celkového zisku** $P(x, y) = -5y^2 - 6xy - 5x^2 + 212y + 236x$**, kde** x **je objem produkcie kofoly a** y **objem produkcie viney. Chce zvýšiť celkovú týždennú produkciu o** $6\,hl$**. Koľko hl kofoly a viney by mala firma produkovať, aby pri týchto obmedzených podmienkach dosiahla maximálny zisk? Aký je zisk firmy po zvýšení produkcie?**

4.8.4 Firma chce vyrobiť 200 jednotiek produkcie pri minimálnych nákladoch na vstupy, pričom jej produkčná funkcia je $f: z = 2x + y$ **a náklady na vstupy sú určené funkciou** $C_V(x, y) = 4x^2 + y^2$**. Určte, aký počet jednotiek jednotlivých vstupov** x **a** y **je potrebné vložiť do výroby a vypočítajte zodpovedajúcu hodnotu minimálnych nákladov na vstupy.**

4.8.5 Je daná produkčná funkcia $f: z = x + y$ **a funkcia celkových nákladov na vstupy** $C_V(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2 + 800$**. Vypočítajte, pre aké hodnoty vstupov** x **(práca v hodinách) a** y **(materiál v tonách) budú náklady na vstupy minimálne, ak chceme vyrobiť** $39\,ks$**. Určte výšku minimálnych nákladov na vstupy za daných podmienok.**

4.8.6 Je daná produkčná funkcia $f: z = x \cdot y$ **a funkcia celkových nákladov na vstupy** $C_V(x, y) = 2x + 5y$**. Vypočítajte, pre aké hodnoty vstupov** x **(práca v hodinách) a** y **(materiál v tonách) bude výroba (v kusoch) maximálna, ak do vstupov investujeme 5 000 peňažných jednotiek. Určte jej hodnotu.**

4.8.7 Firma chce vyrobiť 10 kusov výrobkov pri minimálnych nákladoch na vstupy. Určte, aký počet jednotiek jednotlivých vstupov *X* (počet hodín práce) a *Y* (materiál v tonách) treba vložiť do výroby, ak je daná produkčná funkcia $f: z = \sqrt{x \cdot y}$**, pričom náklady na jednu hodinu práce sú 1 p.j. a jednu tonu materiálu sú 4 p.j. Určte hodnotu minimálnych nákladov na vstupy.**

4.8.8 Daná je produkčná funkcia $f: z = \sqrt{3x^2 + 15xy + 2y^2}$ **a funkcia celkových nákladov na vstupy** $C_V(x, y) = 2x + 4y$**. Vypočítajte, aké maximálne množstvo jednotiek produkcie je možné vyprodukovať, ak sa do vstupov investovalo 128 peňažných jednotiek? Aké budú hodnoty jednotlivých vstupov *X* a *Y*?**

Výsledky

4.8.1 a) viazané ostré lokálne minimum $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{27}\right]$, viazané ostré lokálne maximum $[1, 3, 5]$; **b)** viazané ostré lokálne minimum $[-7, 4, -19]$; **c)** viazané ostré lokálne minimá $[-1, -1, 2]$, $[1, 1, 2]$; **d)** viazané ostré lokálne maximum $[0, 0, 1]$, viazané ostré lokálne minimum $\left[1, \frac{1}{2}, 0\right]$; **e)** viazané ostré lokálne minimum $\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{54}{8}\right]$; **f)** viazané ostré lokálne maximum $[-1, 0, 5]$; **g)** viazané ostré lokálne minimum $[-5, 5, -22]$; **h)** viazané ostré lokálne minimum $[2, 2, 20]$

4.8.2 a) viazané ostré lokálne minimum $[-3, -1, -11]$, viazané ostré lokálne maximum $[3, 1, 11]$; **b)** viazané ostré lokálne maximum $[1, 2, 10]$, viazané ostré lokálne minimum $[-1, -2, -10]$; **c)** viazané ostré lokálne minimum $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$; **d)** viazané ostré lokálne minimum $[-1, 2, -2]$, viazané ostré lokálne maximum $[1, -2, 8]$; **e)** viazané ostré lokálne minimum $[5, 12, -322]$, viazané ostré lokálne maximum $[-5, -12, 354]$; **f)** viazané ostré lokálne minimum $[2, 2, -4]$, viazané ostré lokálne maximum $[-2, -2, 20]$; **g)** viazané ostré lokálne minimum $[2, 4, 25]$, viazané ostré lokálne maximum $[-2, -4, -15]$; **h)** viazané ostré lokálne maximum $[-1, 0, 101]$

4.8.3 Firma dosiahne maximálny zisk pri výrobe $x = 15\,hl$ kofoly a $y = 9\,hl$ viney a jeho hodnota bude 3 108 peňažných jednotiek pri celkovej produkcii $24\,hl$.

4.8.4 Minimálne náklady na vstupy dosiahneme pri zabezpečení vstupov $x = 50$ a $y = 100$ a ich hodnota bude 20 000 peňažných jednotiek pri výrobe 200 jednotiek produkcie.

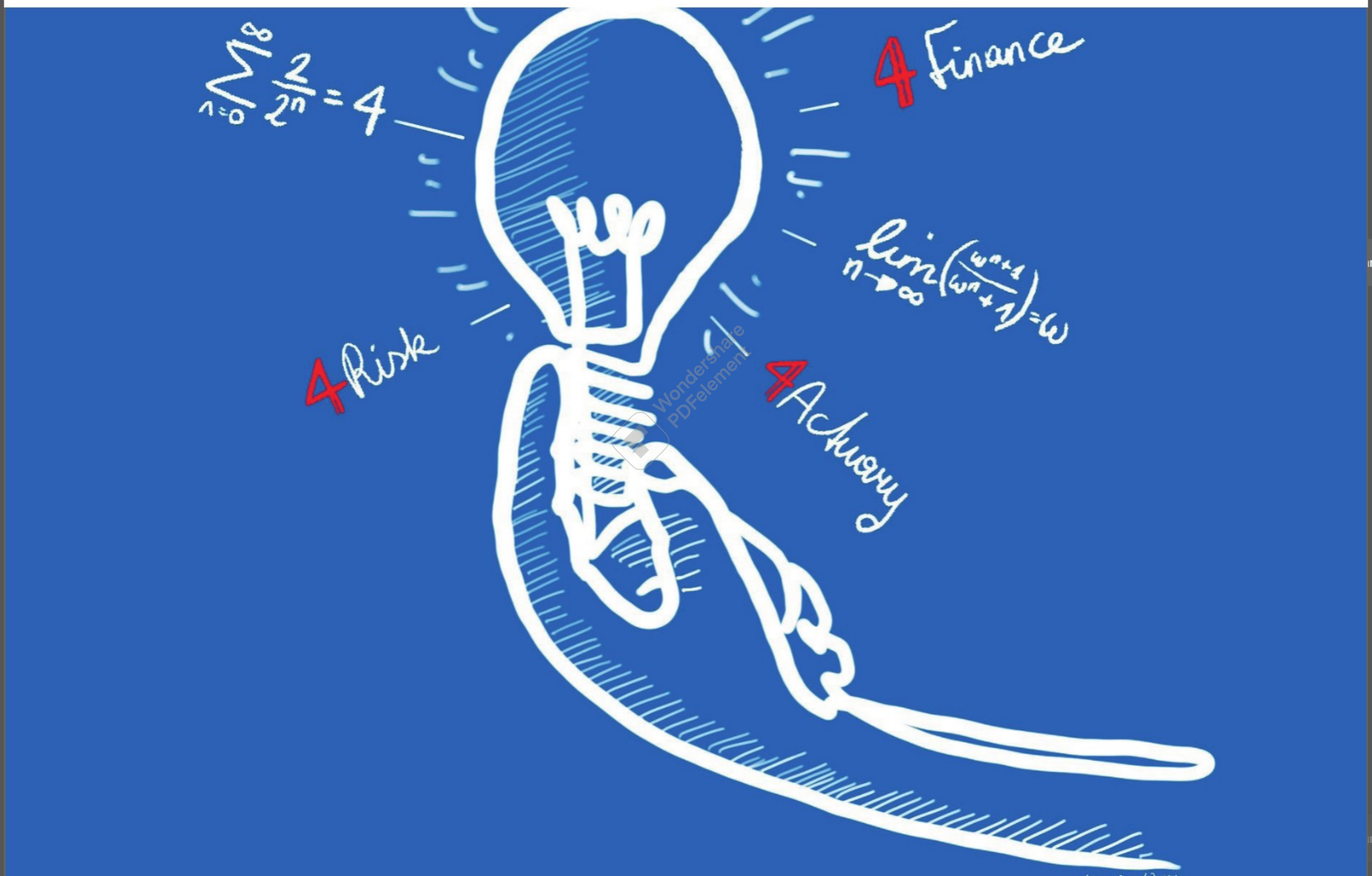
4.8.5 Minimálne náklady na vstupy dosiahneme pri zabezpečení vstupov $x = 13\,h$ a $y = 26\,t$ a ich hodnota bude rovná $4394\,p.\,j.$ pri výrobe 39 kusov.

4.8.6 Maximálnu výrobu dosiahneme pri zabezpečení vstupov $x = 1250\,h$ a $y = 500\,t$ a jej hodnota bude rovná $625\,000\,ks$ pri investovaní $5000\,p.\,j.$ do vstupov.

4.8.7 Minimálne náklady na vstupy dosiahneme pri zabezpečení vstupov $x = 20\,h$ a $y = 5\,t$ a ich hodnota bude 40 peňažných jednotiek pri produkcii 10 kusov výrobkov.

4.8.8 Maximálnu výrobu dosiahneme pri pri zabezpečení vstupov $x = 52$ a $y = 6$ a jej hodnota bude rovná $113,42$ jednotiek produkcie pri investovaní 128 peňažných jednotiek do vstupov.

Wondershare
PDFelement



UNIQA Forum MathematiQum

Your network for actuarial and applied mathematics

Join our community and stay tuned!

UNIQA 4WARD je organizačnou zložkou rakúskej UNIQA Insurance Group AG. Spoločnosť má sídlo v Bratislave a poskytuje svoje služby materskej spoločnosti UNIQA Insurance Group vo Viedni, ako aj všetkým spoločnostiam UNIQA v rámci strednej a východnej Európy. Zameriava sa na činnosti v oblasti risk manažmentu, security manažmentu, financií a aktuárstva. Od svojho založenia spoločnosť UNIQA 4WARD spolupracuje s univerzitami, aby podporila štúdium aktuárskych vied a ukázala ako aplikovať jej výsledky v praxi. Pravidelne organizuje výzvu pre matematické talenty Math Challenge, ktorá sa skladá z niekoľkých matematicko-logických hádaniek publikovaných na webovej stránke spoločnosti.

Aktuári sú odborníci v oblasti matematiky a štatistiky. **Aktuári sú riešitelia problémov v oblasti financií, ktorí používajú svoje matematické schopnosti na meranie pravdepodobnosti nastatia rôznych rizík a poskytujú komplexné riešenia ako podporu pri strategických rozhodnutiach.**

Každé podnikanie prináša viaceré riziká, ktoré je potrebné merať a následne riadiť. Kariéra aktuára ponúka veľa možností v oblasti bankovníctva, poisťovníctva, zdravotného poistenia, dôchodových systémov, investovania, poradenstva, ale aj v iných nefinančných oblastiach. Aktuári môžu mať rôzne akademické vzdelanie, ale všetci majú radi čísla a ich použitie v praxi. Aktuári vedia ako sa analyzujú dáta, modelujú finančné toky, vyhodnocujú finančné riziká a vedia ako ich odkomunikovať manažmentu.

Manuel Radler

UNIQA 4WARD is a branch office of UNIQA Insurance Group AG with its seat in Bratislava. In the areas of Actuarial, Finance, Risk and Security Management the company supports and provides services to the UNIQA Headquarters in Vienna and all international business units in the region of Central and Eastern Europe. From the very beginning UNIQA 4WARD has cooperated with universities to promote the studies of actuarial science and show their applications in the industry. On its website, it has regularly published the competitions, Math Challenges, for students which consist of a series of mathematical logical riddles.

Actuaries are specialists in mathematics and statistics. **Moreover, they are problem solvers with a financial focus who use their mathematical skills to quantify the probability of risk and translate complex circumstances to support strategic decisions.**

Each entrepreneurial activity is exposed to a variety of risks which have to be measured and constantly managed. The actuarial career offers plenty of possibilities in the fields of banking, insurance, pension systems, investment, consulting and other non-financial areas. Actuaries might have different sorts of education, but all of them love numbers and their application in practice. Actuaries know how to analyse data, model financial cash flows and evaluate financial risks as well as how to communicate them towards the management.

We make numbers count

UNIQA 4WARD, organizačná zložka
UNIQA Insurance Group AG
Žižkova 7803/9, 811 02 Bratislava
www.uniqa4ward.com

5 INTEGRÁLNY POČET FUNKCIÍ JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ

5.1 Neurčitý integrál

5.1.1 Základné pojmy a vzťahy

Základnou úlohou diferenciálneho počtu funkcie jednej premennej je určiť funkciu f', ktorá je deriváciou danej funkcie f pre všetky x z nejakého intervalu I. Jednou zo základných úloh integrálneho počtu je k danej funkcii f nájsť takú funkciu F, ktorej derivácia je práve daná funkcia f.

Príklad 5.1.1 Nech je funkcia f daná predpisom $y = 3x^2$, $x \in R$. Ak chceme určiť funkciu F, ktorej deriváciou je daná funkcia f, tak z poznatkov diferenciálneho počtu vieme, že hľadanou funkciou F je napríklad funkcia $y = x^3$, $x \in R$. Ak zvolíme funkciu F tak, že sa od funkcie $y = x^3$ bude líšiť iba o nejakú konštantu, t. j. bude v tvare $y = x^3 + C$, $C \in R$, tak jej deriváciou je opäť funkcia $f : y = 3x^2$.

Definícia 5.1.1 Nech f a F sú dve funkcie, ktorých definičným oborom je otvorený interval I (môže byť aj neohraničený) a nech funkcia F má na tomto intervale deriváciu. Ak pre každé $x \in I$ platí, že $F'(x) = f(x)$, potom sa funkcia F nazýva ***primitívna funkcia*** k funkcii f na intervale I.

Príklad 5.1.2 Funkcia F: $y = x^4$ je na intervale $I = (-\infty, +\infty)$ primitívna funkcia k funkcii f: $y = 4x^3$, pretože

$$\forall x \in I : F'(x) = \left(x^4\right)' = 4x^3 .$$

Každá z funkcií tvaru $y = x^4 + C$, kde C je ľubovoľná konštanta, je takisto primitívna funkcia k funkcii f.

Túto vlastnosť zovšeobecňuje nasledujúca veta.

Veta 5.1.1 Ak F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I, tak platí:

a) Funkcia $F(x) + C$, kde C je ľubovoľná reálna konštanta, je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I,
b) každá primitívna funkcia sa dá zapísať v tvare $F(x) + C$.

Z vety vyplýva, že ak k danej funkcii f poznáme jednu primitívnu funkciu F na intervale I, tak vieme určiť nekonečne veľa primitívnych funkcií a všetky sa dajú vyjadriť v tvare $F(x) + C$.

Definícia 5.1.2 Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I nazývame ***neurčitý integrál*** funkcie f na intervale I a označujeme

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C,\ x \in I,\ C \in R .$$

Funkciu f nazývame ***integrand*** a číslo C je ***integračná konštanta***.

Poznámka 5.1.1 Postup, ktorým k danej funkcii f nájdeme jej neurčitý integrál, sa nazýva **integrovanie funkcie *f***. Výraz dx označuje podľa ktorej premennej budeme integrovať. Napríklad ak máme integrál $\int (a \cdot b + c)\,\mathrm{d}b$, znamená to, že integrujeme podľa premennej b a písmenká a a c chápeme ako konštanty.

Aj keď derivovanie a integrovanie spolu súvisia, techniky integrovania funkcií sú podstatne zložitejšie než techniky derivovania. V tejto publikácii sa sústredíme iba na základné integračné metódy.

Jednoducho môžeme odvodiť vzťahy pre určenie primitívnych funkcií niektorých elementárnych funkcií.

- Začneme s funkciou $f(x) = 0$. Ktorá funkcia bude po zderivovaní rovná nule? Vieme, že platí $c' = 0, c \in R$ a teda $\int 0 \ \mathrm{d}x = c$.
- Alebo máme funkciu $f(x) = 1$. Ktorá funkcia bude po zderivovaní rovná jednej? Vieme, že platí $x' = 1$ a teda $\int 1 \ \mathrm{d}x = x + C$.

Takto by sme mohli pokračovať a výsledkom by boli nasledujúce vzťahy, ktoré nazývame aj **tabuľkové neurčité integrály**. Tieto vzťahy platia v každom intervale, v ktorom sú obidve funkcie F a f spojité.

Veta 5.1.2 Pre integráciu elementárnych funkcií platia nasledujúce vzťahy:

V1 $\int k\ \mathrm{d}x = kx + C$ pre $k \in \mathrm{R}$,

V2 $\int x^a\ \mathrm{d}x = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$ pre $a \in \mathrm{R} \wedge a \neq -1$,

V3 $\int \dfrac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln|x| + C$

V4 $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

V5 $\int a^x\ \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ pre $a > 0$

V6 $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \ln\ |f(x)| + C$

V7 $\int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x + C$

V8 $\int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x + C$

V09 $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + C$

V10 $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{cotg}\, x + C$

V11 $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \arcsin\ x + C \\ -\arccos\ x + C \end{cases}$

V12 $\int \dfrac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{arctg}\ x + C \\ -\,\mathrm{arccotg}\ x + C \end{cases}$

V13 $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ \mathrm{d}x = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

V14 $\int \dfrac{1}{a^2 + x^2}\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$

Vzťahy platia pre tie intervaly, na ktorých sú integrované funkcie spojité.

O platnosti uvedených vzťahov sa môžeme presvedčiť derivovaním.

Veta 5.1.3 (*o integrovaní lineárnej kombinácie funkcií*) Nech pre $i = 1, 2, \ldots, n$ je $F_i(x)$ primitívna funkcia k funkcii f_i na intervale I. Potom funkcia

$$F(x) = k_1 F_1(x) + k_2 F_2(x) + \ldots + k_n F_n(x),$$

kde $k_i \in R$, je primitívna funkcia k funkcii

$$f(x)=k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\ldots+k_nf_n(x)$$

na intervale I, a teda

$$\int[k_1f_1+k_2f_2+\ldots+k_nf_n]\ \mathrm{d}x=k_1\int f_1\mathrm{d}x+k_2\int f_2\mathrm{d}x+\ldots+k_n\int f_n\mathrm{d}x=$$

$$=k_1F_1(x)+k_2F_2(x)+\ldots+k_nF_n(x)+C\ . \qquad (1)$$

Zo vzťahu (1) vyplýva, že integrál súčtu funkcií sa rovná súčtu integrálov jednotlivých funkcií a konštantu možno vyňať pred znak integrálu.

Použitie V1 – V14 a Vety 5.1.3 ukážeme na niekoľkých príkladoch. Budeme predpokladať, že všetky vykonávané operácie sa uskutočňujú na intervaloch, kde sú uvažované funkcie definované.

Integrand je väčšinou potrebné upraviť tak, aby bolo možné použiť niektorý zo vzťahov V1 - V14. Najčastejšie využívané operácie s racionálnymi číslami, mocniny reálnych čísel a úpravy algebrických výrazov si pripomenieme v *Poznámkach 5.1.2 – 5.1.*4 Podrobnejšie sa danej problematike venujú autori napríklad v publikácii Matematika, Požiadavky na prijímacie skúšky na EU v Bratislave.[1]

Poznámka 5.1.2 Úpravy zlomkov. Pre každé $a,c\in R$ a $b,d\in R-\{0\}$ platia nasledujúce vzťahy:

sčítanie a odčítanie	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$	delenie	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$
násobenie	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	zložený zlomok	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Poznámka 5.1.3 Mocniny a odmocniny. Pre každé $a\in R-\{0,1\}$, $r,s,m\in R$, $n\in R^+$, platia nasledujúce vzťahy:

$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n-\text{krát}}$	násobenie	$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$	$a^r\cdot b^r=(a\cdot b)^r$
$a^0=1$	delenie	$\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$	$\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r$
$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	umocňovanie	$(a^r)^s=a^{r\cdot s}$	
$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$	$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$		$\left(\frac{a}{b}\right)^{-r}=\left(\frac{b}{a}\right)^r$

Poznámka 5.1.4 Mnohočleny. Pre každé $a,b\in R$ platia nasledujúce vzťahy:

$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^2$	$a^3\mp b^3=(a\mp b)(a^2\pm ab+b^2)$

---

[1] 1. FECENKO, J. – ONDREJKOVÁ KRČOVÁ, I. – MUCHA, V. – ŠOLTÉSOVÁ, T. (2015) *Matematika, Požiadavky na prijímacie skúšky na EU v Bratislave.* Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM. ISBN 978-80-225-4152-7.

Príklad 5.1.3 Vypočítajme neurčitý integrál $\int (x^3 + 2x^2 - 7x + e^2)\,\mathrm{d}x$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Riešenie: Podľa vety 5.1.3, V1 a V2 platí:

$$\int (x^3 + 2x^2 - 7x + e^2)\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x + 2\int x^2\,\mathrm{d}x - 7\int x\,\mathrm{d}x + e^2\int 1\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 7\frac{x^2}{2} + e^2 x + C.$$

Integračnú konštantu C, ktorá je súčtom konštánt z jednotlivých integrálov, pripisujeme až na konci po vypočítaní všetkých primitívnych funkcií. O správnosti výsledku sa môžeme presvedčiť skúškou, t. j. derivovaním výsledku.

Príklad 5.1.4 Vypočítajme neurčitý integrál $\int (3\sqrt{x} + \frac{10}{\sqrt[3]{x}} - \frac{8}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}})\,\mathrm{d}x$, $x \in (0, \infty)$.

Riešenie: Podľa vety 5.1.3, V1 a V2 platí:

$$\int (3\sqrt{x} + \frac{10}{\sqrt[3]{x}} - \frac{8}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}})\,\mathrm{d}x = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + 10\int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x - 8\int x^{-\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 10 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - 8 \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C = 2\sqrt{x^3} + 15\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{\sqrt[3]{x^2}} + C.$$

Príklad 5.1.5 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{x^4 + 3x^2 - 8x + 6\sqrt{x} - 5}{x^3}\,\mathrm{d}x$, $x \in R - \{0\}$.

Riešenie: Integrand je podielom dvoch funkcií, ale integrál z podielu dvoch funkcií sa nerovná podielu integrálov z týchto funkcií. Danú funkciu treba najprv upraviť tak, že čitateľa integrandu delíme menovateľom integrandu:

$$\frac{x^4 + 3x^2 - 8x + 6\sqrt{x} - 5}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{8x}{x^3} + \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{x^3} - \frac{5}{x^3} =$$

$$= x + \frac{3}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{6}{\sqrt{x^5}} - \frac{5}{x^3}.$$

A teda

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 8x + 6 \cdot \sqrt{x} - 5}{x^3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int x\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - 8\int x^{-2}\mathrm{d}x + 6\int x^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x - 5\int x^{-3}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3\ln x - 8 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 6 \cdot \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} - 5 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3\ln x + 8 \cdot \frac{1}{x} - 4 \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C.$$

Príklad 5.1.6 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x}\,\mathrm{d}x\,,\ x \in (-\infty, \infty)$.

Riešenie: Podľa vety 5.1.3 a V5 platí:

$$\frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x} = \frac{(2^x)^2 - 2\cdot 2^x 3^x + (3^x)^2}{6^x} = \frac{4^x - 2\cdot 6^x + 9^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^x,$$

$$\int\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^x\right]\mathrm{d}x = \int\left(\frac{2}{3}\right)^x \mathrm{d}x - 2\int 1\ \ \mathrm{d}x + \int\left(\frac{3}{2}\right)^x \mathrm{d}x = = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} - 2x + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}} + C.$$

Príklad 5.1.7 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \left(2e^x + 5\cos x - \sin x\right)\mathrm{d}x\,,\ x \in (-\infty, \infty)$.

Riešenie: Podľa vety 5.1.3, V4, V6 a V7 platí:

$$\int \left(2e^x + 5\cos x - \sin x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int e^x \mathrm{d}x + 5\int \cos x\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2e^x + 5\sin x + \cos x + C\,.$$

Príklad 5.1.8 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x\,,\ x \in R - \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$.

Riešenie: Podľa vety 5.1.3, V1 a V8 platí:

Platí, že $\mathrm{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, a teda

$$\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\ \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x - x + C\,.$$

Príklad 5.1.9 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{d}x\,,\ x \in R - \{k\pi\}$.

Riešenie: Integrand upravíme, $\mathrm{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$ a podľa V6 platí:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \ln\left|\sin x\right| + C\,.$$

Príklad 5.1.10 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{2x^2}{27 - x^3}\mathrm{d}x\,,\ x \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

Riešenie: Táto úloha je opäť určená na použitie V6:

$$\int \frac{2x^2}{27 - x^3}\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\cdot\int \frac{-3x^2}{27 - x^3}\ \mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\cdot\ln\left|27 - x^3\right| + C\,.$$

Príklad 5.1.11 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{x^3+3x^2-x+6}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $x \in (-\infty,\infty)$.

Riešenie: Integrand treba najskôr vhodne upraviť, budeme deliť čitateľa menovateľom, potom okrem iného využijeme V6 a V12. Dostaneme

$$\frac{x^3+3x^2-x+6}{1+x^2} = x+3-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{3}{1+x^2}\text{, a teda}$$

$$\int \frac{x^3+3x^2-x+6}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(x+3-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{3}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int x\,\mathrm{d}x + \int 3\,\mathrm{d}x - \int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+3x-\ln\left|1+x^2\right|+3\operatorname{arctg} x + C\,.$$

Poznámka 5.1.5 Zlomok v Príklade 5.1.11 je podielom dvoch polynomických funkcií. Riešeniu príkladov tohto typu sa širšie venujeme v kapitole 5.1.4 o integrovaní racionálnych funkcií.

ÚLOHY

V úlohách 5.1.1 až 5.1.9 vypočítajte neurčité integrály na intervaloch, v ktorých existujú. Vzťahy V1 a V2 je zvyčajne potrebné využiť vo všetkých úlohách. Niektoré výrazy je potrebné najprv upraviť.

5.1.1 Integrujte pomocou vety 5.1.3 a V1, V2.

a) $\int x^{10}\,\mathrm{d}x$

b) $\int (x^7-10)\,\mathrm{d}x$

c) $\int (x^3-x^5+1)\,\mathrm{d}x$

d) $\int (2x^5-3x^6-4x)\,\mathrm{d}x$

e) $\int (2x^3-x^{11})\,\mathrm{d}x$

f) $\int \left(\frac{5}{4}x^4-\frac{13}{6}x^{12}+3\right)\mathrm{d}x$

5.1.2 Integrujte pomocou vety 5.1.3 a V1, V2.

a) $\int (5x^2-4x+10)\,\mathrm{d}x$

b) $\int \left(\frac{x^3}{2}+15x^4+e^2\right)\mathrm{d}x$

c) $\int \left(3\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)\mathrm{d}x$

d) $\int (x^2+7\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x$

e) $\int \left(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$

f) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

g) $\int \left(\sqrt{x^3}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{5}\right)\mathrm{d}x$

h) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

i) $\int x\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

j) $\int \sqrt{x\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$

5.1.3 Integrujte pomocou vety 5.1.3 a V1, V2.

a) $\int (1-3x)\cdot\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int (x-2)(4-x)\,\mathrm{d}x$

c) $\int (x^2-2)(x^3+1)\,\mathrm{d}x$

d) $\int (x^3-1)^2\,\mathrm{d}x$

e) $\int x(x-4)^2\,\mathrm{d}x$

f) $\int (x-1)^3\,\mathrm{d}x$

5.1.4 Integrujte pomocou vety 5.1.3 a V1, V2. Niektoré výrazy je potrebné najprv upraviť.

a) $\int (2x+\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{3+7x^2+x^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{(x-1)(x+3)}{x^4}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{x^2-2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

5.1.5 Integrujte pomocou vety 5.1.3 a V4, V5. Niektoré výrazy je potrebné najprv upraviť.

a) $\int (e^x-4)\,\mathrm{d}x$

b) $\int (e^x-e^3)\,\mathrm{d}x$

c) $\int 5^x e^x\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{15^x}{5^x}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{15^x-9^x}{3^x}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{(3^x+4^x)^2}{12^x}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \left(2^x+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)\mathrm{d}x$

h) $\int \left(2e^x+\ln 2\right)\mathrm{d}x$

i) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

5.1.6 Integrujte pomocou vety 5.1.3 a V3. Niektoré výrazy je potrebné najprv upraviť.

a) $\int \left(\frac{1}{x}+12\right)\mathrm{d}x$

b) $\int \left(\sqrt{\frac{1}{x}}+12\right)\mathrm{d}x$

c) $\int \left(\frac{12}{x}+3\right)\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{3}{4x}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \left(x-\frac{3}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$

5.1.7 Integrujte pomocou vety 5.1.3 a V6.

a) $\int \frac{2x}{9+x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{x}{9+x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x^3}{x^4+8}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{2x^3}{8-x^4}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{-1}{3x\ln x}\,\mathrm{d}x$

5.1.8 Integrujte pomocou vety 5.1.3 a V6 – V14. Niektoré výrazy je potrebné najprv upraviť.

a) $\int (\sin x-3\cos x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{\cos x}{10+\sin x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{\sin x}{2+5\cdot\cos x}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{5}{x^2+16}\,\mathrm{d}x$

g) $\int (\mathrm{cotg}^2 x)\,\mathrm{d}x$

h) $\int \frac{3}{2x^2+16}\,\mathrm{d}x$

i) $\int \frac{2x+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

j) $\int \frac{x^3-5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

k) $\int \frac{-\ln 5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

l) $\int \frac{1-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$

m) $\int \mathrm{tg}3x\ \mathrm{d}x$

n) $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\,\mathrm{d}x$

5.1.9 Dokážte, že dané funkcie *F* a *G* sú primitívne funkcie k tej istej funkcii, ak:

a) $F(x)=2\cos^2 x,\ G(x)=\cos 2x$

b) $F(x)=-2\mathrm{arctg}\,x,\ G(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

Výsledky

5.1.1 **a)** $\frac{x^{11}}{11}+C$ **b)** $\frac{x^8}{8}-10x+C$ **c)** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+x+C$

d) $\frac{x^6}{3}+3\frac{x^7}{7}-2x^2+C$ **e)** $\frac{x^4}{2}-\frac{x^{12}}{12}+C$ **f)** $\frac{x^5}{4}-\frac{x^{13}}{6}+3x+C$

5.1.2 **a)** $\frac{5}{3}x^3-2x^2+10x+C$ **b)** $\frac{x^4}{8}+3x^5+e^2x+C$ **c)** $2x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

d) $\frac{x^3}{3}+4x^{\frac{7}{4}}-3x^{\frac{4}{3}}+C$ **e)** $\frac{-2}{x}+\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$ **f)** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}+C$

g) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{5}x+C$ **h)** $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C$ **i)** $\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}+C$

j) $\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}+C$

5.1.3 **a)** $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$ **b)** $-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x+C$

c) $\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-2x+C$ **d)** $\frac{x^7}{7}-\frac{x^4}{2}+x+C$ **e)** $\frac{x^4}{4}-\frac{8}{3}x^3+8x^2+C$

f) $\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+C$

5.1.4 **a)** $\frac{4}{3}x^3+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{2}+C$ **b)** $\frac{-3}{x}+7x+\frac{x^2}{2}+C$ **c)** $\frac{-1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+C$

d) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+C$ **e)** $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

f) $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

Wondershare PDFelement

5.1.5 **a)** $e^x - 4x + C$ **b)** $e^x - e^3 x + C$ **c)** $\frac{(5e)^x}{\ln 5e} + C$

d) $\frac{3^x}{\ln 3} + C$ **e)** $\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{3^x}{\ln 3} + C$

f) $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln\frac{3}{4}} + 2x + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln\frac{4}{3}} + C$ **g)** $\frac{2^x}{\ln 2} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$ **h)** $2e^x + x \cdot \ln 2 + C$

i) $e^x - \frac{1}{x} + C$

5.1.6 **a)** $\ln x + 12x + C$ **b)** $2x^{\frac{1}{2}} + 12x + C$ **c)** $12\ln x + 3x + C$

d) $\frac{3}{4}\ln x + C$ **e)** $\frac{x^3}{3} - 6x - \frac{9}{x} + C$

5.1.7 **a)** $\ln\left|9 + x^2\right| + C$ **b)** $\frac{1}{2}\ln\left|9 + x^2\right| + C$ **c)** $\frac{1}{4}\ln\left|8 + x^4\right| + C$

d) $-\frac{1}{2}\ln\left|8 - x^4\right| + C$ **e)** $\ln\left|\ln x\right| + C$ **f)** $-\frac{1}{3}\ln\left|\ln x\right| + C$

5.1.8 **a)** $-\cos x - 3\sin x + C$ **b)** $-\ln\left|\cos x\right| + C$ **c)** $\ln\left|10 + \sin x\right| + C$

d) $-\frac{1}{5}\ln\left|2 + 5\cos x\right| + C$ **e)** $\operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x) + C$ **f)** $\frac{5}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C$

g) $-\operatorname{cotg}(x) - x + C$ **h)** $\frac{3\sqrt{8}}{16} \cdot \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8}x}{8} + C$

i) $\ln\left|x^2 + 4\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$ **j)** $\frac{x^2}{2} - 2\ln\left|x^2 + 4\right| - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$

k) $-\ln 5 \cdot \arcsin x + C$ **l)** $\arcsin\frac{x}{2} + \ln\sqrt{4 - x^2} + C$

m) $-\frac{1}{3}\ln\left|\cos x\right| + C$ **n)** $\ln\left|\sin x\right| - \ln\left|\cos x\right| + C$

5.1.9 **a)** $F'(x) = G'(x) = -4\sin x\cos x = -2\sin 2x$

b) $F'(x) = G'(x) = -\frac{2}{1 + x^2}$

Neurčité integrály počítame tak, že ich vhodným spôsobom upravíme, aby bolo možné použiť vzťahy z vety 5.1.2. Ako sme sa mohli v predchádzajúcej kapitole presvedčiť, niekedy je to jednoduché, inokedy je to komplikované, ale niekedy je to aj nemožné. Na počítanie neurčitých integrálov neexistuje univerzálne pravidlo, potrebná je určitá skúsenosť a znalosť postupov, o ktorých vieme, že vedú k cieľu.

Okrem základných vzťahov pre neurčité integrály z vety 5.1.2 sme v predchádzajúcej kapitole na dosiahnutie cieľa využívali vetu 5.1.3 o integrovaní lineárnej kombinácie funkcií. V nasledujúcich podkapitolách uvedieme spôsob použitia substitučnej metódy (integrácia súčinu funkcií) a metódy per partes.

5.1.2 Substitučná metóda

Substitučná metóda je odvodená zo vzťahu pre deriváciu zloženej funkcie. Je jednou z najdôležitejších a najpoužívanejších integračných metód. Doteraz sa však derivovali len funkcie, ktoré sme vedeli jednoducho upraviť a potom zderivovať podľa odvodených vzťahov. Substitučná metóda umožní integrovať veľkú skupinu zložených funkcií. Veľmi často sa ale vyskytujú integrály typu

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

alebo integrály, ktoré sa dajú na tento tvar upraviť.

Taký tvar má napríklad aj integrál $\int 3x^2 \cdot e^{x^3}\,\mathrm{d}x$. Všimnime si, že integrand je súčinom dvoch funkcií $f(g(x))$ a $g'(x)$. Prvá z nich je zložená funkcia s vonkajšou zložkou f a vnútornou zložkou g. Druhá z nich je derivácia vnútornej zložky g. V tomto prípade $f(t) = e^t$, $t = g(x) = x^3$, takže $g'(x) = 3x^2$.

Tieto vlastnosti integrandu a veta o derivácii zloženej funkcie umožnia vypočítať integrál (2) na intervale (a,b), ak budeme vedieť vypočítať integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ na intervale (α,β).

Veta 5.1.4 Nech funkcia F je primitívna funkcia k f na intervale (α,β). Nech pre funkciu $g: t = g(x)$ existuje derivácia $g'(x)$ pre všetky $x \in (a,b)$ a nech pre každé $x \in (a,b)$ je $t \in (\alpha,\beta)$. Potom na intervale (a,b) zložená funkcia $F(g)$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(g)\cdot g'$, t. j.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C\,. \tag{3}$$

Vhodné je pamätať si vetu 5.1.4 v tomto tvare:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \text{substitúcia} \\ t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C\,,$$

kde pre x a t musia byť splnené predpoklady vety.

Príklad 5.1.12 Vypočítajme neurčitý integrál $\int 3x^2 \cdot e^{x^3}\,\mathrm{d}x$, $x \in (-\infty,\infty)$.

Riešenie: Integrand je súčinom dvoch funkcií. Funkcia $\cos(x^2+4)$ je zložená funkcia s vonkajšou zložkou $f: y = e^t$ a vnútornou zložkou $g: t = x^3$. Funkcia $3x^2$ je derivácia

vnútornej zložky g. Na intervale $(-\infty,\infty)$ má funkcia $g(x)=x^3$ deriváciu $g'(x)=3x^2$ a $\forall \in (-\infty,\infty)$ platí $g(x)=x^3 \in (-\infty,\infty)$.

Teda intervaly z vety 5.1.4 sú: $(a,b)=(-\infty,\infty)$ a $(\alpha,\beta)=(-\infty,\infty)$. Pretože sú splnené predpoklady vety 5.1.4, môžeme použiť substitúciu $t=x^3$. Substitučný vzťah budeme diferencovať podľa príslušných premenných a dostaneme diferenciál $\mathrm{d}t=3x^2\,\mathrm{d}x$. Po dosadení dostávame

$$\int 3x^2\cdot e^{x^3}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}t=x^3\\ \mathrm{d}t=3x^2\,\mathrm{d}x\end{matrix}\right|=\int e^t\,\mathrm{d}t=e^t+C=e^{x^3}+C.$$

Derivovaním sa môžeme presvedčiť o správnosti výsledku.

V ďalších príkladoch budeme postupovať rýchlejšie a nebudeme vždy overovať splnenie Vety 5.1.4 a ani uvádzať interval *I*, ktorého sa výpočet týka.

Príklad 5.1.13 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Na intervale $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ platí:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}t=1+2x\\ \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C \quad =\sqrt{t}+C=$$

$$=\sqrt{1+2x}+C\quad .$$

Príklad 5.1.14 Vypočítajme neurčitý integrál $\int 7^{2x-3}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie $\int 7^{2x-3}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}t=2x-3\\ \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\int 7^t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{7^t}{\ln 7}+C=\frac{7^{2x-3}}{2\ln 7}+C$.

Príklad 5.1.15 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{1}{3}x\cdot e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Integrand najprv upravíme na požadovaný tvar (2) a potom použijeme substitúciu:

$$\int \frac{1}{3}xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int -2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}t=-x^2\\ \mathrm{d}t=-2x\quad \mathrm{d}x\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int e^t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{6}e^{-x^2}+C.$$

Príklad 5.1.16 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x=\int \frac{x^2}{1+\left(x^3\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cdot\int \frac{3x^2}{1+\left(x^3\right)^2}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}t=x^3\\ \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+C.$$

Príklad 5.1.17 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}\,\mathrm{d}x$, $x \in \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Riešenie: $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cdot\int \frac{x^2\cdot(-4x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} t = 1-2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(1-t) \\ \mathrm{d}t = -4x\ \ \mathrm{d}x \end{array}\right| = -\frac{1}{8}\cdot\int \frac{1-t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t =$

$= -\frac{1}{8}\cdot\int\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\cdot\int\left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{12}\sqrt{t^3} - \frac{1}{4}\sqrt{t} + C =$

$= \frac{1}{12}\sqrt{(1-x^2)^3} - \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} + C$.

Príklad 5.1.18 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}\,x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Integrand je súčinom dvoch funkcií $\sqrt{\mathrm{arctg}x}$ a $\frac{1}{1+x^2}$. Prvá z nich je zložená funkcia s vonkajšou zložkou $f: y = \sqrt{t}$, $t \in \langle 0, \infty)$ a s vnútornou zložkou g: $g: t = \mathrm{arctg}\,x$, $x \in \langle 0, \infty)$. Druhá z nich $\frac{1}{1+x^2}$ je derivácia vnútornej zložky g. Potom podľa vety 5.1.4 platí:

$$\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}\,x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\mathrm{arctg}\,x}\,\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} t = \mathrm{arctg}\,x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\ \ \mathrm{d}x \end{array}\right| = \int \sqrt{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}t = \int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{arctg}^3 x} + C.$$

ÚLOHY

V úlohách 5.1.10 až 5.1.16 vypočítajte neurčité integrály.

5.1.10 **a)** $\int \frac{2}{x-3}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{3-5x}$ **c)** $\int \frac{2x}{x^2-66}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{5x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x$ **e)** $\int \frac{x^2}{1-3x^3}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\int \frac{2x+5}{x^2+5x-6}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{2x^4}{x^5+1}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\int \frac{2x^3}{x^4+10}\,\mathrm{d}x$

5.1.11 **a)** $\int (4x+3)^3\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int \sqrt{2x+5}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int \sqrt{3-4x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{1}{(5+3x)^7}\,\mathrm{d}x$ **e)** $\int \frac{5}{\sqrt[3]{1-6x}}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\int \frac{3}{\sqrt{(5-2x)^3}}\,\mathrm{d}x$

5.1.12 **a)** $\int x\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int 2x\sqrt{2x^2+6}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int (x-2)\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\int x^2 \sqrt[3]{6-x^3}\,dx$ **e)** $\int \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x^4+4}}dx$ **f)** $\int x(3x^2-4)^5\,dx$

g) $\int \frac{x}{(x^2-4)^3}\,dx$ **h)** $\int x^2(5-2x^3)^3\,dx$ **i)** $\int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

5.1.13 **a)** $\int e^{-2x+3}dx$ **b)** $\int \frac{1}{5^{-2x+7}}\,dx$ **c)** $\int xe^{x^2}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$ **e)** $\int 5x^2e^{x^3-2}\,dx$ **f)** $\int \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

g) $\int -\frac{e^{\frac{10}{x}}}{x^2}\,dx$ **h)** $\int \frac{e^{2x}}{4+e^x}\,dx$

5.1.14 **a)** $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ **b)** $\int \frac{\ln^4 x}{x}\,dx$ **c)** $\int \frac{-5}{x\ln x}\,dx$

d) $\int \frac{\ln 5x}{x}\,dx$ **e)** $\int \frac{1}{x+x\ln x}\,dx$ **f)** $\int \frac{dx}{x\cdot \ln^3 x}\,dx$

g) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$ **h)** $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln 3x}}\,dx$ **i)** $\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

5.1.15 **a)** $\int \sin\left(\frac{3x-5}{2}\right)dx$ **b)** $\int \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x-2}{3}\right)}\,dx$ **c)** $\int \operatorname{cotg}(5x+9)\,dx$

d) $\int \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}\,dx$ **e)** $\int 3x\sin 2x^2 dx$ **f)** $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$

g) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$ **h)** $\int e^{\cos^2 x}\cdot \sin 2x\,dx$ **i)** $\int \frac{1}{\cos^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{tg}x-1}}\,dx$

j) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}\,dx$ **k)** $\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **l)** $\int \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,dx$

5.1.16 **a)** $\int \frac{1}{9+(x+4)^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+25}\,dx$ **c)** $\int \frac{1}{x^2-6x+25}\,dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{9-(x+1)^2}}\,dx$ **e)** $\int \frac{1}{\sqrt{25-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx$ **f)** $\int \frac{5}{\sqrt{-x^2-4x+12}}\,dx$

g) $\int \frac{3}{4x^2+24x+100}\,dx$ **h)** $\int \frac{1}{\sqrt{-3x^2+12x+15}}\,dx$ **i)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$

j) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **k)** $\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx$

Wondershare PDFelement

Výsledky

(pred výsledkom je vždy uvedená substitúcia)

5.1.10

a) $t = x-3,\ 2\ln|x-3|+C$

b) $t = 3-5x,\ -\frac{1}{5}\ln|3-5x|+C$

c) $t = x^2-66,\ \ln|x^2-66|+C$

d) $t = 3x^2+5,\ \frac{5}{6}\ln|3x^2+5|+C$

e) $t = 1-3x^3,\ -\frac{1}{9}\ln|1-3x^3|+C$

f) $t = x^2+5x-6,\ \ln|x^2+5x-6|+C$

g) $t = x^5+1,\ \frac{2}{5}\ln|x^5+1|+C$

h) $t = x^4+10,\ \frac{1}{2}\ln|x^4+10|+C$

5.1.11

a) $t = 4x+3,\ \frac{1}{16}(4x+3)^4+C$

b) $t = 2x+5,\ \frac{1}{3}\sqrt{(2x+5)^3}+C$

c) $t = 3-4x,\ -\frac{1}{6}\sqrt{(3-4x)^3}+C$

d) $t = 5+3x,\ -\frac{1}{18(5+3x)^6}+C$

e) $t = 1-6x,\ -\frac{5}{4}\sqrt[3]{(1-6x)^2}+C$

f) $t = 5-2x,\ \frac{3}{\sqrt{5-2x}}+C$

5.1.12

a) $t = x^2+9,\ \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+9)^3}+C$

b) $t = 2x^2+6,\ \frac{1}{3}\sqrt{(2x^2+6)^3}+C$

c) $t = 4x-x^2,\ -\frac{1}{3}\sqrt{(4x-x^2)^3}+C$

d) $t = 6-x^3,\ -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(6-x^3)^4}+C,$

e) $t = x^4+4,\ \frac{9}{8}\sqrt[3]{(x^4+4)^2}+C$

f) $t = 3x^2-4,\ \frac{1}{36}(3x^2-4)^6+C$

g) $t = x^2-4,\ -\frac{1}{4(x^2-4)^2}+C$

h) $t = 5-2x^3,\ -\frac{(5-2x^3)^4}{24}+C$

i) $t = 4-x^2,\ -16\sqrt{4-x^2}+\frac{8}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}-\frac{1}{5}\sqrt{(4-x^2)^5}+C$

5.1.13

a) $t = -2x+3,\ -\frac{1}{2}e^{-2x+3}+C$

b) $t = 2x-7,\ \frac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{2x-7}+C$

c) $t = x^2,\ \frac{1}{2}e^{x^2}+C$

d) $t = \frac{1}{x},\ -e^{\frac{1}{x}}+C$

e) $t = x^3-2,\ \frac{5}{3}e^{x^3-2}+C$

f) $t = 1+\sqrt{x},\ 2e^{1+\sqrt{x}}+C$

g) $t = \frac{10}{x},\ \frac{1}{10}e^{\frac{10}{x}}+C$

h) $t = 4+e^x,\ 4+e^x-4\ln(4+e^x)+C$

5.1.14

a) $t = \ln x,\ \ln|\ln x|+C$

b) $t = \ln x,\ \frac{\ln^5 x}{5}+C$

c) $t = \ln x,\ -5\ln|\ln x|+C$

d) $t = \ln 5x,\ \frac{\ln^2 5x}{2}+C$

e) $t = 1+\ln x,\ \ln|1+\ln x|+C$

f) $t = \ln x,\ -\frac{1}{2\ln^2 x}+C$

Wondershare PDFelement

g) $t = 1 + \ln x$, $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$ **h)** $t = \ln 3x$, $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\ln 3x)^2} + C$

i) $t = \ln x$, $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} - 6\sqrt{\ln x} + C$

5.1.15 **a)** $t = \frac{3x-5}{2}$, $-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3x-5}{2}\right) + C$ **b)** $t = \frac{x-2}{3}$, $-3\operatorname{cotg}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$

c) $t = 5x + 9$, $\frac{1}{5}\ln\left|\sin(5x+9)\right| + C$ **d)** $t = \frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{x^2} + C$

e) $t = 2x^2$, $-\frac{3}{4}\cos 2x^2 + C$ **f)** $t = \frac{1}{x}$, $-\sin\frac{1}{x} + C$

g) $t = \sin x$, $3\sqrt[3]{\sin x} + C$ **h)** $t = \cos^2 x$, $-e^{\cos^2 x} + C$

i) $t = \operatorname{tg} x - 1$, $2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$ **j)** $t = \cos x$, $-\frac{5}{3}\sqrt[5]{\cos^3 x} + C$

k) $t = \sqrt{x}$, $-2\ln\left|\cos\sqrt{x}\right| + C$ **l)** $t = \ln\operatorname{arctg} x$, $\frac{\ln^2 \operatorname{arctg} x}{2} + C$

5.1.16 **a)** $t = x + 4$, $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$ **b)** $t = \frac{x}{3}$, $\frac{3}{5}\arcsin\frac{x}{15} + C$

c) $t = x - 3$, $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{4} + C$ **d)** $t = x + 1$, $\arcsin\frac{x+1}{3} + C$

e) $t = \frac{x}{3}$, $3\arcsin\frac{x}{15} + C$ **f)** $t = x + 2$, $5\arcsin\frac{x+2}{4} + C$

g) $t = x + 3$, $\frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4} + C$ **h)** $t = x - 2$, $\frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{x-2}{3} + C$

i) $t = x^3$, $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C$ **j)** $t = 1 - x^2$, $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$

k) $t = 2^x$, $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg} 2^x + C$

5.1.3 Metóda per partes

Z vety o derivovaní súčinu dvoch funkcií vyplýva nasledujúca veta.

Veta 5.1.5 Ak funkcie u, v majú na intervale (a,b) spojité derivácie, tak na intervale (a,b) platí:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x \qquad (4)$$

Príklad 5.1.19 Vypočítame neurčitý integrál $\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Ak položíme $u = x^2$ a $v' = \ln x$, tak $u' = 2x$ bude polynóm nižšieho stupňa, ale neurčitý integrál $v = \int \ln x\,\mathrm{d}x$ nepatrí medzi tabuľkové integrály a nepomôže nám ani substitúcia.

Vyberme funkcie u a v' opačne.

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = x^2 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Príklad 5.1.20 Vypočítajme neurčitý integrál $\int (x-5)\cdot 2^x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: $\int (x-5)\cdot 2^x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x-5 & v' = 2^x \\ u' = 1 & v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{vmatrix} = (x-5)\cdot\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,\mathrm{d}x =$

$$= (x-5)\cdot\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C = \left(x - 5 - \frac{1}{\ln 2}\right)\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

Príklad 5.1.21 Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int x\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & v' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ u' = 1 & v = \mathrm{tg}x \end{vmatrix} = x\,\mathrm{tg}x - \int \mathrm{tg}x\,\mathrm{d}x =$

$$= x\,\mathrm{tg}x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{tg}x + \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{tg}x + \ln\left|\cos x\right| + C.$$

Poznámka 5.1.6 Niekedy treba použiť na integrovanie metódu per partes opakovane ako napríklad v nasledujúcom príklade.

Príklad 5.1.22 Vypočítame neurčitý integrál $\int (x^2 - x)e^{-x}\mathrm{d}x$.

Riešenie: $\int (x^2 - x)e^{-x}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x^2 - x & v' = e^{-x} \\ u' = 2x - 1 & v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$

$$= -(x^2 - x)e^{-x} + \int (2x-1)\cdot e^{-x}\mathrm{d}x = -(x^2 - x)e^{-x} + I_1.$$

Na výpočet integrálu $I_1 = \int (2x-1)e^{-x}\mathrm{d}x$ použime ešte raz metódu per partes:

$$I_1 = \int (2x-1)e^{-x}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = 2x-1 & v' = e^{-x} \\ u' = 2 & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| = -(2x-1)e^{-x} + 2\int e^{-x}\mathrm{d}x =$$

$$= -(2x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C\,.$$

Teda konečným výsledkom integrovania je:

$$\int (x^2 - x)e^{-x}\mathrm{d}x = -(x^2-x)e^{-x} + \left(-e^{-x}\left(2x-1\right) - 2e^{-x}\right) + C =$$

$$= \left(-x^2 - x - 1\right)e^{-x} + C\,.$$

Príklad 5.1.23 Vypočítame neurčitý integrál $\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Riešenie: Položme $u(x) = x$ a $v'(x) = \cos 2x$. Potom $u'(x) = 1$ a $v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Keďže predpoklady vety 5.1.5 sú splnené, platí:

$$\int x \cdot \cos 2x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & v' = \cos 2x \\ u' = 1 & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}x\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C\,.$$

Ak by sme funkcie u a v' zvolili opačne, t.j. $u(x) = \cos 2x$ a $v'(x) = x$, dostali by sme:

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \cos 2x & v' = x \\ u' = -2\sin 2x & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\cos 2x + \int x^2 \sin 2x\,\mathrm{d}x\,,$$

kde posledný integrál je zložitejší ako pôvodný, a teda tento výber by nás k riešeniu nedoviedol.

V ďalších príkladoch budeme postupovať rýchlejšie a nebudeme vždy overovať splnenie vety 5.1.5 a ani uvádzať interval I, ktorého sa výpočet týka.

Príklad 5.1.24 Vypočítame neurčitý integrál $\int (3x+2)\sin x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: $\int (3x+2)\sin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = 3x+2 & v' = \sin x \\ u' = 3 & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -(3x+2)\cdot\cos x + 3\int \cos x\,\mathrm{d}x =$

$$= -(3x+2)\cos x + 3\sin x + C\,.$$

Príklad 5.1.25 Vypočítajme neurčitý integrál $\int x\,\mathrm{arctg}x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Podobne ako v príklade 5.1.19 by sme zistili, že výber $u = x$, $v' = \mathrm{arctg}x$ nám nedáva želaný výsledok. Preto počítajme takto:

$$\int x\,\mathrm{arctg}x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{arctg}x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrand $\frac{x^2}{x^2+1}$ upravíme:

$$\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int x\,\mathrm{arctg}x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\cdot\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}(x-\mathrm{arctg}x)+C=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}x+C\,.$$

Príklad 5.1.26 Vypočítajme neurčitý integrál $\int\ln x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: $\int\ln x\,\mathrm{d}x=\int 1\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}u=\ln x & v'=1\\ u'=\frac{1}{x} & v=x\end{matrix}\right|=x\ln x-\int 1\ \ \mathrm{d}x=x\ln x-x+C\,.$

Príklad 5.1.27 Vypočítajme neurčitý integrál $\int\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: $\int\arcsin x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}u=\arcsin x & v'=1\\ u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v=x\end{matrix}\right|=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \ \mathrm{d}x=$

$$=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\,,$$

kde integrál $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ sme vypočítali metódou substitúcie $\left|\begin{matrix}t=1-x^2\\ \mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x\end{matrix}\right|$.

Príklad 5.1.28 Vypočítajme neurčitý integrál $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: $\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}u=e^x & v'=\sin x\\ u'=e^x & v=-\cos x\end{matrix}\right|=e^x\cdot(-\cos x)+\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=e^x\cdot(-\cos x)+I_1\,.$

Metódu per partes použijeme ešte raz.

$$I_1=\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}u=e^x & v'=\cos x\\ u'=e^x & v=\sin x\end{matrix}\right|=e^x\sin x+\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Týmto dostávame

$$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=e^x\cdot(-\cos x)+(e^x\sin x+\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x)$$

$$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$$

Zdanlivo sme takýmito úpravami nič nedosiahli. Integrál na pravej strane je ale ten istý ako daný integrál. Posledný vzťah je rovnica, ktorej neznámou je daný integrál. Z tejto rovnice dostaneme:

$$2\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=e^x\sin x-e^x\cos x\,,$$

a teda $\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$.

Poznámka 5.1.7 Pri počítaní integrálov vieme využiť aj vhodný softvér. Vzhľadom na to, že aktuálne je dôležitý aj postup riešenie, softvér môžeme využiť iba na kontrolu výsledku. Pre jednoduchosť ovládania je vhodné použiť napríklad voľne dostupný MS Mathematics. Vypočítajme neurčitý integrál $\int \ln x \, dx$, $x \in (0, \infty)$ použitím MS Mathematics.



Analogicky je možné MS Mathematics využiť aj pri počítaní neurčitých a nevlastných integrálov, s ktorými sa zoznámime v nasledujúcich kapitolách.

ÚLOHY

V úlohách 5.1.17 až 5.1.21 vypočítajte neurčité integrály.

5.1.17 **a)** $\int xe^x \, dx$ **b)** $\int x 2^x \, dx$ **c)** $\int xe^{2x} \, dx$

d) $\int x e^{-4x} dx$ **e)** $\int (5x+2) 2^x \, dx$ **f)** $\int x^2 e^x \, dx$

g) $\int x^2 2^x \, dx$ **h)** $\int x^2 3^{-2x} \, dx$

5.1.18 **a)** $\int \ln x \, dx$ **b)** $\int x \ln x \, dx$ **m)** $\int x^3 \ln x \, dx$

d) $\int x \ln(x^2+1) \, dx$ **e)** $\int x \ln^2 x \, dx$ **f)** $\int 18x^2 \ln(x-1) dx$

g) $\int \frac{1-\ln x}{x^2} dx$ **h)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ **i)** $\int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$

5.1.19 **a)** $\int x \sin x \, dx$ **b)** $\int (2x-5) \sin 3x \, dx$ **c)** $\int (x^2-7) \cos x \, dx$

d) $\int (2x-7)\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **e)** $\int x\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\int \dfrac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \dfrac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\int \dfrac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ **i)** $\int x^7\cos x^4\,\mathrm{d}x$

5.1.20 **a)** $\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int 3^x\cos x\,\mathrm{d}x$ **e)** $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$

5.1.21 **a)** $\int \mathrm{arccotg}\,x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int \mathrm{arccotg}\,2x\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int \arccos x\,\mathrm{d}x$

d) $\int \arcsin 3x\,\mathrm{d}x$ **e)** $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$ **f)** $\int \mathrm{x}^2\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$

g) $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\int \ln(x^2+4)\,\mathrm{d}x$

Výsledky

5.1.17 **a)** $(x-1)e^x+C$ **b)** $\dfrac{x}{\ln 2}2^x-\dfrac{2^x}{\ln^2 2}+C$

c) $x\dfrac{e^{2x}}{2}-\dfrac{e^{2x}}{4}+C$ **d)** $-\dfrac{1}{16}(4xe^{-4x}+e^{-4x})+C$

e) $\dfrac{5x+2}{\ln 2}2^x-\dfrac{5}{\ln^2 2}2^x+C$ **f)** $e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$

g) $\dfrac{x^2 2^x}{\ln 2}-\dfrac{2x2^x}{\ln^2 2}+2\dfrac{2^x}{\ln^3 2}+C$ **h)** $\dfrac{x^2 3^{-2x}}{-2\ln 3}-\dfrac{3^{-2x}}{2\ln^2 3}+C$

5.1.18 **a)** $x\ln x-x+C$ **b)** $\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$

c) $\dfrac{x^4}{4}\ln x-\dfrac{x^4}{16}+C$ **d)** $\dfrac{x^2+1}{2}\ln(x^2+1)-\dfrac{x^2}{2}+C$

e) $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\dfrac{1}{2}\right)+C$

f) $6x^3\ln(x-1)-2x^3-3x^2-6x-6\ln(x-1)+C$

g) $\dfrac{\ln x}{x}+C$ **h)** $-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}+C$

i) $-\dfrac{\ln^2 x}{x^2}-\dfrac{\ln x}{2x^2}-\dfrac{1}{4x^2}+C$

5.1.19 **a)** $\sin x-x\cos x+C$ **b)** $-(2x-5)\dfrac{\cos 3x}{3}+\dfrac{2}{9}\sin 3x+C$

c) $\left(x^2-7\right)\sin x-2\left(\sin x-x\cos x\right)+C$ **d)** $(2x-7)(\mathrm{tg}x-x)+2\ln\left|\cos x\right|+x^2+C$

e) $x\mathrm{tg}\,x+\ln\left|\cos x\right|+C$ **f)** $-x\,\mathrm{cotg}\,x+\ln\left|\sin x\right|+C$

g) $-\mathrm{cotg}\,x\cdot\ln\sin x-\mathrm{cotg}\,x+x+C$ **h)** $\mathrm{tg}\,x\cdot\ln\cos x+\mathrm{tg}\,x+x+C$

i) $t=x^4$, $\dfrac{x^4}{4}\sin x^4+\dfrac{\cos x^4}{4}+C$

5.1.20 **a)** $\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}+C$ **b)** $\frac{3^x(\sin x+\ln 3\cdot\cos x)}{1+\ln^2 3}+C$

c) $\frac{x\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)}{2}+C$

5.1.21 **a)** $x\,\mathrm{arccotg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ **b)** $\frac{x^2}{2}\mathrm{arccotg}2x-\frac{1}{8}\mathrm{arctg}2x+C$

c) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$ **d)** $x\arcsin 3x+\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}+C$

e) $\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}x+C$ **f)** $\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln\left|1+x^2\right|+C$

g) $2\sqrt{1+x}\cdot\arcsin x-\sqrt{1-x}+C$ **h)** $x\ln(x^2+4)-2x+4\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$

5.1.4 Integrovanie racionálnych funkcií

Racionálnou funkciou nazývame funkciu f, ktorá je daná predpisom:

$$f : y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

kde $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ sú polynómy stupňa n resp. m, pričom $Q_m(x)$ nie je nulový polynóm. Funkcia f je definovaná pre každé $x \in R$, pre ktoré platí $Q_m(x) \neq 0$.

Ak polynóm $P_n(x)$ je nižšieho stupňa ako polynóm $Q_m(x)$ (t.j. $n < m$), funkcia f sa nazýva ***rýdzo racionálna funkcia***. Ak funkcia f nespĺňa túto podmienku, tak sa nazýva ***nerýdzo racionálna funkcia***.

Ak je funkcia f nerýdzo racionálna, t.j. stupeň polynómu $P_n(x)$ nie je nižší ako $Q_m(x)$ ($n \geq m$), tak existujú dva jednoznačne určené polynómy $Z(x)$ a $R_s(x)$ také, že pre každé $x \in R$, ktoré nie je koreňom polynómu $Q_m(x)$ platí

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = Z(x) + \frac{R_s(x)}{Q_m(x)}.$$

Polynómy - a $R_s(x)$ dostaneme vydelením čitateľa menovateľom, $Z(x)$ sa nazýva ***neúplný podiel*** (ak $R_s(x) \neq 0$) a má stupeň $(n-m)$ a polynóm $R_s(x)$ sa nazýva ***zvyšok delenia***. Funkcia $\frac{R_s(x)}{Q_m(x)}$ je už rýdzo racionálna funkcia ($s < m$), v čitateli má polynóm nižšieho stupňa ako je polynóm v menovateli.

Integrovať nerýdzo racionálnu funkciu teda znamená integrovať polynóm $Z(x)$, čo už vieme a integrovať rýdzo racionálnu funkciu.

Ďalej sa obmedzíme na integrovanie rýdzo racionálnych funkcií.

5.1.4.1 Rozklad rýdzo racionálnej funkcie na parciálne zlomky

Rýdzo racionálnu funkciu $\frac{R_s(x)}{Q_m(x)}$, kde $s < m$, ktorú nevieme integrovať použitím vzťahov z vety 5.1.2, rozložíme na súčet tzv. parciálnych zlomkov. Cieľom je vyjadriť rýdzo racionálnu funkciu $\frac{R_s(x)}{Q_m(x)}$ v tvare súčtu konečného počtu rýdzo racionálnych funkcií, v ktorých menovatele sú polynómy nižšieho stupňa ako polynóm $Q_m(x)$ a majú čo najjednoduchší tvar.

Predpokladajme, že menovateľ $Q_m(x)$ možno rozložiť na súčin koreňových činiteľov tvaru $(x-c)^k$, k je prirodzené číslo a na súčin reálnych kvadratických trojčlenov tvaru $(x^2+px+q)^k$, ktoré majú záporný diskriminant:

$$Q_m(x) = (x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-c_r)^{k_r} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{h_1}(x^2+p_2x+q_2)^{h_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{h_s} \quad (4)$$

kde $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2h_1 + 2h_2 + \ldots + 2h_s = m$ a m je stupeň polynómu $Q_m(x)$. Rozklad na parciálne zlomky urobíme na základe platnosti nasledujúcej vety.

Veta 5.1.6 Nech v rýdzo racionálnej funkcii $\frac{R_s(x)}{Q_m(x)}$ je menovateľ rozložiteľný podľa vzťahu (4). Potom existujú také jednoznačne určené reálne čísla $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{k_2}, \ldots, K_1, K_2, \ldots, K_{h_1}, L_1, L_2, \ldots, L_{h_1}, M_1, M_2, \ldots, M_{h_2}, N_1, N_2, \ldots, N_{h_2}, \ldots$, že pre všetky $x \in R$ rôzne od koreňov polynómu $Q_m(x)$ platí:

$$\frac{R_s(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-c_1} + \frac{A_2}{(x-c_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x-c_1)^{k_1}} + + \frac{B_1}{x-c_2} + \frac{B_2}{(x-c_2)^2} + \cdots + \frac{B_{k_2}}{(x-c_2)^{k_2}} + \cdots +$$

$$+ \frac{K_1x+L_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{K_2x+L_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{K_{h_1}x+L_{h_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{h_1}} + \tag{5}$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \cdots + \frac{M_{h_2}x+N_{h_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{h_2}} + \cdots$$

Pravú stranu výrazu (5) nazývame **rozkladom** $\frac{R_s(x)}{Q_m(x)}$ **na *parciálne zlomky***.

Zo vzťahu (5) vyplýva, že ak sa v rozklade menovateľa vyskytuje činiteľ $(x-c)^k$, tak pri rozklade na parciálne zlomky zodpovedá tomuto činiteľu k parciálnych zlomkov tvaru $\frac{A_i}{(x-c)^i}$, kde $i = 1,2,...,k$. Podobne činiteľu $(x^2+px+q)^k$ v menovateli $Q_m(x)$ zodpovedá v rozklade (5) k parciálnych zlomkov tvaru $\frac{K_jx+L_j}{(x^2+px+q)^j}$, kde $j = 1,2,...,k$.

Poznámka 5.1.8 Z vety 5.1.6 vyplýva, že ak chceme nájsť rozklad rýdzo racionálnej funkcie $\frac{R_s(x)}{Q_m(x)}$ na parciálne zlomky, musíme najprv nájsť korene polynómu $Q_m(x)$, potom určiť správne tvar rozkladu a nakoniec určiť neznáme koeficienty v tomto rozklade. Neznáme koeficienty v rozklade (5) určíme pomocou ***metódy neurčitých koeficientov***, ktorej princíp ukážeme na niekoľkých príkladoch.

Príklad 5.1.29 Rozložme rýdzo racionálnu funkciu $f: y = \frac{8x-31}{x^2-9x+14}$ na parciálne zlomky.

Riešenie: Keďže diskriminant $D = 25 > 0$, polynóm $Q(x) = x^2-9x+14$ má dva rôzne reálne korene, a to $x_1 = 2$ a $x_2 = 7$, môžeme teda písať, že $Q(x) = (x-2)(x-7)$.

Podľa (5) platí (pre každé $x \neq 2$ a $x \neq 7$):

$$\frac{8x-31}{x^2-9x+14} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-7} \tag{6}$$

kde A, B sú jednoznačne určené konštanty. Nájdeme ich pomocou metódy neurčitých koeficientov. Rovnosť (6) vynásobíme polynómom $Q(x) = (x-2)(x-7)$ a dostaneme:

$$8x-31 = A(x-2) + B(x-7)$$

a po úprave máme:

$$8x-31=\left(A+B\right)x+\left(-7A-2B\right).$$

Porovnaním zodpovedajúcich si koeficientov dostaneme:

$$A+B=8$$
$$-7A-2B=-31$$

To je systém dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi A, B. Jeho riešením je $A=3$ a $B=5$. Teda pre každé $x\neq 2$ a $x\neq 7$ platí:

$$\frac{8x-31}{x^2-9x+14}=\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-7}.$$

Príklad 5.1.30 Rozložme rýdzo racionálnu funkciu $f: y=\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-2)}$ na parciálne zlomky.

Riešenie: Podľa (5) platí (pre každé $x\neq 2$ a $x\neq -1$)

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-2} \tag{7}$$

kde $A,B,C\in R$ sú jednoznačne určené konštanty. Nájdeme ich opäť pomocou metódy neurčitých koeficientov. Rovnosť (7) vynásobíme polynómom $Q(x)=(x+1)^2(x-2)$ a dostaneme:

$$x^2+1=A(x+1)(x-2)+B(x-2)+C(x+1)^2$$
$$x^2+1=A(x^2-x-2)+B(x-2)+C(x^2+2x+1)^2$$
$$x^2+1=Ax^2-Ax-2A+Bx-2B+Cx^2+2Cx+C \tag{8}$$
$$x^2+1=(-A+B+2C)x+(-2A-2B+C)$$

Dva polynómy sa rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú koeficienty pri rovnakých mocninách premennej x na ľavej aj pravej strane rovnice (8). Porovnaním dostaneme nasledujúci systém troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi:

$$1=A+C$$
$$0=-A+B+2C$$
$$1=-2A-2B+C,$$

ktorého riešením je $A=\frac{4}{9}$, $B=-\frac{2}{3}$, $C=\frac{5}{9}$.

Hľadaný rozklad je $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{x-2}$.

Príklad 5.1.31 Rozložme rýdzo racionálnu funkciu $f: y=\frac{5x-2}{x^3+8}$ na parciálne zlomky.

Riešenie: Najskôr rozložme menovateľa $Q(x)=x^3+8=(x-2)(x^2-2x+4)$. Kvadratický člen (x^2-2x+4) sa už nedá ďalej rozložiť na súčin reálnych koreňových činiteľov, lebo má záporný diskriminant. Podľa (5) platí (pre každé $x\neq 2$)

$$\frac{5x-2}{x^3+8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}, \tag{9}$$

kde $A,B,C \in R$ sú jednoznačne určené konštanty. Nájdeme ich opäť pomocou metódy neurčitých koeficientov. Rovnosť (9) vynásobíme polynómom $Q(x)=(x-2)(x^2-2x+4)$ a dostaneme:

$$5x-2=A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)$$

$$5x-2=(A+B)x^2+(-2A+2B+C)x+4A+2C \qquad (10)$$

Porovnaním koeficientov na ľavej a pravej strane rovnosti (10) dostaneme systém lineárnych rovníc.

$$0=A+B$$
$$5=-2A+2B+C$$
$$-2=4A+2C\,.$$

Riešením tohto systému je $A=-1$, $B=1$, $C=1$ a hľadaný rozklad je:

$$\frac{5x-2}{x^3+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{-x+1}{x^2-2x+4}\,.$$

Príklad 5.1.32 Rozložme rýdzo racionálnu funkciu $f: y=\dfrac{4x^2-16x+12}{(x-2)^2(x^2-2x+2)^2}$ na parciálne zlomky.

Riešenie:

$$\frac{4x^2-16x+12}{(x-2)^2(x^2-2x+2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}\cdot\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}+\frac{Ex+F}{(x^2-2x+2)^2} \qquad (11)$$

Rovnosť (11) vynásobíme polynómom $Q(x)=(x-2)^2(x^2+2x+2)^2$. Dostaneme:

$$4x^2-16x+12=A(x-2)(x^2-2x+2)+B(x^2-2x+2)^2+$$
$$+(Cx+D)(x-2)^2(x^2-2x+2)+(Ex+F)(x-2)^2$$

$$4x^2-16x+12=(A+C)x^5+(-6A+b-6C+D)x^4+(16A-4B-14C-6D+E)x^3+$$
$$+(-24A+8B-16C+14D-4E+F)x^2+(20A-8B+8C-16D+4E-4F)x+$$
$$+(-8A+8B+D+4F)$$

Dostaneme systém šiestich lineárnych rovníc so šiestimi neznámymi:

$$0=A+C$$
$$0=-6A+B-6C+D$$
$$0=16A-4B-14C-6D+E$$
$$4=-24A+8B-16C+14D-4E+F$$
$$-16=20A-8B+8C-16D+4E-4F$$
$$12=-8A+8B+8D+4F.$$

Riešením tohto systému je $A=2$, $B=-1$, $C=-2$, $D=1$, $E=-2$, $F=6$. Hľadaný rozklad je:

$$\frac{4x^2-16x+12}{(x-2)(x^2-2x+2)^2}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{-2x+1}{x^2-2x+2}+\frac{-2x+6}{(x^2-2x+2)^2}\,.$$

5.1.4.2 Integrácia parciálnych zlomkov

Neurčitý integrál racionálnej funkcie vypočítame tak, že funkciu najprv rozložíme podľa vety 5.1.6 na súčet parciálnych zlomkov a potom vypočítame integrály týchto parciálnych zlomkov. Budeme sa zaoberať tromi typmi parciálnych zlomkov:

Integrovanie parciálnych zlomkov 1. typu $\frac{A}{x-\alpha}$, kde $A \in R$, čitateľ integrandu upravíme tak, aby bol deriváciou menovateľa:

$$\int \frac{A}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{1}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x = A\ln\left|x-\alpha\right| + C\,.$$

Integrovanie parciálnych zlomkov 2. typu $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, kde $A \in R$ a $k > 1$, integrál riešime substitučnou metódou:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} substitúcia \\ x-\alpha = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}\right| = A\int \frac{1}{t^k}\,\mathrm{d}t = A\int t^{-k}\,\mathrm{d}t = A\frac{t^{1-k}}{1-k} + C = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C\,.$$

Integrovanie parciálnych zlomkov 3. typu $\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$, kde $A \in R$ a kvadratický člen má záporný diskriminant, parciálny zlomok 3. typu rozložíme najskôr na súčet dvoch zlomkov tak, aby prvý z nich mal v čitateli deriváciu menovateľa, t.j.:

$$\frac{Cx+D}{x^2+px+q} = k_1\frac{2x+p}{x^2+px+q} + k_2\frac{1}{x^2+px+q}\,. \qquad (12)$$

Neznáme koeficienty k_1 a k_2 určíme metódou neurčitých koeficientov. Integrál prvého zlomku na pravej strane (12) je tabuľkový integrál V6 a platí:

$$k_1\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = k_1\cdot\ln(x^2+px+q) + C_1\,,$$

pretože $x^2+px+q > 0$ pre všetky $x \in R$. Integrál druhého zlomku na pravej strane (12) vhodnými úpravami (doplnením menovateľa na úplný štvorec) upravíme na tvar

$$k_2\int \frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = k_2\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\mathrm{d}x\,.$$

Položme $x+\frac{p}{2} = t$, potom $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a $q-\frac{p^2}{4} = a^2$. Poznamenajme, že $q-\frac{p^2}{4}$ sa rovná a^2, lebo diskriminant kvadratického člena $\left(x^2+px+q\right)$ je záporný ($p^2-4q<0$), t.j. $q-\frac{p^2}{4} > 0$. Potom získavame tabuľkový integrál:

$$k_2\int \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = k_2\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C_2 =$$

$$= \frac{k_2}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_2 = \frac{2k_2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C_2 .$$

Príklad 5.1.33 Vypočítame neurčitý integrál $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} \mathrm{d}x$.

Riešenie: Kvadratický člen v menovateli má kladný diskriminat ($D=1$), a teda platí:

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

Rozložme integrand na dva zlomky podľa (5):

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)} .$$

Keď odstránime zlomky, dostaneme:

$$2x+3 = A(x-2)+B(x-3),\ A=9,\ B=-7$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} \mathrm{d}x = 9\int \frac{1}{(x-3)} \mathrm{d}x - 7\int \frac{1}{(x-2)} \mathrm{d}x .$$

V oboch integráloch sú parciálne zlomky 1. typu a platí:

$$9\int \frac{1}{(x-3)} \mathrm{d}x - 7\int \frac{1}{(x-2)} \mathrm{d}x = 9\ln(x-3) - 7\ln(x-2) + C .$$

Príklad 5.1.34 Vypočítame neurčitý integrál $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4} \mathrm{d}x$.

Riešenie: Kvadratický člen v menovateli má diskriminat rovnajúci sa nule ($D=0$), a teda platí:

$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

Rozložme integrand na dva zlomky podľa (5):

$$\frac{2x+3}{x^2-4x+4} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} .$$

Keď odstránime zlomky, dostaneme:

$$2x+3 = A(x-2)+B,\ A=2,\ B=7$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4} \mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{(x-2)} \mathrm{d}x + 7\int \frac{1}{(x-2)^2} \mathrm{d}x .$$

Prvý integrál je parciálny zlomok 1. typu a druhý integrál je parciálny zlomok 2. typu a platí:

$$2\int \frac{1}{(x-2)} \mathrm{d}x + 7\int \frac{1}{(x-2)^2} \mathrm{d}x = 2\ln(x-2) + 7\frac{1}{(x-2)} + C .$$

Príklad 5.1.35 Vypočítame neurčitý integrál $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Integrand je parciálny zlomok 3. typu, lebo diskriminant je záporný ($D=-8$). Rozložme integrand na dva zlomky podľa (12):

$$\frac{x-2}{x^2+2x+3}=k_1\frac{2x+2}{x^2+2x+3}+k_2\frac{1}{x^2+2x+3} \tag{13}$$

Vynásobením rovnosti (13) menovateľom $\left(x^2+2x+3\right)$ dostaneme:

$$x-2=k_1\left(2x+2\right)+k_2$$

Potom pre koeficienty k_1, k_2 platí:

$$k_1=\frac{1}{2},\ k_2=-3\,.$$

$$\int\frac{x-2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x\ -3\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$$

Pre integrál prvého zlomku platí:

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C_1\,.$$

Druhý integrál vypočítame úpravou menovateľa na úplný štvorec:

$$3\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x=3\int\frac{1}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Označme $a=\sqrt{2}$ a nech $x+1=t$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, potom máme:

$$3\int\frac{1}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x=3\int\frac{1}{t^2+(\sqrt{2})^2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C_2=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{(t+1)\sqrt{2}}{2}+C_2$$

Spojením priebežných výsledkov dostávame kompletný neurčitý integrál:

$$\int\frac{x-2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}+C\,.$$

ÚLOHY

V úlohách 5.1.22 až 5.1.28 vypočítajte neurčité integrály.

5.1.22

a) $\int\frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int\frac{6-5x}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int\frac{1}{2x^2+5x-12}\,\mathrm{d}x$

d) $\int\frac{11x-12}{3x^2-11x+6}\,\mathrm{d}x$ **e)** $\int\frac{1}{x(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\int\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x$

g) $\int\frac{1}{(2-5x)(4x+3)}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\int\frac{x}{(x+1)(2x+1)}\,\mathrm{d}x$

Wondershare PDFelement

5.1.23 **a)** $\int \frac{2x+1}{(x-4)^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{1-3x}{(2x+1)^2}\,dx$ **c)** $\int \frac{x}{x^2+6x+9}\,dx$

d) $\int \frac{9x-14}{9x^2-24x+16}\,dx$

5.1.24 **a)** $\int \frac{x+5}{(x+3)^4}\,dx$ **b)** $\int \frac{x}{(2x+1)^3}\,dx$ **c)** $\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx$

d) $\int \frac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}\,dx$ **e)** $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx$ **f)** $\int \frac{4x-1}{x^3-9x^2+27x-27}\,dx$

g) $\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$ **h)** $\int \frac{5x^2-14x+17}{(x-5)^2(x-1)^2}\,dx$

5.1.25. **a)** $\int \frac{6x-5}{x^2-4x+5}\,dx$ **b)** $\int \frac{2x+11}{x^2+2x+5}\,dx$ **c)** $\int \frac{6x+12}{x^2+3x+3}\,dx$

d) $\int \frac{2x}{x^2+x+2}\,dx$ **e)** $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$ **f)** $\int \frac{1}{x^3+x^2+x}\,dx$

g) $\int \frac{x^2-2x+1}{(x^2-2x+2)(x^2-2x+5)}\,dx$

5.1.26 **a)** $\int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+9)^2}\,dx$

5.1.27 **a)** $\int \frac{x^3-2}{x^2-1}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^4+1}{x^2-x-2}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^4-9}{x^2+2x+1}\,dx$

d) $\int \frac{x^4}{x^2+4}\,dx$ **e)** $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx$

5.1.28 **a)** $\int \frac{5}{(x+3)^4}\,dx$ **b)** $\int \frac{4}{(2-5x)^3}\,dx$ **c)** $\int \frac{4}{(x+3)(x-1)}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{(1-x)(3-x)}$ **e)** $\int \frac{3}{x^2-5x+6}\,dx$ **f)** $\int \frac{dx}{2x^2-x}$

g) $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}\,dx$ **h)** $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}\,dx$ **i)** $\int \frac{x-1}{x^2+x-6}\,dx$

j) $\int \frac{x}{x^2-3x-4}\,dx$ **k)** $\int \frac{2x}{9x^2-1}\,dx$ **l)** $\int \frac{x^2-6}{x^2-x-6}\,dx$

m) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$ **n)** $\int \frac{dx}{x^3-x}$ **o)** $\int \frac{x^2-4}{x^3-x^2}\,dx$

p) $\int \frac{x^4-2x}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx$ **q)** $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$ **r)** $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

Výsledky

5.1.22 **a)** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right|+C$ **b)** $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{16}{3}\ln|x+2|+C$

c) $\frac{1}{11}\ln\left|\frac{2x-3}{x+4}\right|+C$

d) $3\ln|x-3|+\frac{2}{3}\ln|3x-2|+C$

e) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right|+C$

f) $2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C$

g) $\frac{1}{23}\ln\left|\frac{4x+3}{2-5x}\right|+C$

h) $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

5.1.23 **a)** $2\ln|x-4|-\frac{9}{x-4}+C$

b) $-\frac{3}{4}\ln|2x+1|-\frac{5}{4}\frac{1}{2x+1}+C$

c) $\ln|x+3|+\frac{3}{x+3}+C$

d) $\ln|3x-4|+\frac{2}{3}\frac{1}{3x-4}+C$

5.1.24 **a)** $-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+3)^2}-\frac{2}{3}\frac{1}{(x+3)^3}+C$

b) $\frac{1}{8}\frac{1}{(2x+1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{2x+1}+C$

c) $\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$

d) $2\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}+C$

e) $\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+C$

f) $\frac{-4}{x-3}-\frac{11}{2}\frac{1}{(x-3)^2}+C$

g) $2\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|-\frac{3}{x+2}+C$

h) $-\frac{9}{2}\frac{1}{x-5}-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+C$

5.1.25 **a)** $7\operatorname{arctg}(x-2)+3\ln|x^2-4x+5|+C$

b) $\ln|x^2+2x+5|+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{(x+1)}{2}+C$

c) $3\ln|x^2+3x+3|+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{(2x+3)\sqrt{3}}{3}+C$

d) $-\frac{2\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\frac{(2x+1)\sqrt{7}}{7}+\ln|x^2+x+2|+C$

e) $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{(2x-1)\sqrt{3}}{3}+C$

f) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}+C$

g) $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x-1)+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{(x-1)}{2}+C$

5.1.26 **a)** $\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{(x-1)}{2}+\frac{1}{8}\frac{x-1}{x^2-2x+5}+C$

b) $\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-\frac{1}{18}\frac{x-72}{x^2+9}+C$

5.1.27 **a)** $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+1|+C$

b) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x-\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{17}{3}\ln|x-2|+C$

c) $\frac{x^3}{3}-x^2+3x-4\ln|x+1|+\frac{8}{x+1}+C$

d) $\frac{x^3}{3}-4x+8\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$,

e) $5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C$

5.1.28

a) $-\frac{5}{3(x+3)^3}+C$

b) $\frac{2}{5(2-5x)^2}+C$

c) $\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$

d) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$

e) $3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$

f) $\ln\left|\frac{2x-1}{x}\right|+C$

g) $2\ln|x-4|-\ln|x-3|+C$

h) $-\ln|2x^2-3x+1|+C$

i) $\frac{4}{5}\ln|x+3|+\frac{1}{5}\ln|x-2|+C$

j) $\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{4}{5}\ln|x-4|+C$

k) $\frac{1}{9}\ln|9x^2-1|+C$

l) $x+\frac{2}{5}\ln|x+2|+\frac{3}{5}\ln|x-3|+C$

m) $x-3\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$

n) $-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$

o) $-\frac{4}{x}+4\ln|x|-3\ln|x-1|+C$

p) $\frac{x^2}{2}+4x+\frac{1}{4}\ln|x+1|-4\ln|x-2|+\frac{75}{4}\ln|x-3|+C$

q) $4\ln|x-1|+5\ln|x-4|-7\ln|x+3|+C$

r) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+\frac{4}{5}\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$

5.1.5 Ekonomické aplikácie neurčitého integrálu

Z kapitoly 3.5 vieme, že marginálne náklady sú dané vzťahom:

$$MC(x) = C'(x),$$

kde $C(x)$ je funkcia celkových nákladov (analogicky to platí pre funkciu celkových ziskov $P(x)$ alebo funkciu celkových príjmov $R(x)$). Ak máme naopak zadanú funkciu marginálnych nákladov $MC(x)$ ($MP(x)$ alebo $MR(x)$), môžeme nájsť funkciu celkových nákladov $C(x)$ ($P(x)$ alebo $R(x)$) jej integrovaním, t.j.:

$$C(x) = \int MC(x)\,\mathrm{d}x \;\; (P(x) = \int MP(x)\,\mathrm{d}x \text{ alebo } R(x) = \int MR(x)\,\mathrm{d}x\,) \qquad (14)$$

Príklad 5.1.36 Nech je daná funkcia marginálnych nákladov $MC(x) = 6 - 0,04x$ a funkcia marginálnych príjmov $MR(x) = 12 - 0,02x$, $x \geq 0$. Určme funkciu celkových nákladov a náklady na výrobu 100 výrobkov, ak

a) fixné náklady sú $FC = 300$ p.j.,
b) náklady na výrobu 50 výrobkov sú 275 p.j.,
a) zisk pri predaji 100 výrobkov je 200 p.j.

Riešenie: Podľa (14) platí:

$$C(x) = \int MC(x)\mathrm{d}x = \int (6 - 0,04x)\mathrm{d}x = 6x - 0,02x^2 + C_1\text{, pre } x \geq 0 \text{ a } C_1 \in \mathrm{R}.$$

Riešenie je nekonečne veľa primitívnych funkcií. Z grafického hľadiska sú to všetko paraboly, ktoré sa v smere osi y posúvajú o konštantu C_1.
Integračnú konštantu C_1 zodpovedajúcu prípadom a), b), c) určíme takto:

a) Celkové náklady sa dajú vyjadriť ako súčet variabilných a fixných nákladov:

$$C(x) = VC(x) + FC\text{, teda } C(0) = VC(0) + FC = FC\,.$$

Preto pre funkciu celkových nákladov za podmienky $FC = 300$ p.j. platí:

$$C(0) = 6 \cdot 0 - 0,02 \cdot 0^2 + C_1 = 300 + C_1\text{, odtiaľ máme } C_1 = 300\,.$$

Hľadaná funkcia celkových nákladov je z matematického hľadiska daná predpisom:

$$C(x) = 6x - 0,02x^2 + 300\text{, pre } x \geq 0.$$

Z ekonomického hľadiska vylúčením možnosti klesania nákladov pri zvyšovaní produkcie platí:

$$C'(x) = 6 - 0,04x \geq 0 \Rightarrow x \leq 150$$
$$\Downarrow$$
$$C(x) = 6x - 0,02x^2 + 300\,,\; x \in \langle 0,150 \rangle.$$

Potom náklady pri množstve produkcie $x = 100$ sú $C(100) = 700$ p.j.

b) Z primitívnych funkcií vyberieme tú, ktorá vyhovuje podmienke $C(50) = 275$ p.j. Hľadaná konštanta bude riešením rovnice:

$$C(50) = 6 \cdot 50 - 2 \cdot 50^2 + C_1 = 275 \text{, a teda } C_1 = 25 \text{ p.j.}$$

Preto funkcia celkových nákladov vyhovujúca podmienke $C(50) = 275$ p.j. je daná predpisom

$$C(x) = 6x - 0,02x^2 + 25 \text{, pre } x \in \langle 0,150 \rangle.$$

Náklady pri produkcii $x = 100$ sú $C(100) = 425$ p.j.

c) V tomto prípade podmienka, s ktorou sa spája vyjadrenie integračnej konštanty C_1, súvisí s funkciou celkového zisku $P(x)$. Na jej určenie potrebujeme okrem funkcie celkových nákladov aj funkciu celkových príjmov

$$R(x) = \int MR(x)\,\mathrm{d}x = \int (12 - 0,02x)\,\mathrm{d}x = 12x - 0,01x^2 + C_2 \text{ , pre } x \geq 0 \text{ a } C_2 \in \mathrm{R}.$$

Ak spoločnosť predá nula výrobkov, teda nepredá nič, tak celkové príjmy sú samozrejme nulové, t.j. $R(0) = 0$. Takže keď $R(0) = 12 \cdot 0 - 0,01 \cdot 0 + C_2 = 0$, tak integračná konštanta $C_2 = 0$. Potom je funkcia celkových príjmov daná predpisom $R(x) = 12x - 0,01x^2$. Takže:

$$P(x) = R(x) - C(x),$$

$$\text{t.j. } P(x) = 12x - 0,01x^2 - \left(6x - 0,02x^2 + C_1\right) = 6x + 0,01x^2 - C_1.$$

Konštantu určíme z podmienky $P(100) = 200$ p. j.

$$P(100) = 6 \cdot 100 + 0,01 \cdot (100)^2 - C_1 = 200 \text{ , odtiaľ máme } C_1 = 500.$$

Potom funkcia celkových nákladov je daná predpisom

$$C(x) = 6x - 0,02x^2 + 500.$$

Náklady pri produkcii $x = 100$ sú $C(100) = 900$ p.j.

Príklad 5.1.37 Nech je daná funkcia marginálnych nákladov $MC(x) = 6 - 0,04x$ a funkcia marginálnych príjmov $MR(x) = 12 - 0,02x$, $x \geq 0$. Určme predajnú cenu pri predaji 100 výrobkov.

Riešenie: Predajná cena, teda cena za jednotku produkciu $p(x)$, je vlastne funkčná hodnota funkcie priemerných príjmov:

$$\widetilde{R}(x) \text{ t.j. } p(x) = \widetilde{R}(x) = \frac{R(x)}{x}.$$

Pomocou funkcie celkových príjmov $R(x) = 12x - 0,01x^2$, ktorú sme vypočítali v príklade 5.1.36 c) dostaneme

$$p(x) = \frac{12x - 0,01x^2}{x} = 12 - 0,01x.$$

Potom jednotková cena pri predaji 100 výrobkov bude funkčná hodnota $p(100)$, čiže $p(100) = 12 - 0,01 \cdot 100 = 11$ p.j.

ÚLOHY

5.1.29 Určte funkciu celkových nákladov $C(x)$ spĺňajúcu uvedenú podmienku, ak je daná funkcia marginálnych nákladov $MC(x)$:

a) $MC(x)=100-2x$ a $FC=1000$ p.j.,

b) $MC(x)=5+2x-0,6x^2$ a $C(5)=35$ p.j.,

c) $MC(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x+256}}$ a $C(36)=6$ p.j.,

d) $MC(x)=20\cdot e^{\frac{x}{2}}$ a $FC=120$ p.j.,

e) $MC(x)=(2x+3)e^{2x}$ a $FC=5$ p.j.,

f) $MC(x)=12+\dfrac{300}{(x+1)^2}$ a $C(11)=507$ p.j.

5.1.30 Určte funkciu celkových príjmov $R(x)$, ak je daná funkcia marginálnych príjmov $MR(x)$:

a) $MR(x)=60-2x-2x^2$

b) $MR(x)=\dfrac{5+4x+2x^2}{(x+1)^2}$

b) $MR(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}$

d) $MR(x)=\dfrac{480}{(x+4)^2}$

5.1.31 Určte funkciu celkových nákladov $C(x)$ spĺňajúcu uvedenú podmienku, ak je daná funkcia marginálnych priemerných nákladov $M\tilde{C}(x)$:

a) $M\tilde{C}(x)=2-\dfrac{1}{x+1}$ a platí $C(1)=100$ p.j.,

b) $M\tilde{C}(x)=-0,02-\dfrac{300}{x^2}$ a platí $C(50)=450$ p.j.

5.1.32 Je daná funkcia marginálnych príjmov $MR(x)=\dfrac{x(6-x)}{3}$. Určte:

a) množstvo výrobkov, ktoré maximalizuje príjem,
b) funkciu celkových príjmov $R(x)$,
c) hodnotu maximálneho príjmu,
d) jednotkovú cenu, ktorá maximalizuje príjem,
e) marginálny dopyt pre množstvo výrobkov $x_0=6$,
f) marginálny dopyt pre jednotkovú cenu $p_0=1$,
g) funkciu dopytu $x(p)$.

5.1.33 Určte pri akej produkcii bude výroba rentabilná a pri akej produkcii firma dosiahne maximálny zisk, ak $MC(x)=4+0,02x$, fixné náklady sú 50 p.j. a $MR(x)=6-0,01x$, $x\in\langle 0,300\rangle$.

5.1.34 Je daná funkcia marginálnych nákladov $MC(x)$, marginálnych príjmov $MR(x)$ a doplňujúca podmienka. Určte funkciu celkového zisku $P(x)$, ak:

a) $MC(x)=100-0,2x$, $MR(x)=600-0,4x$, $P(100)=48900$ p.j.,

b) $MC(x)=300+x$, $MR(x)=500-0,8x$, $C(10)=3200$ p.j.,

c) $MC(x)=5-10x$, $MR(x)=35-4x-1,5x^2$, $P(4)=36$ p.j.,

d) $MC(x)=20+x$, $MR(x)=40-3x$, $FC=48$ p.j.

Výsledky

5.1.29 **a)** $C(x)=-x^2+100x+1000$ **b)** $C(x)=5x+x^2-0,2x^3+10$

c) $C(x)=\sqrt{x+64}-4$ **d)** $C(x)=40e^{\frac{x}{2}}+80$

e) $C(x)=xe^{2x}+e^{2x}+4$ **f)** $C(x)=12x-\frac{300}{x+1}+400$

5.1.30 **a)** $R(x)=60x-x^2-\frac{2}{3}x^3$ **b)** $R(x)=e^{\frac{x^2}{2}}-1$

c) $R(x)=2x-\frac{3}{x+1}+3$ **d)** $R(x)=\frac{120x}{x+4}$

5.1.31 **a)** $C(x)=2x^2-x\,ln|x+1|+x(98+ln\,2)$ **b)** $C(x)=4x-0,02x^2+300$

5.1.32 **a)** $x_0=6$ **b)** $R(x)=\frac{x^2(9-x)}{9}$ **c)** $R(6)=12$

d) $p(6)=2$ **e)** $-\frac{1}{3}$ **f)** -3

g) $x(p)=\frac{3\sqrt{9-4p}+9}{2}$

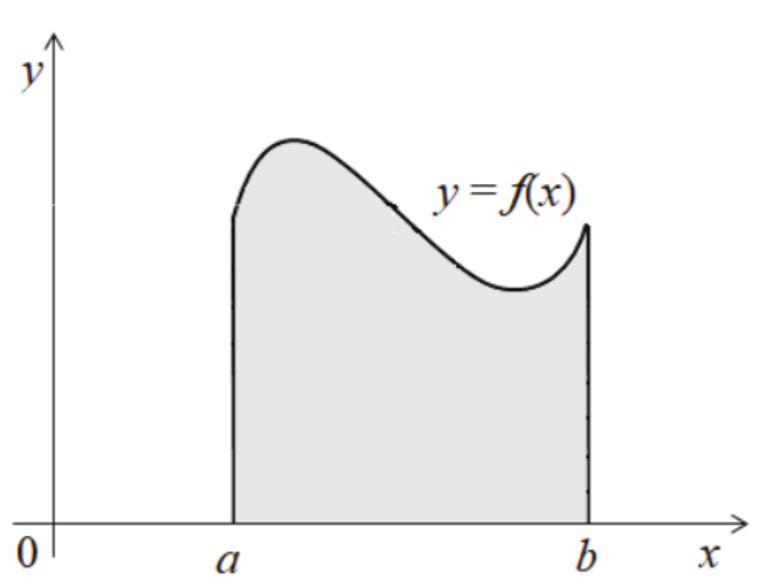
5.1.33 Výroba je rentabilná pri produkcii $x\in\left\langle\frac{100}{3},200\right\rangle$ a maximálny zisk firma dosiahne pri produkcii $x=\frac{200}{3}$.

5.1.34 **a)** $P(x)=500x-0,1x^2-100$ **b)** $P(x)=200x-0,9x^2-150$

c) $P(x)=30x+3x^2-\frac{x^3}{2}-100$ **d)** $P(x)=20x-2x^2-48$

5.2 Určitý integrál

Motiváciou pre vznik integrálneho počtu bolo zavedenie pojmu určitý integrál, ktorého úlohou bolo riešiť obsah „krivočiareho lichobežníka“. Ide o plochu, ktorá je ohraničená krivkou $y = f(x)$, osou x a priamkami $x = a$, $x = b$ (obr. 5.2.1). Podnety na vznik integrálneho počtu boli už v starovekej matematike, a to nielen pri výpočte obsahu plôch "krivočiarych" útvarov, ale aj pri určovaní objemov telies a tiež pri skúmaní zákonov pohybu.



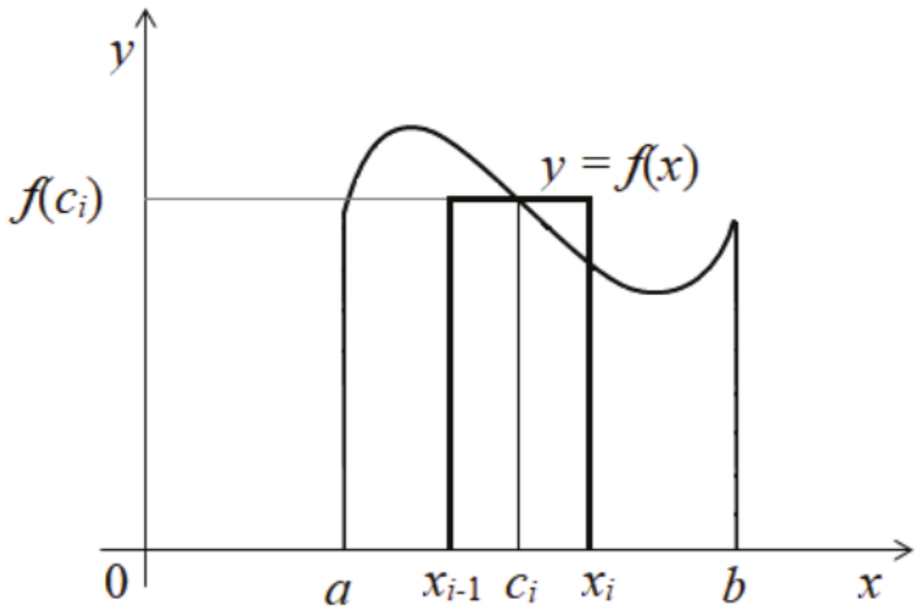
Obr. 5.2.1 Obsah „krivočiareho“ útvaru

Konkrétne napríklad v starovekom Grécku Archimedes zo Syrakúz počítal plochu kruhu cez vpísané a opísané pravidelné $2n$-uholníky, neskôr hlavne Galileo Galilei skúmal zákony pohybu telies, ďalej Johanes Kepler počítal objemy telies a tiež Isaac Newton či Gottfried Wilhelm Leibnitz riešili problémy fyzikálneho, resp. geometrického charakteru.

5.2.1 Pojem určitého integrálu

Nech je v intervale $\langle a, b \rangle$, kde $a, b \in R$, definovaná funkcia jednej reálnej premennej $f(x)$. Rozdeľme interval $\langle a, b \rangle$ na n častí deliacimi bodmi $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, pričom $x_0 = a$, $x_n = b$ a platí $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n$, pričom dĺžky jednotlivých častí sú $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Množina deliacich bodov $D_n = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ určuje ***delenie intervalu*** $\langle a, b \rangle$. Vnútri každého intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ zvoľme bod c_i a určme $f(c_i)$. Potom ***integrálnym súčtom funkcie*** f pre dané delenie D_n intervalu $\langle a, b \rangle$ a danú voľbu $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle, i = 1, 2, \ldots, n$ nazývame číslo

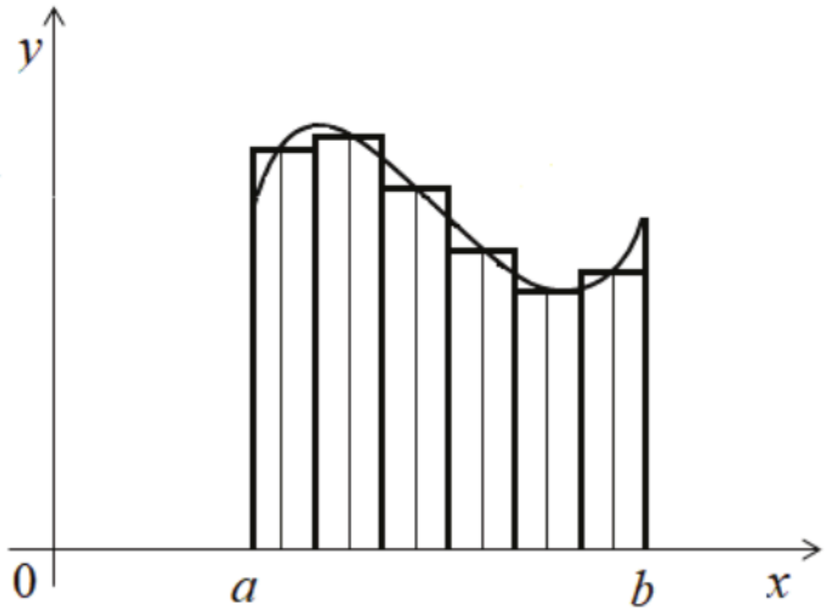
$$S(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i \tag{15}$$



Obr. 5.2.2 Obsah „krivočiareho“ útvaru

Ak bod c_i leží uprostred každej časti, tak hovoríme o *strednom integrálnom súčte*. V ďalšom texte budeme pre jednoduchosť predpokladať, že časti sú rovnako veľké. Ak uvažujeme funkciu *f*, ktorá je na intervale $\langle a, b \rangle$ spojitá a nezáporná, potom má stredný integrálny súčet jednoduchú geometrickú interpretáciu. Súčin $f(c_i) \cdot \Delta x_i$ predstavuje obsah obdĺžnika s rozmermi strán $f(c_i)$ a Δx_i (obr. 5.2.2).

Stredný integrálny súčet je rovný súčtu obsahov všetkých takýchto obdĺžnikov a je približne rovný obsahu uvažovanej plochy (obr. 5.2.3).



Obr. 5.2.3 Stredný integrálny súčet pre $n = 6$

Ak zavedieme nové delenie D_m, pričom ($m \geq n$) intervalu $\langle a, b \rangle$ s takou vlastnosťou, že toto nové delenie D_m obsahuje všetky body delenia D_n a ešte aspoň jeden ďalší deliaci bod, tak delenie D_m potom nazývame ***zjemnením delenia*** D_n. Nielen intuitívne platí, že keď sa počet dielikov, na ktoré delíme interval $\langle a, b \rangle$ zväčšuje, pričom dĺžky týchto dielikov sa zmenšujú, rozdiel medzi príslušným integrálnym súčtom $S(f, D_n)$ a plošným obsahom krivočiareho lichobežníka sa zmenšuje, a teda číslo $S(f, D_n)$ lepšie aproximuje obsah daného rovinného útvaru.

Definícia 5.2.1 Funkciu f nazývame (Riemannovsky) ***integrovateľnou*** na intervale $\langle a, b \rangle$, ak existuje vlastná limita stredných integrálnych súčtov funkcie *f*, t.j.

$$\lim_{n \to \infty} S(f, D_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = I \text{, kde } I \in R .$$

Číslo *I* sa nazýva (Riemannov) ***určitý integrál funkcie f na intervale*** $\langle a, b \rangle$. Zapisujeme ho:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Číslo *a* sa nazýva ***dolnou*** a číslo *b* ***hornou hranicou*** určitého integrálu.

Poznámka 5.2.1 ***Určitý integrál*** funkcie *f* na intervale $\langle a, b \rangle$ je číslo, ktoré je jednoznačne určené danou funkciou *f* a intervalom $\langle a, b \rangle$. ***Neurčitý integrál*** funkcie *f* je množina primitívnych funkcií *F* k funkcii *f* na intervale $\langle a, b \rangle$. *Sú to teda dva úplne rozdielne pojmy.* Neskôr ukážeme, že za určitých predpokladov medzi nimi existuje úzka súvislosť.

Vráťme sa však k definícii určitého integrálu. Zatiaľ nevieme, kedy je funkcia integrovateľná, t.j. kedy vôbec existuje určitý integrál. Platí tvrdenie:

Veta 5.2.1 (***Postačujúca podmienka integrovateľnosti funkcie na intervale***). Každá spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$ je na ňom integrovateľná.

Podmienka spojitosti však nie je nutná. Dá sa dokázať, že platí nasledujúca veta.

Veta 5.2.2 Ak je funkcia f ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle$ a má na ňom konečný počet bodov nespojitosti, tak je na tomto intervale integrovateľná.

5.2.2 Vlastnosti určitého integrálu a jeho výpočet

Po zavedení pojmu určitý integrál teraz uveďme jeho základné vlastnosti.

Veta 5.2.3 Nech funkcie f, g sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$ a $c \in R$. Potom aj funkcie $|f|$, $c \cdot f$, $f \pm g$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Dôsledok vety 5.2.3 Ak funkcie $f_1, f_2, \ldots f_n$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$ a čísla $c_1, c_2, \ldots c_n \in R$, potom platí

$$\int_a^b \left[c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x) \pm \ldots \pm c_n f_n(x)\right]\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \pm c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x \pm \ldots \pm c_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Uvedený dôsledok je analógiou vety 5.1.3 o *integrovaní lineárnej kombinácie* funkcií.

Ďalej uvádzame dve nerovnosti, ktoré platia pre určitý integrál.

Veta 5.2.4 Ak funkcia f nadobúda na intervale $\langle a, b \rangle$ nezáporné hodnoty a je na tomto intervale integrovateľná, tak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Veta 5.2.5 Nech funkcie f a g sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí, že $f(x) \leq g(x)$. Potom platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Veta 5.2.6 Ak je funkcia f integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$, tak je integrovateľná aj na každom intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$, ktorý je časťou (podmnožinou) intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 5.2.2 Pomocou vety 5.2.6 sa dá dokázať dôležitá vlastnosť integrálu, vlastnosť aditívnosti.

Veta 5.2.7 (*Aditívna vlastnosť integrálu*) Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$, potom je integrovateľná aj na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí:

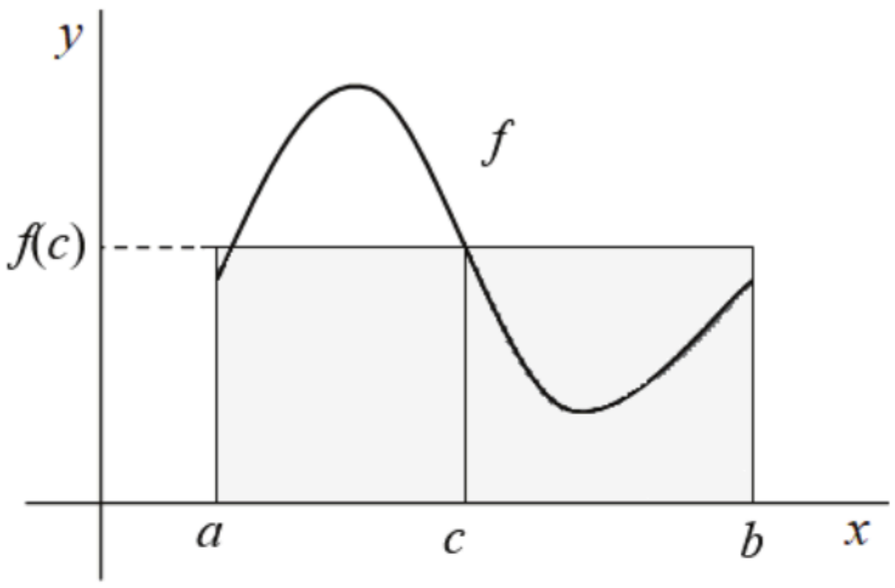
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{16}$$

Poznámka 5.2.3 Veta 5.2.7 má veľmi jednoduchú geometrickú interpretáciu. Vyjadruje skutočnosť, že obsah útvaru, ktorý je ohraničený priamkami $y=0$, $x=a$, $x=b$ a grafom funkcie f, sa rovná súčtu obsahov útvarov, z ktorých prvý je ohraničený priamkami $y=0$, $x=a$, $x=c$ a grafom funkcie f a druhý je ohraničený priamkami $y=0$, $x=c$, $x=b$ a grafom funkcie f.

Veta 5.2.8 (*Veta o strednej hodnote integrálneho počtu*) Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom existuje také číslo $c \in (a, b)$, že platí:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)\,.$$

Veta o strednej hodnote hovorí o existencii takého čísla $c \in (a, b)$, pre ktoré platí, že obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie f a priamkami $y=0$, $x=a$, $x=b$ je rovnaký, ako obsah obdĺžnika, ktorý je ohraničený priamkami $y=0$, $x=a$, $x=b$ a $y=f(x)$, grafické znázornenie vidíme na obr. 5.2.4.



Obr. 5.2.4

Číslo

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

sa nazýva ***stredná hodnota funkcie*** f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Už sme spomínali, že za istých predpokladov existuje medzi určitým a neurčitým integrálom úzka súvislosť. Teraz ju ukážeme. Predpokladajme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a že funkcia F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale (a, b), t.j.

$F'(x)=f(x)$ pre každé $x\in(a,b)$. Funkcia F je teda spojitá na intervale (a,b). Predpokladajme, že je spojitá aj na intervale $\langle a,b\rangle$. Za týchto predpokladov platí nasledujúca veta, pomocou ktorej budeme počítať určitý integrál.

Veta 5.2.9 (*Newton-Leibnizova veta*) Nech je funkcia f integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech je funkcia F primitívna funkcia k funkcii f na tomto intervale. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\left[F(x)\right]_a^b=F(a)-F(b) \tag{17}$$

Rovnosť (17) sa nazýva ***Newton-Leibnizov vzorec***. Pomocou Newton-Leibnizovho vzorca sa problém výpočtu určitého integrálu spojitej funkcie f redukuje na problém nájdenia primitívnej funkcie F. Potom už treba vypočítať iba rozdiel $F(a)-F(b)$.

Príklad 5.2.1 Vypočítame $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$.

Riešenie: Pretože funkcia $f: y=x^3$ je spojitá na intervale $\langle 1,2\rangle$, je na tomto intervale integrovateľná. K funkcii $f: y=x^3$ existuje primitívna funkcia F, napr. $F(x)=\frac{x^4}{4}$. Potom podľa Newton-Leibnizovej vety platí:

$$\int_1^2 x^3\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{15}{4}.$$

Substitúciu môžeme aj zaviesť priamo do určitého integrálu. Ak máme vypočítať určitý integrál typu $I=\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$, kde funkcia f je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$, funkcia g je definovaná na intervale $\langle\alpha,\beta\rangle$, platí že $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$ a g' je spojitá na (α,β), tak podobne ako pri použití substitučnej metódy pre neurčitý integrál použijeme substitúciu:

$$t=g(x),\ \mathrm{d}t=g'(x)\mathrm{d}x.$$

Použitím tejto substitúcie budú hranice určitého integrálu I zodpovedať premennej t. Nové hranice určíme zo substitúcie. Môžeme zapísať:

$$I=\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 5.2.2 Vypočítame $\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x$.

Riešenie: So substitúciou $t=x-3$, $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ zmeníme aj hranice integrálu. To znamená, že ak $x=4$, potom $t=1$ a ak $x=6$, potom $t=3$. A teda môžeme písať:

$$\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x=\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\left[2\sqrt{t}\right]_1^3=2\cdot\sqrt{3}-2.$$

Príklad 5.2.3 Vypočítame $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Tento integrál existuje, pretože funkcia $f: y = x\cdot\cos x$ je spojitá na celom svojom definičnom obore $D(f) = R$. Určením primitívnej funkcie $F(x)$ k funkcii $y = x\cos x$ metódou per partes (podľa Príkladu 5.1.23) dostaneme:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Príklad 5.2.4 Nájdeme strednú hodnotu funkcie f: $y = \sin x$ na intervale $\langle 0,\ \pi\rangle$.

Riešenie: Podľa vety 5.2.8 sa číslo $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýva stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a,\ b\rangle$. Potom platí:

$$f(c) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-cos\,x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

5.2.3 Integrál ako funkcia hornej (dolnej) hranice

Nech je funkcia f integrovateľná na intervale $\langle a,\ b\rangle$, potom je funkcia f podľa vety 5.2.6 integrovateľná aj na každom intervale $\langle a,\ x\rangle$ pre $x \le b$.

Ak x uvažujeme ako premenný bod intervalu $\langle a,\ b\rangle$, tak integrálom $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je definovaná nová funkcia, ktorú označíme $F(x)$ a voláme ju ***integrál ako funkcia hornej hranice***, resp. ***integrál s premennou hornou hranicou***.

Podobne funkciu $G(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$, definovanú na intervale $\langle a,\ b\rangle$, nazývame ***integrál ako funkcia dolnej hranice***.

Príklad 5.2.5 Nájdime funkciu $F(x)$ definovanú vzťahom $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, $x \in \langle 1,\ 100\rangle$.

Riešenie: Podľa vety 5.2.6, ak je funkcia f integrovateľná na intervale $\langle 1,\ 100\rangle$, tak je integrovateľná aj na každom intervale $\langle 1,\ x\rangle$ pre $x \le 100$. Takže

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln t\right]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

Poznámka 5.2.4 Integrálom $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ často vyjadrujeme, resp. definujeme také funkcie, ktoré sú primitívne k funkcii f, ale nie sú to elementárne funkcie. Takou funkciou je napríklad ***Laplaceova funkcia*** Φ, definovaná na intervale $(-\infty,\infty)$ vzťahom $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$, ktorá má veľký význam v teórii pravdepodobnosti.

ÚLOHY

5.2.1 Pomocou Newton-Leibnizovej vety vypočítajte určité integrály.

a) $\int_1^3 (4x-1)\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_0^3 (x^2+x+2)\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int_1^4 2x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int_{-1}^2 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$ **e)** $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x$ **f)** $\int_{-1}^1 \left(\mathrm{e}^x\right)^2\,\mathrm{d}x$

g) $\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{3x}\,\mathrm{d}x$ **i)** $\int_0^2 \frac{3x}{\sqrt{8-x^2}}\,\mathrm{d}x$

j) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}\,\mathrm{d}x$ **k)** $\int_{-1}^0 x^2 e^{2x}\mathrm{d}x$ **l)** $\int_0^3 \ln\left(2x+3\right)\mathrm{d}x$

5.2.2 Pomocou Newton-Leibnizovej vety vypočítajte určité integrály.

a) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos x)^4 \sin x\,dx$ **c)** $\int_0^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\;\,\mathrm{d}x$ **e)** $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$ **f)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin 3x\,\mathrm{d}x$

g) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ **i)** $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$

5.2.3 Nájdite funkciu *F* ako integrál s premennou hornou hranicou.

a) $F(x)=\int_1^x (3t+2)\,\mathrm{d}t$ **b)** $F(x)=\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t$

Výsledky

5.2.1 **a)** 14 **b)** 19,5 **c)** $\frac{508}{7}$ **d)** $2\sqrt{3}$

e) $\frac{98}{3}$ **f)** $\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}$ **g)** $\frac{\ln 45}{2}-\frac{\ln 5}{2}$ **h)** $\frac{1}{9}$

i) $3\sqrt{8}-6$ **j)** $2\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-2\ln 2$ **k)** $\frac{e^2-5}{4e^2}$

l) $\frac{9\ln 9-3\ln 3-6}{2}$

5.2.2 **a)** $2\sqrt{3}-2$ **b)** $\frac{31}{5}$ **c)** 0 **d)** $\frac{1}{4}$ **e)** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ **f)** $\frac{1}{4}$

g) $\frac{\pi}{4}$ **h)** $\frac{\pi}{6}$ **i)** $\frac{\pi}{6}$

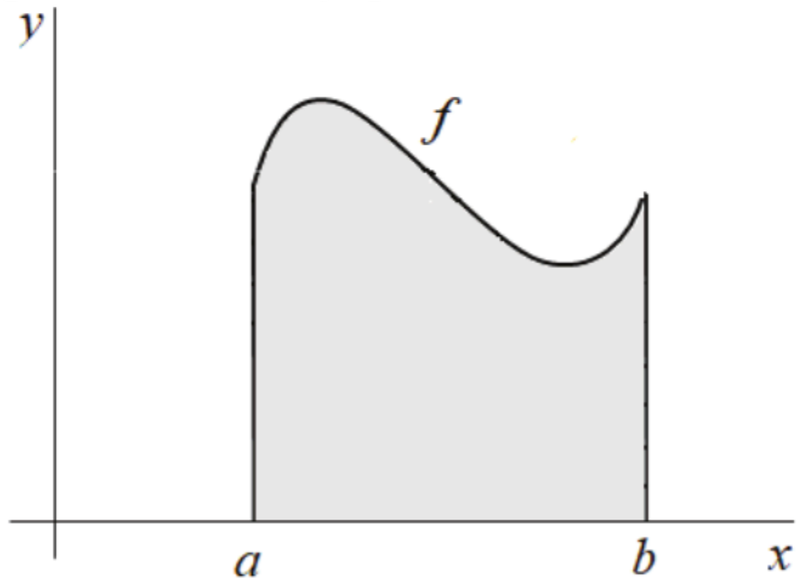
5.2.3 **a)** $\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{7}{2}$ **b)** $1-e^{-x}$

5.2.4 Niektoré geometrické a ekonomické aplikácie určitého integrálu

5.2.4.1 Obsah rovinného útvaru

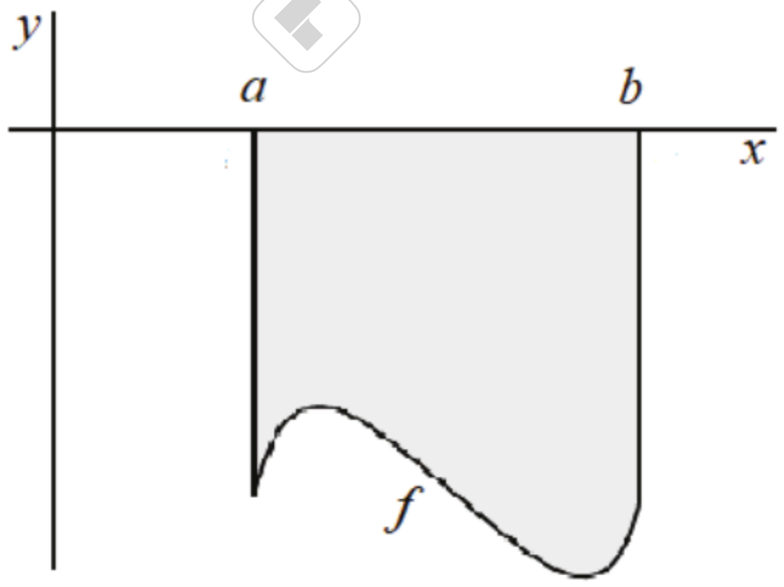
Určitý integrál umožňuje vypočítať obsah všeobecnejších rovinných útvarov, než s akými sa stretávame v stredoškolskej matematike.

Pri kladnej resp. nezápornej funkcii f na intervale $\langle a,b\rangle$ určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ podľa vety 5.2.4 je takisto kladný resp. nezáporný a jeho hodnota sa rovná obsahu krivočiareho lichobežníka ohraničeného grafom funkcie f, priamkami $x=a$, $x=b$ a osou x (obr. 5.2.5).



Obr. 5.2.5

Pri funkcii, ktorá je záporná na intervale $\langle a,b\rangle$, je aj určitý integrál záporný. Pretože obsah rovinného útvaru je nezáporné číslo, bude obsah P tohto krivočiareho lichobežníka rovný $P=\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$ (obr. 5.2.6).



Obr. 5.2.6

Príklad 5.2.6 Daná je funkcia $f: y=x^2-5x+4$. Vypočítame:

a) $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$,

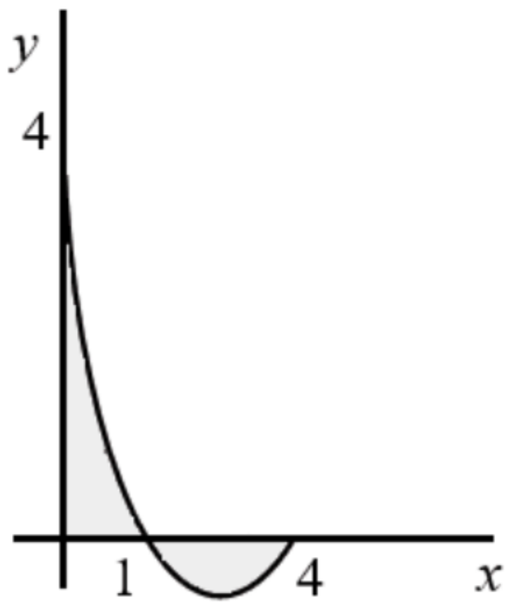
b) obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie f a osou x na intervale $\langle 0, 4\rangle$.

Riešenie:

a) Funkcia f je na intervale $\langle 0, 4\rangle$ spojitá, teda je integrovateľná a podľa Newton-Leibnizovej vety platí:

$$\int_0^4 (x^2-5x+4)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^4=\frac{64}{3}-5\cdot\frac{16}{2}+16=-\frac{8}{3}.$$

b) Pri výpočte obsahu rovinného útvaru, ktorý je ohraničený grafom funkcie f a osou x na intervale $\langle 0,4\rangle$, je nutné overiť, či je f na tomto intervale nezáporná. Ak je nezáporná, výpočet obsahu je totožný s predchádzajúcim výpočtom určitého integrálu. Grafom kvadratickej funkcie je parabola. Nájdeme priesečníky s osou x ako korene kvadratickej rovnice $x^2-5x+4=0$, $x_1=1$ a $x_1=4$. Keď nakreslíme graf funkcie f vidíme, že funkcia f na intervale (1, 4) nadobúda záporné hodnoty,



Obr. 5.2.7

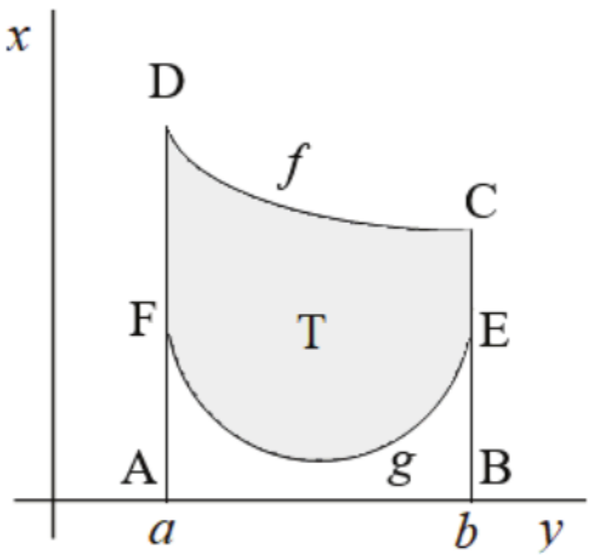
preto obsah rovinného útvaru vyjadríme takto:

$$P=\int_0^1 (x^2-5x+4)\,\mathrm{d}x+\left|\int_1^4 (x^2-5x+4)\;\;\mathrm{d}x\right|=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^1+\left|\left[\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+4x\right]_1^4\right|=\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\right)-0+\left|\left(\frac{64}{3}-40+16\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\right)\right|=\frac{19}{3}.$$

Poznámka 5.2.5 Hodnota určitého integrálu na intervale $\langle 0,4\rangle$ vo všeobecnosti nie je totožná s obsahom daného rovinného útvaru na tomto intervale!

Pomocou určenia obsahu „krivočiareho“ lichobežníka môžeme vypočítať aj obsahy zložitejších rovinných útvarov. Na obrázku 5.2.8 je nakreslený rovinný útvar T, ohraničený priamkami $x=a$, $x=b$ a grafmi funkcií $y=f(x)$, $y=g(x)$ spojitých na intervale $\langle a,b\rangle$ takých, že $\forall x\in\langle a,b\rangle, 0\le g(x)\le f(x)$.



Obr. 5.2.8

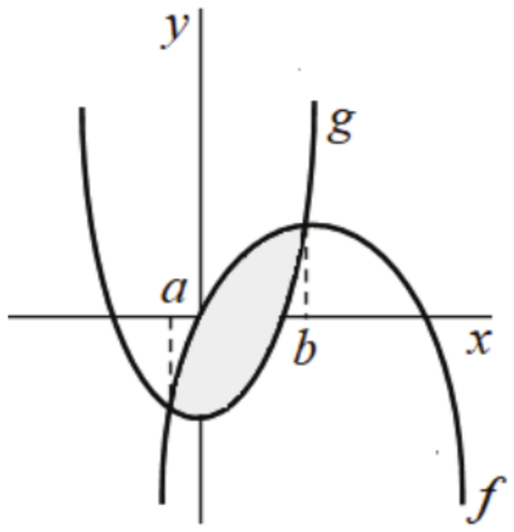
Obsah rovinného útvaru T je rozdielom obsahov krivočiarych lichobežníkov ABCD a ABEF, ktorých obsahy sú určené integrálmi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Potom pre obsah rovinného útvaru T platí vzťah:

$$P=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\,. \tag{18}$$

Poznámka 5.2.6 Vzťah (18) platí aj vtedy, ak aspoň jedna z funkcií *f*, *g* nadobúda nekladné hodnoty.

Príklad 5.2.7 Vypočítame obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií $f: y=x^2-6$ a $g: y=4x-x^2$.

Riešenie: Rovinný útvar, ktorého obsah máme vypočítať je znázornený na obrázku 5.2.9.



Obr. 5.2.9

Vyznačený útvar je ohraničený dvomi parabolami, ktoré sú grafmi funkcií *f* a *g*. Ak máme vypočítať obsah rovinného útvaru, ktorý je ohraničený grafmi dvoch funkcií, potrebujeme *x*-ové súradnice *a*, *b* priesečníkov grafov funkcií *f*, *g* a obsah vypočítame podľa vzťahu:

$$P=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\,.$$

a, *b* určíme na základe riešenia rovnice $x^2-6=4x-x^2$, po úprave máme $2x^2-4x-6=0$. Korene kvadratickej rovnice sú $x_1=-1$ a $x_2=3$, hranice integrovania sú teda $a=-1$, $b=3$. Potom

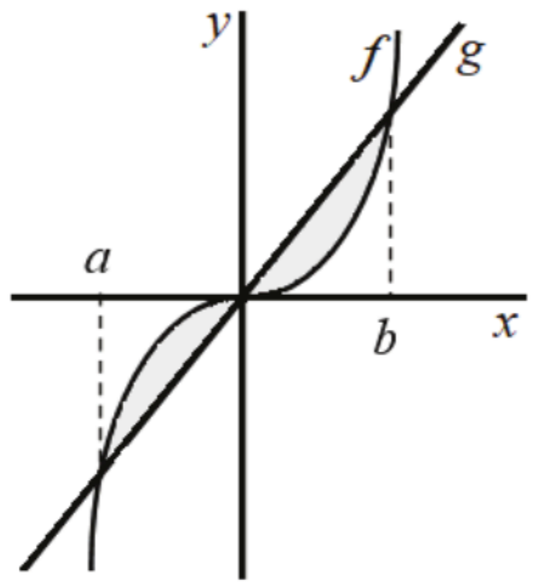
$$P=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}\left[(4x-x^2)-(x^2-6)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}\left[(4x-x^2)-(x^2-6)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{3}\left(4x-2x^2+6\right)\mathrm{d}x=\left[2x^2-2\frac{x^3}{3}+6x\right]_{-1}^{3}=(18-18+18)-\left(2+\frac{2}{3}-6\right)=\frac{64}{3}\,.$$

Príklad 5.2.8 Vypočítame obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií $f: y=x^3$ a $g: y=4x$.

Riešenie: Znázorníme grafy oboch funkcií (obr. 5.2.10). *x*-ové súradnice priesečníkov grafov funkcií *f* a *g* sú riešeniami rovnice $x^3=4x$. Jej korene sú $x_1=-2$, $x_2=2$ a $x_3=0$. Z obrázka 5.2.10 vidieť, že rovinný útvar sa skladá z dvoch zhodných častí, čo vyplýva zo stredovej súmernosti podľa priesečníka osí *x* a *y*, lebo funkcie *f* a *g* sú nepárne. Preto môžeme písať:

$$P=2\int_0^2 (4x-x^3)\mathrm{d}x=2\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=2\left(2\cdot 4-\frac{16}{4}-0\right)=8\,.$$



Obr. 5.2.10

5.2.4.2 Objem rotačného telesa

Objemy niektorých telies, napr. kocky, valca, gule atď., vieme vypočítať podľa známych vzorcov z elementárnej geometrie. V praxi však často treba počítať aj objemy zložitejších telies.

Nech je daná spojitá funkcia na intervale $\langle a,b\rangle$, ktorá nadobúda nezáporné hodnoty. Chceme vypočítať objem rotačného telesa (obr. 5.2.11), ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej priamkami $y=0$, $x=a$, $x=b$ a grafom nezápornej funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$ okolo osi x.

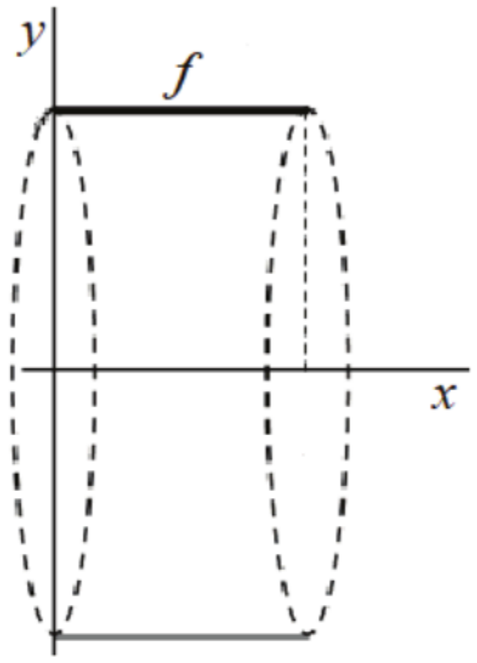
Obr. 5.2.11

Pre objem rotačného telesa určeného *spojitou a nezápornou funkciou f* na intervale $\langle a,b\rangle$ platí

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{19}$$

Príklad 5.2.9 Vypočítame objem rotačného valca, ktorý vznikne rotáciou plochy ohraničenej priamkami $y=0$, $x=0$, $x=5$ a grafom konštantnej funkcie $f: y=4$ na intervale $\langle 0,5\rangle$ okolo osi x.

Riešenie:



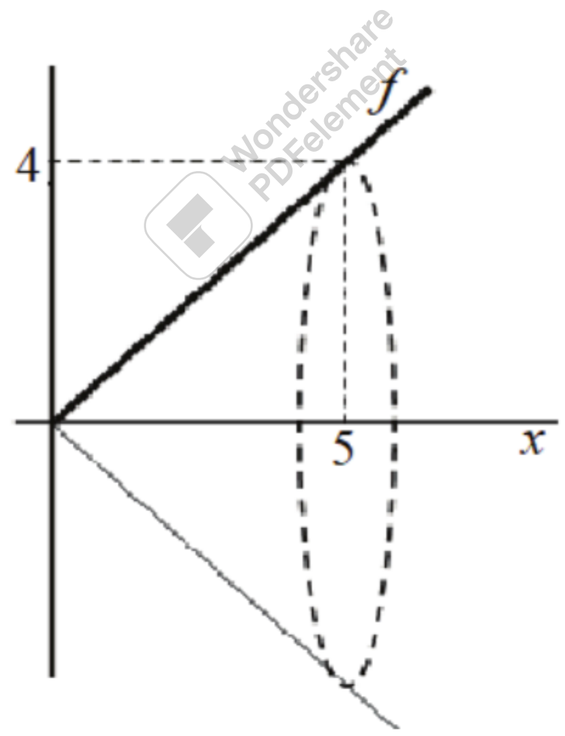
Obr. 5.2.12

Potom podľa (19)

$$V = \pi \int_0^5 4^2 \mathrm{d}x = \pi \left[4^2 x \right]_0^5 = \pi \cdot 16 \cdot 5 = 80\pi \,.$$

Príklad 5.2.10 Vypočítajme objem rotačného kužeľa s výškou 5 cm a s polomerom podstavy 4 cm.

Riešenie: Rotačný kužeľ (obr. 5.2.13) možno dostať rotáciou plochy, ktorá je ohraničená priamkami $y = 0$, $x = 5$



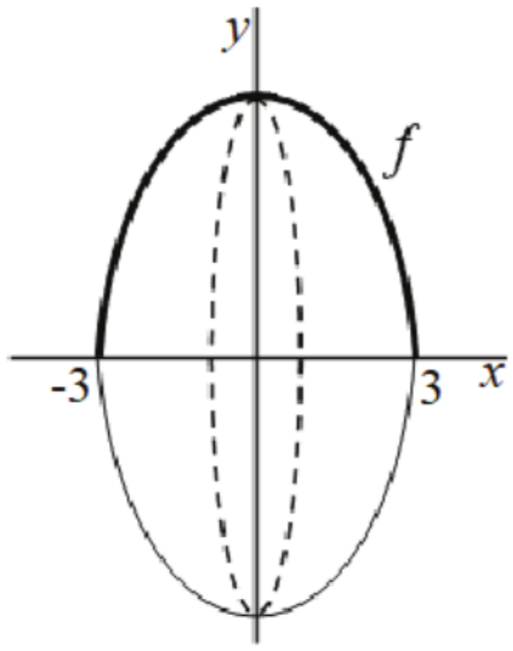
Obr. 5.2.13

a grafom lineárnej funkcie $f : y = \frac{4}{5}x$ na intervale $\langle 0,5 \rangle$, okolo osi x. Potom:

$$V = \pi \int_0^5 \left(\frac{4}{5}x \right)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{16}{25} \int_0^5 x^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{16}{25} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^5 = \pi \cdot \frac{16}{25} \left(\frac{5^3}{3} - 0 \right) = \frac{80}{3}\pi \,.$$

Príklad 5.2.11 Vypočítame objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy, ktorá je ohraničená priamkou $y = 0$ a grafom funkcie $f : y = 9 - x^2$, okolo osi x.

Riešenie: Parabola pretína os x v bodoch $x = -3$, $x = 3$.



Obr. 5.2.14

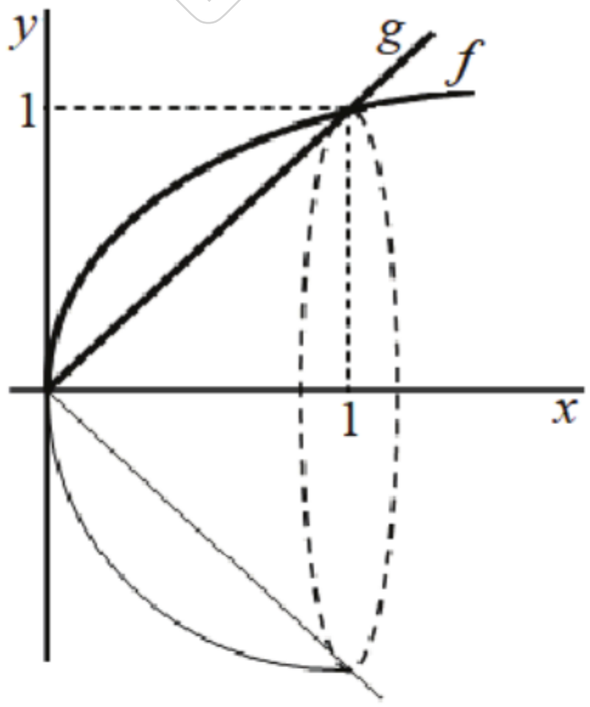
Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou danej plochy (obr. 5.2.14) okolo osi x, potom je:

$$V = \pi\int_{-3}^{3}(9-x^2)^2\mathrm{d}x = 2\pi\int_{0}^{3}(81-18x^2+x^4)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi\left[81x-6x^3+\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = 2\pi\left(243-162+\frac{243}{5}\right) = \frac{1296\pi}{5}.$$

Príklad 5.2.12 Vypočítame objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafmi funkcií $f: y=\sqrt{x}$ a $g: y=x$ okolo osi x.

Riešenie: Funkcie f a g sa pretínajú v bodoch $O[0,0]$ a $A[1,1]$. Obe funkcie sú na intervale $\langle 0,1\rangle$ nezáporné a spojité.



Obr. 5.2.15

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinného útvaru okolo osi x (obr. 5.2.15), vypočítame podľa vzťahu (14) ako rozdiel dvoch objemov.

$$V = \pi\int_a^b f_1^2(x)\,\mathrm{d}x - \pi\int_a^b f_2{}^2(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \pi\int_a^b \left(f_1^2(x)-f_2^2(x)\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\left(\sqrt{x} \right)^2 - x^2 \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_0^1 \left(x - x^2 \right) \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

5.2.4.3 Marginálna analýza

Z vlastností určitého integrálu vyplýva, že ak sú dané marginálne náklady MC a poznáme celkové náklady $C(x_1)$ pri úrovni produkcie x_1, tak celkové náklady pri úrovni produkcie x_2 môžeme vyjadriť takto:

$$C(x_2) = C(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} MC \, \mathrm{d}x \, . \tag{20}$$

Podobné vzťahy platia aj pre funkcie celkových príjmov a celkového zisku.

Príklad 5.2.13 Riešme Príklad 5.1.36 a) použitím určitého integrálu.
Riešenie: Ak $FC = 300$, tak to znamená, že $C(0) = 300$. Ďalej máme $x_1 = 0$ a $MC(x) = 6 - 0{,}04x$, a teda podľa (20) platí:

$$C(x) = C(0) + \int_0^x (6 - 0{,}04x) \, \mathrm{d}x = 300 + \left[6x - 0{,}04 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^x = 300 + 6x - 0{,}02x^2 \, .$$

Príklad 5.2.14 Určme celkový zisk pri úrovni produkcie $x = 10$, ak je daný marginálny zisk $MP(x) = 30 + 6x - \frac{3}{2}x^2$ a vieme, že celkový zisk pri úrovni $x = 1$ je 12 p.j.

Riešenie: Celkový zisk pri úrovni produkcie $x = 10$ zapíšeme ako $P(10)$. Celkový zisk pri úrovni produkcie $x = 1$ je 12 p.j. zapíšme ako $P(1) = 12$ a podľa (20) platí:

$$P(10) = P(1) + \int_1^{10} \left(30 + 6x - \frac{3}{2}x^2 \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 12 + \left[30 \cdot x + 6 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_1^{10} = 112 - 33{,}5 = 78{,}5 \text{ p.j.}$$

5.2.4.4 Spotrebiteľský a podnikateľský prebytok

Spotrebiteľský prebytok (Consumer´s Surplus) *CS* je pojem z ekonomickej teórie, ktorý definujeme ako rozdiel medzi množstvom peňazí, ktoré by bol spotrebiteľ za tovar ochotný maximálne zaplatiť (za určité množstvo) a medzi peniazmi, ktoré v skutočnosti platí (trhová cena), je to teda úžitok, ktorý spotrebiteľ získa bez toho, aby zaň platil.

Napríklad, ak je spotrebiteľ ochotný za prvý kus výrobku zaplatiť 5€, za druhý kus 4€ a za tretí kus 3€ a trhová cena je 3€ (t.j. zaplatí za každý kus 3€), tak prebytok tohto spotrebiteľa budú $\big((5-3)+(4-3)+(3-3)\big) = 3$ €.

Podnikateľský prebytok (Producer´s Surplus) *PS* je pojem z ekonomickej teórie, ktorý definujeme ako rozdiel medzi trhovou cenou produktu a minimálnou cenou, za ktorú by podnikateľ bol ochotný vyrábať, je to teda prospech, ktorý získa podnikateľ nad rámec svojich marginálnych nákladov.

Napríklad ak má podnikateľ marginálne náklady na prvý kus výrobku 1€, na druhý kus 2€ a na tretí 3€ a trhová cena je 3€ (teda za každý kus zinkasuje 3€), potom sú prebytok tohto podnikateľa $\big((3-1)+(3-2)+(3-3)\big)=3\,€$.

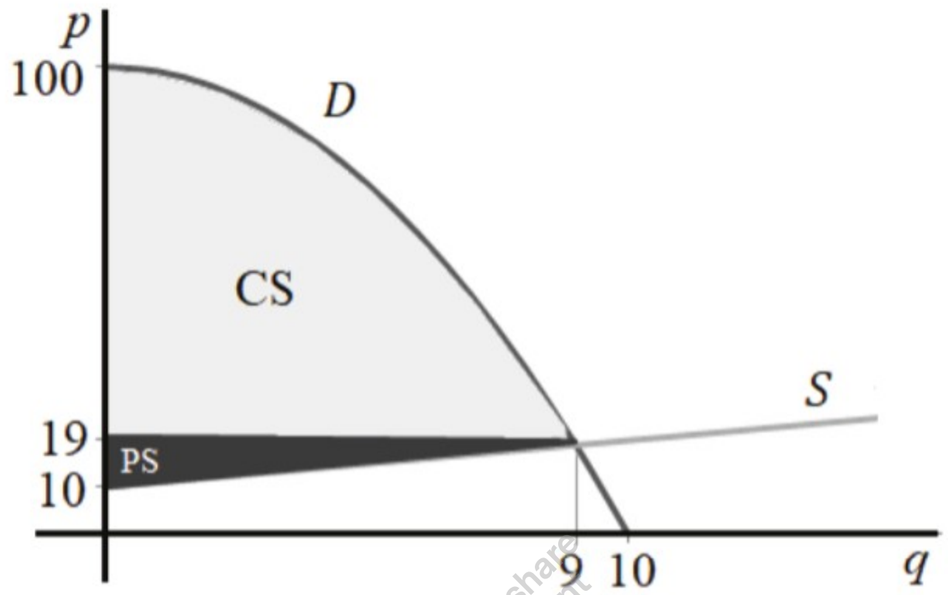
Príklad 5.2.15 Je daná dopytová funkcia $D: p=100-q^2$ a funkcia ponuky $S: p=q+10$. Určme spotrebiteľský a podnikateľský prebytok.

Riešenie: Riešením rovnice $D(q)=S(q)$ nájdeme rovnovážny bod so súradnicami $[\overline{q},\overline{p}]$.

$$100-q^2=q+10$$

$$\overline{q}=9$$

Rovnovážna cena je potom $\overline{p}=19$. Rovnovážny bod má teda súradnice $R=[9,19]$. Znázornime funkcie graficky.



Obr. 5.2.16

Vo všeobecnosti platí:

$$CS=\int_0^{\overline{q}}\big(D(q)-\overline{p}\big)\,\mathrm{d}q\,.$$

Spotrebiteľský prebytok *CS* vypočítame pomocou určitého integrálu a bude rovný obsahu plochy na obrázku 5.2.16, ktorá je vyplnená šedou farbou.

$$CS=\int_0^{9}\Big(\big(100-q^2\big)-19\Big)\,\mathrm{d}q=\left[81q-\frac{q^3}{3}\right]_0^{9}=81\cdot 9-\frac{9^3}{3}=486\ \text{p.j.}$$

Vo všeobecnosti platí:

$$PS=\int_0^{\overline{q}}\Big(\overline{p}-S(q)\Big)\,\mathrm{d}q\,.$$

Podnikateľský prebytok *PS* vypočítame pomocou určitého integrálu a bude sa rovnať obsahu plochy na obrázku 5.2.16, ktorá je vyplnená čiernou farbou.

$$PS=\int_0^{9}\Big(19-\big(q+10\big)\Big)\,\mathrm{d}q=\left[9q-\frac{q^2}{2}\right]_0^{9}=81-\frac{81}{2}=40{,}5\ \text{p.j.}$$

Wondershare PDFelement

ÚLOHY

5.2.4 Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného krivkami:

a) $y = 2x,\ y = x,\ x = 5$ **b)** $y = 3 - 2x,\ y = x,\ x = 0$

c) $y = x^2 - 4x,\ y = 0$ **d)** $y = 5x - x^2,\ y = x$

e) $y = x^2 - 4x + 6,\ y = -2x^2 + 8x - 3$ **f)** $y = x^2,\ y^2 = x$

5.2.5 Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného krivkami $y = 2 - x$ a

a) $y = 0,\ x = 0$ **b)** $y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

c) $y = 0,\ y = -1$ a osou y **d)** $y = 3,\ x = 0$

5.2.6 Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného krivkami $y = \sqrt{x}$ a

a) $y = 1,\ x = 0$ **b)** $y = 1,\ x = 4$

c) $y = -\sqrt{x},\ x = 1$ **d)** $y = -\sqrt{x},\ x + y - 2 = 0$

5.2.7 Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného krivkami:

a) $y = -x^2 + 2x + 8,\ y = 0$ **b)** $y = 16 - x^2,\ y = x^2 - 16$

c) $y = x^2 + 6x + 8,\ y = -x^2 - 10x - 16$ **d)** $y = -9 - x^2,\ 5x + y + 9 = 0$

e) $y = x^2,\ y = 4x^2,\ y = 1$ **f)** $y = 2x^3,\ y = \frac{x}{2}$

g) $y = x,\ y = 3\sqrt{x}$

5.2.8 Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného krivkami:

a) $y = e^x,\ y = e^{-x},\ y = e$ **b)** $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = \ln 2$

c) $y = 2e^{-3x},\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$ **d)** $y = 2^{-x},\ y = 2,\ x = 2$

e) $y = e^{2x},\ y = e^x + 2,\ x = 0$

5.2.9 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou časti roviny ohraničenej danou krivkou na intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi x:

a) $y = 3x + 1,\ a = 0,\ b = 1$ **b)** $y = x^2,\ a = 0,\ b = 4$

c) $y = x^2 + 2,\ a = -1,\ b = 1$ **d)** $y = \sqrt{2x - 3},\ a = 2,\ b = 5$

e) $y = \frac{4}{x},\ a = 1,\ b = 2$

5.2.10 Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinného útvaru okolo *x*-ovej osi, a ktorý je ohraničený krivkami:

a) $y = 1 - x^2,\ y = 3x^2$ **b)** $y = 2x^2 + 1,\ y = x^2 + 2$

c) $y^2 = 4x,\ y = x$ **d)** $y^2 = x,\ y = x^2$

5.2.11 Riešte úlohy 5.1.29 a 5.1.34 pomocou určitého integrálu (marginálna analýza).

5.2.12 Určte spotrebiteľský a podnikateľský prebytok, ak sú dané nasledujúce funkcie dopytu a ponuky:

a) $d: p = 10\sqrt{1000 - q}$ a $s: p = 30\sqrt{q}$ **b)** $d: p = 100 - q$ a $s: p = q + 10$

c) $d: p = 100 - q^2$ a $s: p = q^2$ **d)** $d: p = 25 - q^2$ a $s: p = 2q + 1$

e) $d: q = p^2 - 50p + 400$ a $s: q = p^2 + 50$ **f)** $d: q = \sqrt{1000 - p}$ a $s: q = \frac{p + 50}{5}$

Wondershare PDFelement

Výsledky

5.2.4 **a)** $\frac{25}{2}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{32}{3}$ **d)** $\frac{32}{3}$ **e)** $\frac{32}{3}$ **f)** $\frac{1}{3}$

5.2.5 **a)** 2 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{5}{2}$ **d)** $\frac{1}{2}$

5.2.6 **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{14}{3}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{27}{6}$

5.2.7 **a)** 36 **b)** $\frac{512}{3}$ **c)** $\frac{64}{3}$ **d)** $\frac{125}{6}$ **e)** $\frac{2}{3}$

f) $\frac{1}{16}$ **g)** $\frac{27}{2}$

5.2.8 **a)** 2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$ **d)** $6-\frac{7}{4\ln 2}$ **e)** $2\ln 2-\frac{1}{2}$

5.2.9 **a)** 7π **b)** $\frac{1024}{5}\pi$ **c)** $\frac{166}{15}\pi$ **d)** 12π **e)** 8π

5.2.10 **a)** $\frac{11}{15}\pi$ **b)** $\frac{24}{5}\pi$ **c)** $\frac{32}{3}\pi$ **d)** $\frac{3}{10}\pi$

5.2.12 **a)** $CS \doteq 815,51$ $PS = 10000$ **b)** $CS = 1012,5$ $PS = 1012,5$

c) $CS = \frac{500\sqrt{2}}{3}$ $PS = \frac{500\sqrt{2}}{3}$ **d)** $CS = \frac{128}{3}$ $PS = 16$

e) $CS = 144$ $PS = \frac{1393}{3}$ **f)** $CS = 18000$ $PS = 2000$

Wondershare PDFelement

5.3 Nevlastný integrál

5.3.1 Pojem nevlastného integrálu

Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sme definovali z ohraničenej funkcie f na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$. Ak:

1. je interval neohraničený, t.j. $a=-\infty$ alebo $b=\infty$, alebo
2. funkcia f nie je ohraničená,

tak definícia pomocou integrálnych súčtov nie je možná. Preto rozšírime pojem určitého integrálu na prípad, keď interval integrácie je neohraničený a na prípad, keď funkcia f je neohraničená na intervale integrácie.

Integrály v týchto prípadoch budeme definovať použitím limity a budeme ich nazývať ***nevlastné integrály***.

5.3.2 Nevlastný integrál na neohraničenom intervale

Definícia 5.3.1a Nech je funkcia f definovaná na intervale $\langle a, \infty)$ a nech pre každé $t\in\langle a, \infty)$ existuje integrál $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom, ak existuje vlastná limita $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ ***konverguje*** a píšeme $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definícia 5.3.1b Nech je funkcia f definovaná na intervale $(-\infty, b\rangle$ a nech pre každé $t\in(-\infty, b\rangle$ existuje integrál $\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom, ak existuje vlastná limita $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$, hovoríme, že nevlastný integrál $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ***konverguje*** a píšeme $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

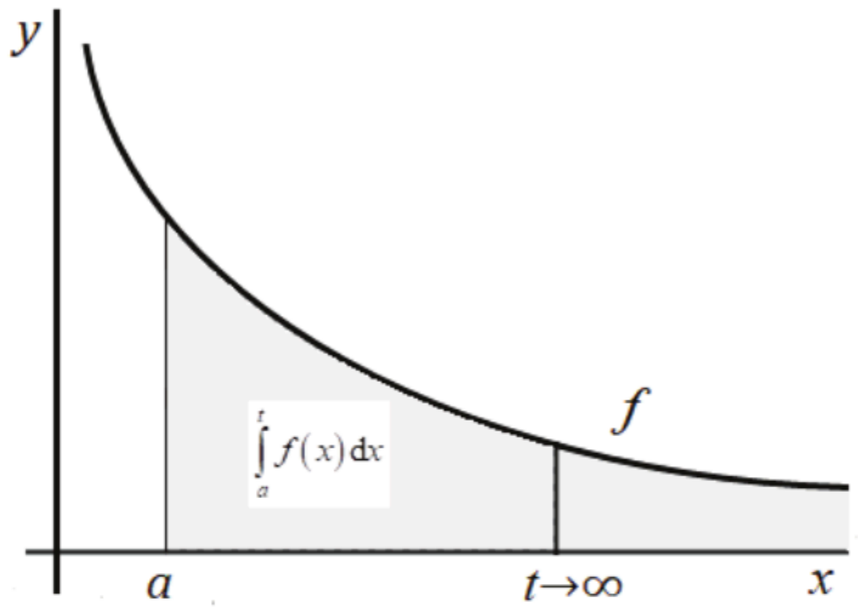
Ak pre dané číslo $c\in\mathrm{R}$ existujú nevlastné integrály $\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x$, potom definujeme:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ak niektorý z uvedených nevlastných integrálov nekonverguje, tak hovoríme, že integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ ***diverguje***.

5.3.3 Geometrická interpretácia nevlastného integrálu na neohraničenom intervale

Nevlastný integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ určuje obsah rovinného útvaru ohraničeného priamkami $x=a$, $y=0$ a grafom funkcie *f*, ktorá je na intervale $\langle a,\infty)$ spojitá a nemení na ňom znamienko. Plocha útvaru je neohraničená („nekonečne dlhá“), ale jej obsah je konečný (obr. 5.3.1).



Obr. 5.3.1

Príklad 5.3.1 Vypočítame nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$.

Riešenie: Platí, že funkcia $f: y = e^x$ je spojitá na intervale $\langle -\infty, 0\rangle$, a teda podľa definície 5.3.1 pre každé $t \in \langle -\infty, 0\rangle$ integrál $\int_t^0 f(x)\,dx$ existuje a platí:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{t\to -\infty}\int_t^0 e^{2x}\,dx = \lim_{t\to -\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_t^0 = \lim_{t\to -\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2t}}{2}\right) = 0{,}5\,.$$

Limita je vlastná, a teda nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$ je konvergentný.

Príklad 5.3.2 Vypočítame nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Riešenie: Daný nevlastný integrál vhodne rozdelíme na dva integrály:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

Využitím toho, že funkcia $f: y = \frac{1}{1+x^2}$ je párna, môžeme písať: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Funkcia $f: y = \frac{1}{1+x^2}$ je spojitá na intervale $\langle 0, \infty\rangle$, a teda podľa definície 5.3.1 dostávame:

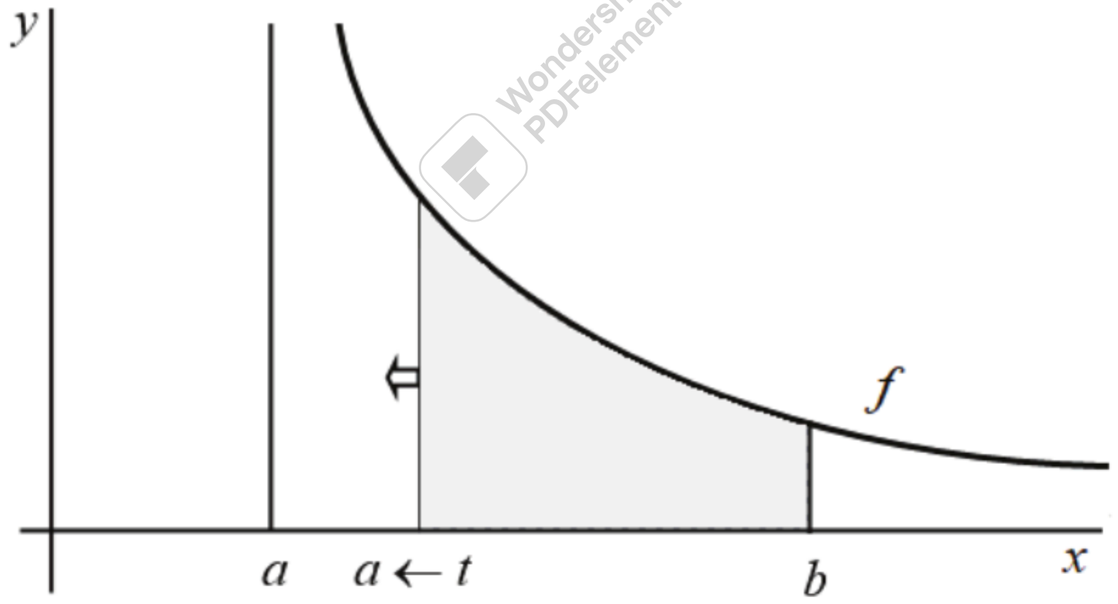
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\lim_{t\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^t =$$

$$= 2\lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi\,.$$

5.3.4 Nevlastný integrál neohraničenej funkcie

Definícia 5.3.2a Nech je funkcia f definovaná na intervale $\langle a, b)$ a nech je ohraničená v každom ľavom okolí bodu b a pre každé $t \in \langle a, b)$ existuje integrál $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom, ak existuje vlastná limita $\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ na intervale $\langle a, b)$ ***konverguje*** a píšeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definícia 5.3.2b Nech je funkcia f definovaná na intervale $(a, b\rangle$ a nech je ohraničená v každom pravom okolí bodu a a pre každé $t \in (a, b\rangle$ existuje integrál $\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (obr. 5.3.2) Potom, ak existuje vlastná limita $\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$, hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ na intervale $(a, b\rangle$ ***konverguje*** a píšeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Obr. 5.3.2

Príklad 5.3.3 Vypočítame nevlastný integrál $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Pretože $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$, funkcia $f : y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ je v pravom okolí bodu 0 neohraničená a podľa definície 5.3.2 dostávame:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \right]_t^1 = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{1} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{t^2} \right) = 1{,}5$$

Nevlastný integrál $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Príklad 5.3.4 Vypočítame nevlastný integrál $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Pretože $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$, funkcia $f: y = \frac{1}{x^2}$ je v ľavom okolí bodu 0 neohraničená a podľa definície 5.3.2 dostávame:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{t} = \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{1}{t} - 1\right) = \infty$$

Nevlastný integrál $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Poznámka 5.3.1 Nevlastný integrál z neohraničenej funkcie vyzerá na prvý pohľad rovnako ako určitý integrál. Napríklad integrál $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ a $\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, prvý z nich je nevlastný. Preto, aby nedošlo k zámene nevlastného integrálu za určitý integrál, je vždy potrebné sa presvedčiť, či je funkcia ohraničená na danom intervale integrovania.

Príklad 5.3.5 *Vypočítame integrály* $\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ *a* $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Príklad je praktickou ukážkou poznámky 5.3.1. Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2}$ je definovaná na množine $M = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Na intervale $\langle 1, 3\rangle$ je spojitá, a teda integrovateľná. To znamená, že môžeme použiť Newton-Leibnizovu vetu a platí:

$$\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{3} = \left(-\frac{1}{3} - (-1)\right) = \frac{2}{3}$$

Pretože funkcia $f: y = \frac{1}{x^2}$ je v okolí bodu $x = 0$ neohraničená, ide o nevlastný integrál. Daný nevlastný integrál je potrebná práve v okolí bodu $x = 0$, kde je funkcia f neohraničená, rozdeliť na dva integrály:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ak aspoň jeden z týchto integrálov diverguje, tak aj pôvodne daný integrál diverguje. Prvý z nich $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ je vypočítaný v Príklade 5.3.4, $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \infty$. Teda nevlastný integrál $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ diverguje. A teda bez toho, aby sme počítali druhý z integrálov, môžeme napísať, že aj integrál $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ diverguje.

ÚLOHY

5.3.1 Vypočítajte nevlastné integrály.

a) $\int_3^\infty \left(3x^2 - x\right)\mathrm{d}x$ **b)** $\int_1^\infty \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x$ **c)** $\int_1^\infty \frac{10}{x}\mathrm{d}x$

d) $\int_2^\infty \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ **e)** $\int_2^\infty \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$ **f)** $\int_1^\infty \frac{x^2 - 1}{x^4}\mathrm{d}x$

5.3.2 Vypočítajte nevlastné integrály.

a) $\int_4^\infty \frac{1}{(x-3)}\mathrm{d}x$ **b)** $\int_4^\infty \frac{1}{(x-3)^2}\mathrm{d}x$ **c)** $\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

d) $\int_0^\infty e^{-3x}\mathrm{d}x$ **e)** $\int_{-\infty}^{-1} e^{2x+1}\mathrm{d}x$ **f)** $\int_{-\infty}^{0} 10^x\mathrm{d}x$

g) $\int_0^\infty xe^{-x}\mathrm{d}x$ **h)** $\int_1^\infty \frac{x}{e^x}\mathrm{d}x$ **i)** $\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$

5.3.3 Vypočítajte nevlastné integrály.

a) $\int_{-\infty}^0 e^x \operatorname{cotg} e^x \mathrm{d}x$ **b)** $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ **c)** $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$

5.3.4 Vypočítajte nevlastné integrály.

a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{-\infty}^\infty x\cdot 2^{-x^2}\mathrm{d}x$ **c)** $\int_{-\infty}^\infty x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$

d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{9x^2+4}\mathrm{d}x$ **e)** $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$ **f)** $\int_{-\infty}^\infty \frac{arctgx}{x^2+1}\mathrm{d}x$

5.3.5 Vypočítajte nevlastné integrály.

a) $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ **c)** $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

d) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ **e)** $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x^2-x}\mathrm{d}x$ **f)** $\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\mathrm{d}x$

g) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$

Výsledky

5.3.1 **a)** div **b)** 1 **c)** div **d)** div **e)** $\frac{37}{6}$ **f)** $\frac{2}{3}$

5.3.2 **a)** div **b)** 1 **c)** div **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** $\frac{1}{2e}$ **f)** $\frac{1}{\ln 10}$ **g)** 1 **h)** 0 **i)** $(e-1)$

5.3.3 **a)** div **b)** $\frac{3\pi}{4}$ **c)** $\frac{\pi}{4}$

Wondershare
PDFelement

5.3.4 **a)** 0 **b)** 0 **c)** 0 **d)** $\frac{\pi}{6}$ **e)** π **f)** 0

5.3.5 **a)** -1 **b)** 2 **c)** div **d)** 1 **e)** div **f)** div **g)** 2

Wondershare
PDFelement

LITERATÚRA

[1] BAUER, L., LIPOVSKÁ, H., MIKULÍK, M., MIKULÍK, V. (2015). *Matematika v ekonomii a ekonomice*. Praha: GRADA Publishing, a. s.

[2] BERMAN, G. N. (1972). *Sbornik zadač po kursu matematičeskovo analiza*. Moskva: NAUKA.

[3] COUFAL, J., KLŮFA, J. (1996). *Učebnice matematiky I*. Praha: VŠE.

[4] DEMIDOVIČ, B. P. (1969). *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu*. Moskva: NAUKA.

[5] FECENKO, J., PINDA, Ľ. (1998). *Matematika* 1. Bratislava: ELITA.

[6] GANTMACHER, F. R. (1966). *Teorija matric*. Moskva: NAUKA.

[7] HORÁKOVÁ, G., STAREČKOVÁ, A. (2005). *Matematika 1*. Zbierka úloh. Bratislava: EKONÓM.

[8] HORSKÝ, Z. (1981). *Diferenciální počet.* Praha: SNTL.

[9] HUŤKA, V., BENKO, E., ĎURIKOVIČ, V. (1991). *Matematika*. Bratislava: ALFA.

[10] HUŤKA, V., BENKO, E., ŽILINKOVÁ, J. (1984). *Matematika pre ekonómov 1*. Bratislava: ALFA.

[11] JARNÍK, V. (1963). *Diferenciální počet 1*. Praha: NČSAV.

[12] KADEROVÁ, A. (2019). *Podklady k prednáškam z predmetu Matematika* na FPM Ekonomickej univerzity v Bratislave.

[13] KAŇKA, M, HENZLER, J. (1996). *Učebnice matematiky II*. Praha: VŠE.

[14] KOUDELA, L., JINDROVÁ, P., SEINEROVÁ, K., SLAVÍČEK, O., ZAPLETAL, D. (2017). *Matematika I*: *distanční opora*. Univerzita Pardubice.

[15] KUBÁČEK, Z., VALÁŠEK, J. (1989). *Cvičenia z mtematickej analýzy 1*. UK Bratislava.

[16] KLŮFA, J. (1995). *Maticový počet*. Skriptá. Praha: VŠE.

[17] KLŮFA, J. (1997). *Kapitoly z algebry pro matematiky*. Skriptá. Praha: VŠE.

[18] KLŮFA, J. (2019). *Matematika pro bakalářské studium na VŠE*. Ekopress. Jesenice.

[19] MATEJDES, M. (2000). *Diferenciálny počet funkcií jednej premennej*. Zvolen: MATCENTRUM.

[20] MINORSKIJ, V. P. (1977). *Sbornik zadač po vyssšej matematike*. Moskva: NAUKA.

[21] MOLNÁROVÁ, M. (2013). *Matematika I a jej využitie v ekonómii*. Košice: Equilibria.

[22] MOUČKA, J., RÁDL, P. (2015). *Matematika pro studenty ekonomie*. Praha: Grada Publishing.

[23] MUCHA, V. (2019). *Podklady k prednáškam z predmetu Matematika* pre študijný program FBI na NHF Ekonomickej univerzity v Bratislave.

[24] MUCHA, V., KADEROVÁ, A. (2014). *Matematika. Funkcia dvoch reálnych premenných. Integrálny počet.* Bratislava: EKONÓM.

[25] ONDREJKOVÁ KRČOVÁ, I., ŠOLTÉSOVÁ, T. (2012). *Matematika. Funkcia jednej premennej. Diferenciálny počet funkcie jednej premennej.* Bratislava: EKONÓM.

[26] SAKÁLOVÁ, K., SIMONKA, Zs., STREŠŇÁKOVÁ, A. (2015). *Matematika: Lineárna algebra*. Bratislava: EKONÓM.

[27] SAMUELSON, P. A. (1970). *Foundations of Economic Analysis.* New York: ATHENEUM.

[28] SEKEROVÁ, V. a kol. (1992). *Matematika 1*. Zbierka úloh. Bratislava: Ekonomická univerzita v Bratislave.

[29] ŠOLTÉSOVÁ, T. (2018). *Podklady k prednáškam z predmetu Matematika* pre študijný program UC na FHI Ekonomickej univerzity v Bratislave.

[30] ZIMKA, R. (1999). *Matematika s aplikaci v ekonomii*. Zvolen: MATCENTRUM.

[31] ZLATOŠ, P. (2011). *Lineárna algebra a geometria. Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. Dostupné na internete: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf.

Wondershare PDFelement

Wondershare
PDFelement

Wondershare
PDFelement

ISBN 978-90-89962-62-4 (print)
ISBN 978-90-89962-63-1 (online)